

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO INTERDISCIPLINARIO DE INVESTIGACIÓN
PARA EL DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL
UNIDAD OAXACA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS
NATURALES**
(Ingeniería de Procesos)

**IMPLEMENTACIÓN DE LA POSTINVERSA DE VOLTERRA POR
MEDIO DE ECUACIONES LINEALES ASOCIADAS A UN SISTEMA NO
LINEAL ANALÓGICO SIMILAR A LOS ENCONTRADOS EN EL
PROCESO DE APROVECHAMIENTO DE LOS RECURSOS
NATURALES**

**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
PRESENTA:**

PRESENTA: **ING. SARAHÍ MORALES PÉREZ**

DIRECTORES: **DR. JUAN ALEJANDRO VAZQUEZ FEIJOO**
DR. ANDRÉS PECH PÉREZ

Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca.

Junio de 2010



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez siendo las 13:00 horas del día 30 del mes de abril del 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca (CIIDIR-OAXACA) para examinar la tesis de grado titulada: **"Implementación de la Postinversa de Volterra por medio de ecuaciones lineales asociadas a un sistema no lineal analógico similar a los encontrados en el proceso de aprovechamiento de los recursos naturales"**

Morales
Apellido paterno

Pérez
materno

Sarahí
nombre(s)

Con registro:

A	0	8	0	3	5	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de: **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

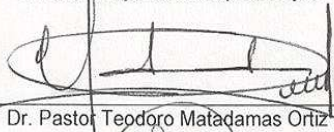
Directores de tesis



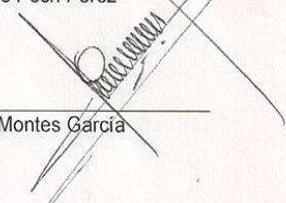
Dr. Juan Alejandro Vazquez Feijoo



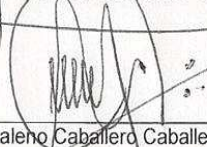
Dr. Andrés Pech Pérez



Dr. Pastor Teodoro Matadamas Ortiz

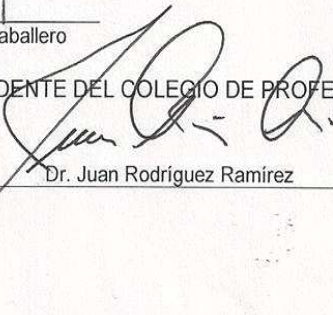


Dr. Pedro Montes García



Dr. Magdaleno Caballero Caballero

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES



Dr. Juan Rodríguez Ramírez



CENTRO INTERDISCIPLINARIO
DE INVESTIGACIÓN PARA EL
DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL
C.I.I.D.I.R.
UNIDAD OAXACA
I.P.N.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez el día **30** del mes **abril** del año **2010**, el (la) que suscribe **Morales Pérez Sarahí** alumno (a) del Programa de MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES con número de registro **A080355**, adscrito al Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del los Drs. Juan Alejandro Vazquez Feijoo y Andrés Pech Pérez y cede los derechos del trabajo titulado: **“Implementación de la Postinversa de Volterra por medio de ecuaciones lineales asociadas a un sistema no lineal analógico similar a los encontrados en el proceso de aprovechamiento de los recursos naturales”** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **Calle Hornos 1003, Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca**, e-mail: posgradoax@ipn.mx ó sarahi.perez@gmail.com Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Morales Pérez Sarahí



CENTRO INTERDISCIPLINARIO
DE INVESTIGACION PARA EL
DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL
C.I.I.D.I.R.
UNIDAD OAXACA
I.P.N.

RESÚMEN

La gran mayoría de los sistemas encontrados en el mundo real son de naturaleza no-lineal, excepto en un rango limitado de operación donde pueden ser considerados lineales. Por otro lado, los últimos años han sido testigo de la aparición de estructuras inteligentes, los cuáles requieren de un gran número de sensores sofisticados para medir continuamente su respuesta. Sin embargo, estos dispositivos exhiben comportamiento no-lineal como resultado del envejecimiento y desgaste, además, el proceso de sensado por si mismo introduce no-linealidades. Por lo tanto, al tratar de analizar y controlar estos sistemas a través de modelos lineales los resultados son no válidos.

El objetivo de esta investigación es compensar las pérdidas del sistema, eliminar la inercia y el comportamiento no-lineal mediante la implementación de la Postinversa de Volterra por medio de Ecuaciones Lineales Asociadas (ELA's) a un sistema analógico lineal, así como, a un sistema analógico no-lineal que modela a un oscilador de Duffing de un grado de libertad de dos formas, una de manera continua en simulink y la otra en forma discreta con modelos NARMAX (siglas de Nonlinear Autoregressive Models with eXogenous terms).

ABSTRACT

The vast majority of systems encountered in the real world are nonlinear in nature, except in a limited range of operation where they can be considered linear. On the other hand, the last few years have witnessed the appearance of smart structures which require a large number of sophisticated sensors to continuously measure the structural response. However, these devices exhibit nonlinear behavior as a result of aging and wear, in addition, the sensing process by itself introduces nonlinearities. Therefore, by attempting to analyze and control these systems through linear models the results are not valid.

The aim of this research is to compensate the system losses, to eliminate the inertia and the nonlinear behavior by implementing the Volterra Postinverse through Associated Linear Equations (ALE's) to a linear analog system, as well as to a nonlinear analog system by modelling to Duffing oscillator of a single degree of freedom in two forms, one continuously in simulink and the other in discrete form with NARMAX (Nonlinear Models With Autoregressive exogenous terms) models.

DEDICATORIAS

A mis padres:

*Luisa Concepción Pérez Soria,
Carlos Morales Salinas.*

Y hermanos:

Guadalupe, Pilar Guadalupe, Rosa Isela y Carlos

Por su apoyo brindado en cada momento de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Al Instituto Politécnico Nacional por haberme brindado las facilidades para la realización de este trabajo.

A la COFAA (Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional) por otorgarme la beca PIFI (Programa Institucional de Formación de Investigadores).

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo otorgado durante los estudios de posgrado a través del proyecto de investigación "Implementación de la Postinversa de Volterra por medio de Ecuaciones Lineales Asociadas a un sistema no lineal analógico similar a los encontrados en el proceso de Aprovechamiento de los Recursos Naturales".

Un agradecimiento especial para los Doctores Juan Alejandro Vazquez Feijoo y Andrés Pech Pérez por sus enseñanzas, paciencia y consejos brindados durante la elaboración del presente trabajo.

A mis compañeros de generación por su amistad.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	iv
Abstract	v
Índice General	viii
Índice de Tablas	x
Índice de Figura	x
Nomenclatura	xiv
CAPÍTULO 1	1
1.1 INTRODUCCIÓN.....	2
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
1.3 JUSTIFICACIÓN.....	4
1.4 ANTECEDENTES.....	5
1.5 OBJETIVOS.....	8
1.6 HIPOTESIS.....	9
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO	10
2.1 FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA.....	11
2.2 AJUSTE DE CÍRCULO.....	12
2.3 SERIES DE VOLTERRA.....	14
2.4 ECUACIONES LINEALES ASOCIADAS.....	18
2.4.1 ECUACIONES LINEALES ASOCIADAS (ELA's) PARA EL SISTEMA GENERAL NO LINEAL.....	19
2.5 CONTROL DE LAZO ABIERTO POR INVERSA DE VOLTERRA.....	21
2.5.1 LA SERIE INVERSA DE VOLTERRA OBTENIDA DE ELA's.....	25
2.6 MODELO NARMAX	32
2.6.1 VALIDEZ DEL MODELO.....	36
2.6.2 PREDICCIONES UN PASO ADELANTE.....	36
2.6.3 SALIDA DEL MODELO PREDICHO.....	37
2.7 AMPLIFICADOR OPERACIONAL.....	37
2.7.1 AMPLIFICADOR OPERACIONAL IDEAL.....	41
2.7.2 AMPLIFICADOR INVERSOR.....	42
2.7.3 AMPLIFICADOR SUMADOR.....	42
2.7.4 INTEGRADOR.....	43
2.7.5 DERIVADOR.....	44

CAPITULO 3: METODOLOGÍA	46
3.1 DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA ANALÓGICO LINEAL.....	49
3.2 DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA ANALÓGICO NO LINEAL.....	54
3.3 COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA LINEAL SIMULADO CON LA REAL.....	56
3.4 COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA NO LINEAL SIMULADO CON LA REAL.....	58
3.5 IDENTIFICACIÓN Y ASIGNACIÓN DE UN MODELO AL SISTEMA SIMULADO.....	59
3.6 IDENTIFICACIÓN A TRAVÉS DE NARMAX.....	63
3.7 IMPLEMENTACIÓN DE LA POSTINVERSA DE VOLTERRA.....	66
3.8 IMPLEMENTACIÓN DE LA POSTINVERSA DE VOLTERRA AL SISTEMA NO LINEAL A PARTIR DE NARMAX.....	74
DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL Y EQUIPO UTILIZADO.....	77
PROCESADO DE LAS SEÑALES.....	78
 CAPITULO 4: DISCUSIÓN DE RESULTADOS	 79
4.1 DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	80
 CAPITULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	 84
5.1 CONCLUSIONES.....	85
5.2 RECOMENDACIONES	85
 REFERENCIAS.....	 86
ANEXOS	
ANEXO A.....	92
ANEXO B.....	96

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Parámetros básicos del amplificador operacional.

Tabla 2.2. Rangos típicos para parámetros del amplificador operacional.

Tabla 3.1: MSE de las comparaciones del sistema analógico lineal

Tabla 3.2: MSE de las comparaciones del sistema no-lineal

Tabla 3.3: coeficientes del modelo lineal ajustado

Tabla 3.4: MSE del ajuste para el modelo lineal real

Tabla 3.5: Coeficientes del modelo no-lineal ajustado

Tabla 3.6: MSE del ajuste para el modelo no-lineal real

Tabla 3.7: MSE de la inversa de primer orden.

Tabla 3.8: MSE de la inversa de primer orden del modelo propuesto.

Tabla 3.9: MSE de la inversa de tercer orden del sistema no-lineal simulado

Tabla 3.10: MSE de la inversa de tercer orden del sistema no-lineal simulado

Tabla 3.11: MSE de la inversa de tercer orden del sistema no-lineal real.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Función de Respuesta en Frecuencia. Fuente: Autor

Figura 2.2: Círculo de Nyquist. Fuente: Autor.

Figura 2.3: Círculo de Nyquist. Fuente: Autor.

Figura 2.4: Obtención de los parámetros modales. Fuente: Autor.

Figura 2.5: Comparación entre el análisis de pequeña señal y series de Volterra b) representación esquemática de un sistema caracterizado por una serie de Volterra. Fuente: Autor.

Figura 2.6: Sistema no-lineal representado por un grupo de modelos lineales (ELA's) cada uno produciendo un operador de Volterra. Fuente: Vazquez et al, 2005.

Figura 2.7: El sensor es transformado en un elemento de ganancia unitaria cuando es conectado a la serie inversa de Volterra. Fuente: Vazquez et al., 2007.

Figura 2.8: La serie de Volterra inversa se puede considerar que es producida por una serie infinita de subsistemas, cada uno produciendo un operador de Volterra. Fuente: Vazquez et al., 2007.

Figura 2.9: Descomposición esquemática de la ELA inversa de Volterra de tercer orden: (a) los operadores implicados, (b) ELA de tercer orden, (c) la sustitución de la ELA de tercer orden en el operador inverso y (d) la reducción de funciones inversas. Fuente: Vazquez et al., 2007.

Figura 2.10: Amplificador operacional típico. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.11: Alimentación del Amplificador operacional. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.12: Circuito equivalente del amplificador operacional no ideal. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.13: Voltaje de salida del amplificador operacional v_o como función del voltaje de entrada diferencial v_d . Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.14: Modelo del amplificador operacional ideal. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.15: Amplificador inversor. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.16: Amplificador sumador. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.17: Reemplazando la Resistencia de retroalimentación en el amplificador inversor en a) produce un integrador en b). Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 2.18: Amplificador operacional diferencial. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Figura 3.1: Metodología del sistema analógico lineal de segundo orden. Fuente: Autor.

Figura 3.2: Etapas de la Metodología del sistema analógico no-lineal de segundo orden. Fuente: Autor.

Figura 3.3: Integradores en cascada. Fuente: Autor.

Figura 3.4: Diagrama a bloques del sistema lineal. Fuente Autor.

Figura 3.5: Coeficientes del sistema lineal. Fuente: Autor.

Figura 3.6: Circuito del sistema analógico lineal de segundo orden. Fuente: Autor.

Figura 3.7: Circuito analógico lineal de segundo orden simulado en Pspice. Fuente: Autor.

Figura 3.8: Sistema analógico lineal Experimental. Fuente: Autor.

Figura 3.9: No-linealidad. Fuente: Autor.

Figura 3.10: No-linealidad simulada en Pspice. Fuente: Autor.

Figura 3.11: Diagrama a bloques del sistema analógico no-lineal. Fuente: Autor.

Figura 3.12: Sistema analógico no-lineal que representa a un oscilador de Duffing. Fuente Autor.

Figura 3.13: Sistema analógico no-lineal Experimental. Fuente: Autor.

Figura 3.14: Ruido Blanco aplicado al sistema analógico lineal. Fuente: Autor.

Figura 3.15: Salida del sistema analógico lineal. Fuente: Autor.

Figura 3.16: Función de Respuesta en Frecuencia del sistema analógico lineal. Fuente: Autor.

Figura 3.17: Comparación de las FRF. Fuente: Autor.

Figura 3.18: Movilidad del sistema. Fuente: Autor.

Figura 3.19: Comparación de la movilidad propuesta con la identificada. Fuente: Autor.

Figura 3.20: Respuesta del sistema lineal en “-x” la real y “-•” simulada. Fuente: Autor.

Figura 3.21: FRF discreta y FRF real. Fuente: Autor.

Figura 3.22: Respuesta del sistema no-lineal en “-x” la simulada y “-•” real. Fuente: Autor.

Figura 3.23: Ajuste del modelo no-lineal real a 4 rad/s. Fuente: Autor.

Figura 3.24: Ajuste del modelo no-lineal real a 5 rad/s. Fuente: Autor.

Figura 3.25: Diagrama del sistema directo e inverso. Fuente: Autor.

Figura 3.26: Sistema directo e Inverso de primer orden. Fuente: Autor.

Figura 3.27: Entrada y salida del sistema lineal. Fuente: Autor.

Figura 3.28: Entrada del sistema y salida de la Postinversa de Volterra del sistema lineal simulado. Fuente: Autor.

Figura 3.29: Entrada y salida del sistema lineal real. Fuente: Autor.

Figura 3.30: Entrada del sistema (x) y salida de la Postinversa (z) de Volterra del sistema lineal real. Fuente: Autor

Figura 3.31: Entrada (x) del sistema y salida (z) de la Postinversa de Volterra del sistema lineal real propuesto. Fuente: Autor.

Figura 3.32: Entrada (x) del sistema y salida (z) de la Postinversa de Volterra del sistema lineal simulado propuesto. Fuente: Autor.

Figura 3.33: Diagrama de la Postinversa de Volterra. Fuente: Autor.

Figura 3.34: Sistema inverso \mathbf{K}_1 de Primer Orden. Fuente: Autor.

Figura 3.35: Sistema directo de Primer Orden, \mathbf{H}_1 . Fuente: Autor

Figura 3.36: Inversa de Tercer Orden, \mathbf{K}_3 . Fuente: Autor.

Figura 3.37: Entrada y salida del sistema no-lineal simulado. Fuente: Autor.

Figura 3.38: Respuesta de la inversa de Tercer Orden. Fuente: Autor.

Figura 3.39: Entrada y salida del sistema no-lineal real. Fuente: Autor.

Figura 3.40: Respuesta de la inversa de Tercer Orden. Fuente: Autor.

Figura 3.41: Entrada y salida del sistema no-lineal simulado, a 5 rad/s.

Fuente: Autor.

Figura 3.42: Entrada al sistema y salida de la Postinversa de tercer orden discreto del sistema simulado. Fuente: Autor.

Figura 3.43: Señal de entrada en gris, salida en negro del sistema no-lineal real.

Fuente: Autor.

Figura 3.44: Entrada al sistema y salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden discreta. Fuente: Autor.

Figura 3.45: Osciloscopio. Fuente: Autor.

Figura 3.46: Generador de señales y fuente simétrica. Fuente: Autor.

Figura A.1: Sistema lineal directo e inverso. Fuente: Autor.

Figura A.2: Inversa de Volterra de segundo orden. Fuente: Autor.

Figura A.3: Eliminación del operador inverso de segundo orden. Fuente: Autor.

Figura A.4: Inversa de Volterra de tercer orden. Fuente: Autor.

Figura A.5: Control de lazo abierto para un sistema no-lineal de tercer orden.

Fuente: Autor.

Figura B.1: Inversa de Primer orden discreta. Fuente: Autor.

Figura B.2: Inversa de Tercer orden discreta. Fuente: Autor.

NOMENCLATURA

$y()$	Salida del sistema
y_n	Operador de Volterra de n-ésimo orden
Y_n	Operador de Volterra en el dominio de la frecuencia
t	Tiempo
h_n	Función respuesta impulso de n-ésimo orden
$\mathbf{H}[\]$	Operador del sistema
$\mathbf{H}\{ \}$	Operador multilineal del sistema
$H_j(\omega, \dots)$	Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) del sistema de j-ésimo
ω	Frecuencia en rad/s
∞	Infinito
m	Masa
c	Coefficiente de amortiguamiento viscoso
k	Rigidez
k_3	Rigidez no-lineal
$K_j(\omega, \dots)$	Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) de la inversa de Volterra de j-ésimo orden
a_j	Coefficiente de la entrada para la j-ésima potencia
w_n	Operador inverso de j-ésimo orden
$\mathbf{W}[\]$	Operador de arreglo inverso
$W_n(\)$	Arreglo del sistema inverso de n-ésimo orden
$x(\)$	Excitación
$\mathbf{K}[\]$	Operador inverso
$z(\)$	Salida del operador inverso
$z_j(\)$	Operador de Volterra inverso de j-ésimo orden
V	Voltaje
i_n	Corriente
R_i	Resistencia de Entrada
R_f	Resistencia retroalimentada
C	Capacitancia
v_o	Voltaje de salida
v_i	Voltaje de entrada
v_d	Voltaje diferencial
μF	Microfaradios
Ω	Ohms
α	Coefficiente del ajuste del sistema para un retraso

β	Coeficiente del ajuste del sistema para dos retrasos
χ	Coeficiente del ajuste del sistema para tres retrasos
δ	Coeficiente del ajuste del sistema para cuatro retrasos
γ	Coeficiente del ajuste del sistema para cinco retrasos
η	Coeficiente del ajuste del sistema para seis retrasos
ζ	Razón de amortiguamiento
A	Amplitud
R	Radio
n_k	Retrasos en la salida
n_i	Retrasos en la entrada
κ	Señal de ruido
e	Ruido no correlacionado
\hat{y}_i	Salida predicha

Capítulo 1

1.1 INTRODUCCIÓN

La gran mayoría de los sistemas encontrados en el mundo real son de naturaleza no-lineal, excepto en un rango limitado de operación, en donde pueden ser considerados lineales. Sin embargo, las no-linealidades que se presentan en los sistemas de ingeniería pueden ocasionar fallas ó disminuir su rendimiento y en algunos casos representa una amenaza para la vida de las personas.

Muchos ejemplos prácticos del comportamiento dinámico no-lineal se reporta en la literatura de ingeniería. En la industria automotriz, el chillido de los frenos es producido por una vibración autoexcitada del freno del rotor relacionado con la variación de fricción entre las almohadillas y el rotor, este un ejemplo del efecto de una no-linealidad no deseada a causa del sonido irritante (Rhee et al., 1989). Muchos automóviles tienen motores viscoelásticos los cuáles muestran un marcado comportamiento no-lineal: dependencia en amplitud, frecuencia y precarga. En un avión, además, de la interacción fluido-estructura no-lineal, las no-linealidades típicas incluyen golpeteo y fricción en las superficies de control así como en las uniones.

En sistemas mecatrónicos, las fuentes de no-linealidad son la fricción en los rodamientos, así como golpeteo y holgura en las uniones de un robot. En ingeniería civil, muchas de las estructuras desmontables, como gradas en los conciertos y eventos deportivos son propensas a no-linealidades como resultado del aflojamiento en las uniones, lo cual crea holgura, fricción. Además, las no-linealidades que se presentan en las estructuras se pueden asociar con fracturas o daños ocasionados por grandes cargas dinámicas como sismos o vientos.

Sin embargo, al intentar linealizar estos sistemas mediante modelos lineales, los resultados ya no son válidos debido a las no-linealidades que se presentan. Además, algunos sistemas con no-linealidades débiles pueden exhibir interesantes fenómenos complejos que un sistema lineal no puede. Estos fenómenos incluyen, saturación, subarmónicos, ciclos límite, interacciones entre modos y caos.

Existen técnicas de análisis y control de sistemas no-lineales, tal como, la inversa de Volterra. Donde el control del lazo abierto se puede llevar a cabo mediante dos estrategias: Compensación para sistemas sensores o Predistorsión para actuadores.

El sistema de Predistorsión se conoce como Preinversa de Volterra y el sistema de Compensación como Postinversa de Volterra.

Por lo tanto, en este trabajo de investigación se pretende lograr el control de lazo abierto mediante la implementación de la Postinversa de Volterra a un sistema analógico lineal y no-lineal de un solo grado de libertad, por lo que se propone lo siguiente:

Se utilizará la ecuación diferencial lineal de segundo orden que modela la dinámica de un sistema lineal así como un sistema no-lineal que representa a un oscilador de Duffing de un grado de libertad. Con estos modelos, se diseñarán los sistemas y se construirán de manera analógica utilizando dispositivos electrónicos llamados amplificadores operacionales.

Una vez diseñados y construidos ambos sistemas, se extraerán los parámetros modales del sistema analógico lineal con el método ajuste de círculo, el sistema no-lineal se representará mediante modelos NARMAX (siglas de Nonlinear Autoregressive Models with eXogenous terms), posteriormente se llevará a cabo el control de lazo abierto con la implementación de la Postinversa de Volterra basada en las ELA's de manera continua en simulink y discreta con NARMAX.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las tecnologías que se desarrollan hoy en día tales como estructuras inteligentes (Worden et al., 2002), utilizan una gran cantidad de sensores que miden continuamente el rendimiento de las estructuras, para detectar y corregir cualquier disfunción (Kerschen et al., 2005) que se presente. Sin embargo, la información adquirida por los sensores puede ser perturbada por cambios de temperatura, así como, por las no-linealidades que se presentan en estos dispositivos debido al envejecimiento y desgaste lo cual limitan su aplicabilidad práctica.

De hecho, en cualquier sistema de ingeniería se busca: disminuir fallas, aumentar el rendimiento y en algunos casos evitar catástrofes, para conseguir lo anterior, es necesario controlar parámetros tales como: presión, temperatura, resistividad, densidad, aceleración, velocidad, humedad, etc. Sin embargo, al intentar controlar tales parámetros, se presentan no-linealidades, ocasionando que los principios básicos que se aplican a un sistema lineal y que constituyen la base de un análisis modal ya no son válidos en presencia de no-linealidades.

Por otro lado, las técnicas que abordan la supresión de la generación de armónicos, como: máxima verosimilitud (Mesiya et al, 1973), estabilización de compensación (Falconer, 1978), pseudo-fallas (Manson et al., 1994) requieren del conocimiento del contenido armónico del sistema. Además, para implementar las técnicas de identificación y control de sistemas no-lineales, es necesario utilizar sistemas experimentales de tipo lineal y no-lineal con parámetros controlables.

Por lo tanto, esta investigación está enfocada al diseño y construcción de un sistema analógico lineal y no-lineal, para implementar la Postinversa de Volterra de manera continua en simulink y discreta con modelos NARMAX.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Un sistema no-lineal puede ser representado en series de Volterra, la cual es una representación no paramétrica en el tiempo, por lo tanto, la supresión de la generación de armónicos con la inversa de Volterra (Frank et al., 1992) y (Lazzarin et al., 1994) es la más apropiada, además, los operadores de Volterra se pueden obtener de manera sencilla usando ecuaciones lineales conocidas como Ecuaciones Lineales Asociadas (ELA's).

Los modelos matemáticos sirven para representar cualquier sistema que se presenta en el mundo real. El uso de modelos matemáticos de estructuras, tiene como propósito llevar a cabo el análisis del comportamiento dinámico, y con ello controlar aspectos importantes de diseño, tales como: máximos desplazamientos aceptables o el resultado de la excitación cercana a la frecuencia natural. Por lo tanto, los sistemas experimentales con parámetros controlados, se pueden diseñar en base al modelo matemático que representa al sistema a analizar y su construcción mediante el uso de dispositivos electrónicos, tales como: resistencias, capacitores, circuitos especiales y amplificadores operacionales.

La presencia de la no-linealidad en los sistemas de ingeniería, se puede eliminar mediante el control de lazo abierto usando la estrategia de compensación, la cual consiste en implementar la inversa de Volterra después del sistema no-lineal.

La inversa de Volterra actúa en el sistema original de dos maneras. En una, elimina la generación de armónicos debido a la no-linealidad continua, directamente restando los operadores generados por el sistema de Volterra inverso de la salida del sistema no-

lineal. Una segunda acción es en la parte lineal del sistema, puesto que, el operador inverso de primer orden es la inversa multiplicativa de la función de transferencia del operador de primer orden directo del sistema, se elimina la inercia del sistema (que se manifiesta como una amplificación de la señal en la salida del sistema) y compensa las pérdidas del sistema (que produce un retraso en el ángulo de fase).

Además, la implementación de la Postinversa de Volterra mediante ELA's se puede utilizar en cualquier sistema de ingeniería, así como en los sistemas que se estudian en las líneas de investigación del área de ingeniería de procesos, ya sea, para la identificación o control de parámetros, tales como: presión, temperatura, resistividad, densidad, aceleración y velocidad para maximizar la eficiencia en el aprovechamiento y conservación de los Recursos Naturales Renovables.

1.4 ANTECEDENTES

La simulación ha sido una parte integral de la ingeniería de control. A principios de 1940, la simulación fue hecha con dispositivos mecánicos. Con el avance de la electrónica llegó la computadora analógica, el cuál fue desarrollado con la ayuda de la lógica digital en la computadora híbrida antes de que la simulación digital tomara lugar.

La historia del control está entrelazada con la historia de la computadora analógica. Muchas de las herramientas, tecnologías y teorías de control descendieron de la computadora analógica y mecánica. Como una herramienta, el Analizador diferencial del Instituto Tecnológico de Massachusetts (Bush y Hazen, 1931) fue más que resolver ecuaciones diferenciales. Fue una herramienta educacional y una piedra de toque para la investigación. Vannevar Bush no sólo germinó las semillas de la simulación analógica y el estudio de los servomecanismos en su laboratorio, sino también alimentó una familia de investigadores recientes en control, incluyendo a Harold Hazen quien acuñó la palabra servo-mecanismo (Hazen, 1934), Gordon Brown (Brown y Campbell, 1948), y Samuel Caldwell (Bush y Caldwell, 1945). La computadora de Bush fue una fuente principal de control y cálculo.

La tecnología del amplificador operacional es ahora un componente indispensable de cada sistema de control, fue originalmente inventado y perfeccionado para la computadora analógica. John Ragazzini inventó el término amplificador operacional y describió el estado del arte electrónico técnica analógica en su artículo de referencia

(Ragazzini et al., 1947). Ragazzini basó sus diseños de circuitos en el trabajo de Clarence Lovell (Lovell, 1947) y George Philbrick (Philbrick, 1948).

Los convertidores electrónicos de analógico a digital, otra tecnología ahora indispensable, fue primero comercializada para la interfaz de computadoras analógicas con máquinas digitales (Zuch, 1977). Estas computadoras híbridas redujeron la brecha, usando técnicas analógicas para simular el vehículo con sus superficies de control y el uso de técnicas digitales para calcular coordenadas de navegación (Truitt, 1964). La teoría del control también tiene una gran deuda con la simulación analógica. Diez años antes Ziegler-Nichols (Ziegler y Nichols, 1942), Philbrick construyeron un simulador analógico interactivo para investigar (y enseñar) el diseño de Controladores proporcional-integral-derivativo (PID) para procesos en la compañía Foxboro (Holst et al., 1982).

En los últimos 40 años, el análisis e identificación de sistemas lineales ha mejorado considerablemente. En pequeñas amplitudes de movimiento, la teoría lineal puede ser exacta para modelar, aunque no siempre es el caso (ej. fricción seca). Aún en sistemas no-lineales débiles pueden exhibir fenómenos extremadamente complejos, lo cual los sistemas lineales no pueden (Caughey, 1963). Una forma de estudiar los sistemas no-lineales fue mediante la aproximación a la linealidad (Iwan, 1973).

Las técnicas en el dominio del tiempo fueron en principio aplicadas ampliamente en Ingeniería de Control. La variante lineal del enfoque basado en modelos ARMA (Auto-regressive Moving Average) ha sido utilizada para propósitos de modelado y predicción (Box y Jenkins, 1970). La linealización de sistemas mediante la síntesis del filtro inverso de Volterra de orden p ha sido considerada en diversos trabajos (Schetzen, 1980), (Biglieri et al., 1988). Uno de los mayores inconvenientes que tiene la aplicación práctica de este método es la identificación de los kernels de la expansión en serie de Volterra del sistema no-lineal. Para solventarlo se han desarrollado alternativas como la expansión en funcionales de Wiener (G-funcionales), que es en una expansión ortogonal para el caso en que la excitación en la entrada sea ruido blanco Gaussiano (Schetzen, 1980).

Una sofisticada herramienta de diagnóstico introducida en (Simon y Tomlinson, 1984), es proporcionada por la transformada de Hilbert, la cual diagnostica la no-linealidad en base a los datos de las funciones de respuesta en frecuencia medida. Se llevaron a cabo numerosos intentos de generalizar un modelo para el caso no-lineal, sin duda el

más versátil y duradero ha sido el NARMAX (ARMA no-lineal con entrada exógena) modelo propuesto por Leontaritis y Billings (Leontaritis y Billings, 1985a, b). Desde la creación del método, se han producido muchas novedades, sobre todo la introducción de un algoritmo de estimación ortogonal (Korenberg et al., 1988), que permite a los parámetros del modelo ser calculados de forma secuencial a fin de que la complejidad del modelo pueda ser controlada.

La primera aplicación importante en el campo de la dinámica estructural ocurrió con el trabajo de Gifford (Gifford, 1989). Propuso extraer los parámetros no-lineales mediante el ajuste de superficies o hipersuperficies para las Funciones de Respuesta en Frecuencia de mayor Orden (HOFRFs). Este trabajo fue ampliado por Storer (Storer, 1991). La distorsión armónica en sistemas no-lineales produce componentes de la respuesta de vibración en otras frecuencias a las frecuencias de excitación, HOFRFs (Storer y Tomlinson, 1993) y espectros de mayor orden tienen la capacidad para detectar la presencia de un efecto no-lineal. Su ventaja es que, además de detectar la no-linealidad, puede proporcionar alguna información cualitativa acerca del comportamiento de la no-linealidad como el tipo. Una dificultad es que no son fáciles de calcular y medir.

La expansión en series de Volterra de un sistema no-lineal, o su caracterización mediante una estructura polinómica, es útil tanto para el modelado como para el diseño de filtros que conectados al sistema no-lineal original lo linealicen. Esta conexión acostumbra a ser en serie (cascada) o en paralelo (Korenberg y Paarmann, 1991), (Mathews, 1991), (Sicuranza, 1992).

En diferentes publicaciones recientes se encuentran trabajos que abordan el diseño y la realización de predistorsionadores para compensar los efectos indeseados en subsistemas no-lineales (Stapleton, y Costescu, 1992a, b), (Ghaderi, 1993). El diseño está basado en encontrar el inverso de orden p , siendo para ello necesario primero identificar el sistema y luego sintetizar su inverso. La mayoría de los trabajos acaban realizando un predistorsionador estático, dada la dificultad que conlleva la puesta en práctica de un diseño dinámico basado en expansión de Volterra. Los grandes problemas son la identificación de los kernels y la posterior síntesis del sistema inverso. Habitualmente, lo que se hace es el estudio del diseño exacto de un sistema inverso de orden p (por consideraciones operativas no más allá del tercer orden), y la comprobación práctica de sus efectos en la cancelación de los términos de orden inferior y su efecto en los de orden superior.

En (Bodson, et al., 1994) se encuentra una aplicación interesante de linealización aplicada a un motor de inducción, de comportamiento claramente no-lineal, en el que no todas las variables de estado del sistema son medibles físicamente. Además, la dinámica es fuertemente variable con la temperatura. Para conseguirlo se plantea una transformación de estado no-lineal (cambio de coordenadas) a partir de sólo medidas de flujo, velocidad y corriente. Además, se añade una realimentación lineal de las variables no-lineales. El resultado final es una relación lineal entre las nuevas variables definidas.

Para realizar controladores no-lineales muchas veces es necesario realimentar las variables de estado del sistema no-lineal. Esto es problemático, y es una de las causas de que el control adaptativo de sistemas no-lineales no esté demasiado desarrollado. En el artículo (Theocharis, et al., 1994) se propone el diseño de observadores de estado no-lineal diseñados mediante redes neuronales.

La caracterización de la no-linealidad es un reto, porque la no-linealidad puede ser causada por diferentes mecanismos. Esto es mostrado en (Malatkar y Nayfeh, 2003) una simple placa en cantilever puede exhibir resonancias internas, combinación de resonancias externas, transferencia de energía entre amplios modos espaciados y caos.

Otro enfoque en el dominio de la frecuencia incluyen identificación del sistema mediante ecuaciones lineales asociadas (Vazquez et al., 2004). Un método más sencillo de modelar el comportamiento de los operadores de Volterra es mediante ecuaciones lineales conocidas como Ecuaciones Lineales Asociadas (ELA's), además pueden ser usadas en el análisis y control de sistemas no-lineales (Vazquez et al., 2005).

Se lleva a cabo el análisis de sistemas invariantes en el tiempo en el dominio de la frecuencia por medio de las funciones de respuesta a la frecuencia asociadas, las cuáles se muestran más fáciles de analizar en un solo gráfico bi-dimensional (Vazquez et al., 2006).

Se observó en estructuras que inicialmente tenían un comportamiento predominantemente lineal, exhiben no-linealidades cuando son sujetos a daños. La formación de fracturas, es un ejemplo de daño. La detección de la no-linealidad puede estar algunas veces relacionada a la presencia de un daño estructural (Haroon y Adams, 2007).

Se toma ventaja de las ELA's para analizar la composición de la serie preinversa y postinversa de Volterra, con esto se logra eliminar la generación de armónicos de los

sistemas sensor o actuador y compensar las pérdidas del sistema (Vazquez et al., 2007).

1.5 OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL: Implementar la Postinversa de Volterra a un sistema analógico no-lineal mediante ELA's para realizar el control por lazo abierto.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar un sistema analógico lineal y no-lineal en Pspice
- Simular el sistema analógico lineal y no-lineal en Pspice
- Construir el sistema analógico lineal y no-lineal usando amplificadores operacionales
- Comparar las respuestas de los sistemas analógicos simulados con los reales
- Identificar los parámetros modales del sistema analógico lineal simulado usando ruido blanco.
- Implementar la Postinversa de Volterra mediante ELA's a los sistemas analógicos de manera continua en simulink de Matlab.
- Implementar la Postinversa de Volterra mediante ELA's al sistema analógico no-lineal de manera discreta con modelos NARMAX.

1.6 HIPÓTESIS

El control de lazo abierto por medio de la inversa de Volterra construida mediante Ecuaciones Lineales Asociadas permite tener un rango útil de señal mayor con un ancho de banda más grande.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Puentes, alas de aviones, herramientas de máquinas, así como toda estructura física tienen frecuencias naturales. Una frecuencia natural es la frecuencia en la cual la estructura oscila al ser alterado desde su posición de reposo y después se deja vibrar libremente. Todas las estructuras tienen al menos una frecuencia natural o múltiples frecuencias naturales.

La resonancia se produce cuando la fuerza aplicada o la frecuencia de excitación coinciden con una frecuencia natural estructural. Durante la vibración resonante, la respuesta de desplazamiento puede aumentar hasta que la estructura experimente flexión, fatiga, o alguna otra falla mecánica.

Las frecuencias naturales se pueden calcular a través de métodos de análisis durante la etapa de diseño. Las frecuencias también se pueden medir después de que la estructura o el prototipo se construye. Cada frecuencia natural tiene una razón de amortiguamiento correspondiente. Los valores de amortiguación son valores empíricos que se deben obtener por medición.

Hay muchas herramientas disponibles para realizar análisis de vibraciones y pruebas. La función de respuesta en frecuencia es una herramienta en particular. Una función de respuesta en frecuencia (FRF) es una función de transferencia, expresada en el dominio de la frecuencia. Las Funciones de Respuesta en Frecuencia son funciones complejas, con componentes real e imaginario. También pueden ser representados en términos de magnitud y fase.

Una función de respuesta en frecuencia se puede formar a partir de cualquiera de los datos medidos o funciones analíticas. Una función de respuesta en frecuencia expresa la respuesta estructural a una fuerza aplicada como una función de la frecuencia. La respuesta puede darse en términos de desplazamiento, velocidad o aceleración. Además, el parámetro de respuesta puede aparecer en el numerador o denominador de la función de transferencia. Un modelo de la Función de Respuesta en Frecuencia para un sistema lineal se muestra en la figura 2.1.



Figura 2.1: Función de Respuesta en Frecuencia. Fuente: Autor

$F(\omega)$ es la fuerza de entrada como una función de la frecuencia angular ω . $H(\omega)$ es la función de transferencia. $X(\omega)$ es la función de respuesta desplazamiento. Cada función es una función compleja, que también se puede representar en términos de magnitud y fase. Cada función es, una función espectral.

La relación de la Figura 2.1 se puede representar por la siguiente ecuación

$$X(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (2.1)$$

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (2.2)$$

La estimación de la función de respuesta en frecuencia depende de la transformación de los datos del dominio del tiempo a la frecuencia. La transformada de Fourier (Hsu, 1998) se utiliza para este cálculo, sin embargo, la definición de la integral de Fourier requiere del tiempo desde menos infinito a más infinito. Puesto que, esto no es posible experimentalmente, el cálculo se realiza de forma digital mediante la transformada rápida de Fourier (FFT) la cual se basa en un tiempo limitado. De esta manera las ventajas teóricas de la transformada de Fourier se pueden implementar en un sistema de cálculo digital.

2.2. AJUSTE DE CÍRCULO

El método de ajuste círculo, es el método de análisis modal más utilizado para sistemas con un grado de libertad. Se basa en la circularidad de la gráfica de Nyquist, la cual se obtiene a partir de la movilidad por medio de $M(\omega) = (i\omega)H(\omega)$.

En forma fasorial, la velocidad y la aceleración están dadas por:

$$x(t) = |H(\omega)| e^{i\omega t} \rightarrow H(\omega) : \text{Receptancia} \quad (2.3)$$

$$\dot{x}(t) = i\omega |H(\omega)| e^{i\omega t} \rightarrow M(\omega) = (i\omega)H(\omega) : \text{Movilidad} \quad (2.4)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 |H(\omega)| e^{i\omega t} \rightarrow (i\omega)^2 H(\omega) : \text{Inertancia} \quad (2.5)$$

Utilizando un círculo, se hace un ajuste con un círculo geométrico que más se adecue:

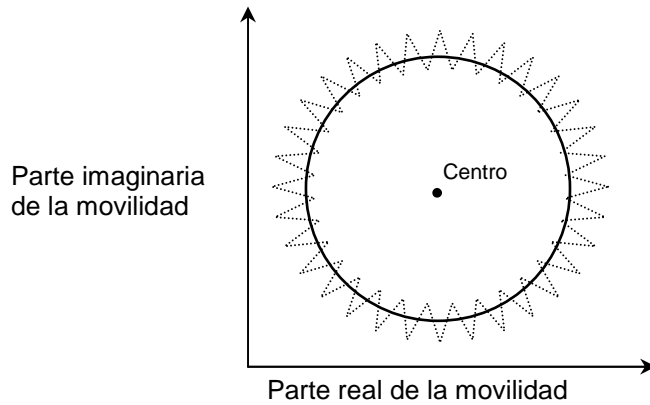


Figura 2.2: Círculo de Nyquist. Fuente: Autor.

A partir del círculo ajustado en la figura 2.2, los parámetros modales se obtienen de la siguiente manera:

El primer paso consisten en trazar un diámetro que pase sobre el origen, a partir de ahí se trazan otros dos diámetros que sustenten el mismo ángulo respecto al primer diámetro.

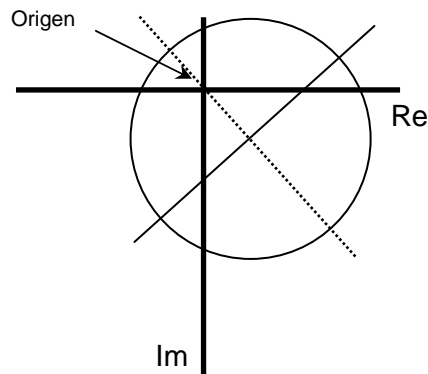


Figura 2.3: Ajuste de Círculo. Fuente: Autor.

La frecuencia natural ω_n se obtiene del punto de cruce del círculo con los diámetros auxiliares (punto A y punto B como se muestra en la figura 2.4). Se buscan las frecuencias correspondientes a estos puntos y la frecuencia natural (ω_n) se calcula como:

$$\omega_n = \sqrt{\omega_A \omega_B} \quad (2.6)$$

En caso de que el ángulo sustentado sea cero, se obtendrá el punto C y por tanto, la frecuencia natural se puede obtener como:

$$\omega_n = \sqrt{\omega_C \omega_C} \quad (2.7)$$

Es decir:

$$\omega_n = \omega_C \quad (2.8)$$

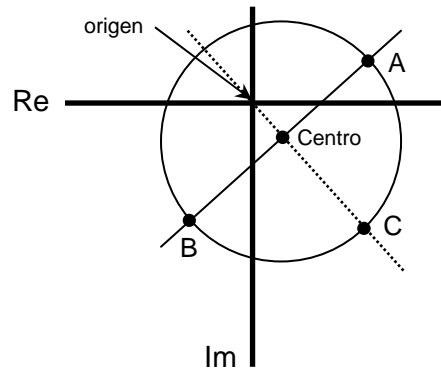


Figura 2.4: Obtención de los parámetros modales. Fuente: Autor.

Con los puntos A y B el amortiguamiento se obtiene como:

$$\zeta = \frac{\omega_A - \omega_B}{2\omega_n} \quad (2.9)$$

El parámetro A (constante modal) se calcula a partir del radio como:

$$A = 4\zeta\omega_n R \quad (2.10)$$

2.3. SERIES DE VOLTERRA

La Serie de Volterra describe la salida de un sistema no-lineal como la suma de las respuestas de los operadores de primer orden, segundo orden, tercer orden y así sucesivamente (Schetzen, 1980). Para sistemas invariantes en el tiempo con no-linealidades, el proceso de entrada-salida puede ser expresado como una serie infinita.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (2.11)$$

ó

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_n[x(t)] \quad (2.12)$$

De donde:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (2.13)$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (2.14)$$

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \quad (2.15)$$

Las funciones $h_1(\tau_1)$, $h_2(\tau_1, \tau_2)$, $h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$,... $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$,...son generalizaciones de la función respuesta impulso lineal son usualmente nombradas como kernels de Volterra. Se puede pensar en la serie como una generalización de las series de Taylor desde funciones a funcionales. La expresión (2.13) representa simplemente la truncación de menor orden en la cual, la señal se considera que es suficientemente pequeña para que la salida pueda ser considerada como una función lineal de la entrada, la expresión (2.14) y (2.15) modelan la no-linealidad.

Una representación general del sistema caracterizado por series de Volterra se presenta en la Figura 2.5a, donde H1, H2 y H3 son los kernels de Volterra de primero, segundo y tercer orden. Cabe señalar que H1 representa una linealización del sistema de pequeña señal.

El ajuste de una línea recta (para análisis de pequeña señal) y un polinomio (para el análisis de Volterra) se muestra en la Figura 2.5b.

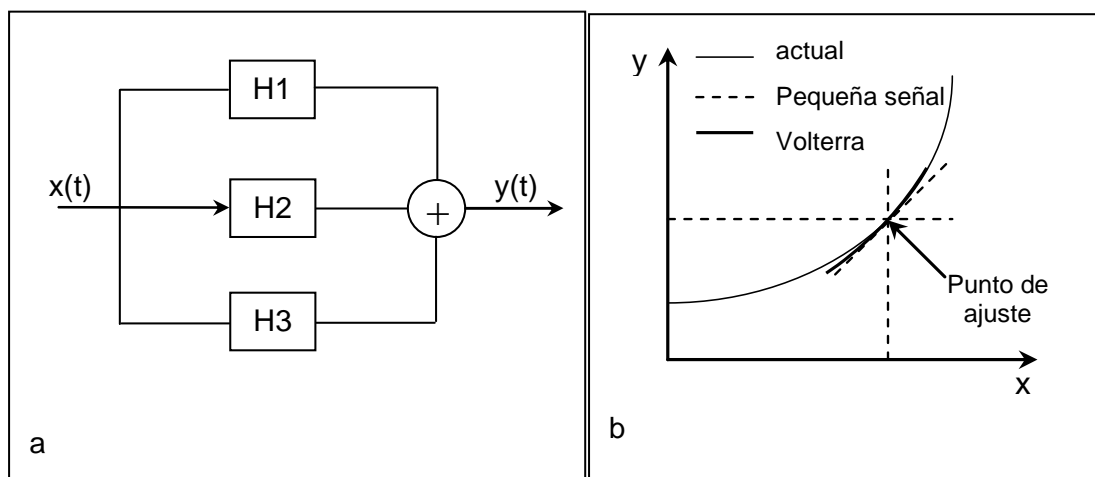


Figura 2.5. Comparación entre el análisis de pequeña señal y series de Volterra b) representación esquemática de un sistema caracterizado por una serie de Volterra. Fuente: Autor.

Note que estos kernels no son forzados a ser simétricos en sus argumentos. De hecho, cualquier kernel no simétrico puede ser remplazado por una versión simétrica, así que $h_2(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_2, \tau_1)$ etc. es una prueba formal bastante sencilla; considere la expresión para $y_2(t)$:

$$y_2(t) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int h_2(\tau_1, \tau_2) \Pi_2(\tau_1, \tau_2; t) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.16)$$

Con la recién definida

$$\Pi_2(\tau_1, \tau_2; t) = x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) \quad (2.17)$$

Y note que Π_2 es manifiestamente simétrico en su argumento τ_1 y τ_2 .

Suponiendo que h_2 no tiene simetría particular, todavía tiene una descomposición canónica en partes simétrica y antisimétrica.

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = h_2^{sym}(\tau_1, \tau_2) + h_2^{asym}(\tau_1, \tau_2) \quad (2.18)$$

De donde:

$$h_2^{sym}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}(h_2(\tau_1, \tau_2) + h_2(\tau_2, \tau_1)) \quad (2.19)$$

$$h_2^{asym}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}(h_2(\tau_1, \tau_2) - h_2(\tau_2, \tau_1)) \quad (2.20)$$

Ahora, considere la contribución para $y_2(t)$ del componente asimétrico del kernel:

$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int h_2^{asym}(\tau_1, \tau_2) \Pi_2(\tau_1, \tau_2; t) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.21)$$

Cualquier (infinitesimal) contribución a esta suma, por ejemplo en $\tau_1 = \nu$, $\tau_2 = \omega$ cancelará con la correspondiente contribución en $\tau_2 = \nu$, $\tau_1 = \omega$, como:

$$h_2^{asym}(\nu, \omega) \Pi_2(\nu, \omega; t) = -h_2^{asym}(\omega, \nu) \Pi_2(\omega, \nu; t) \quad (2.22)$$

Y la integral general se desvanecerá. Esto es simplemente debido a la contracción o la suma correspondiente a la cantidad simétrica $\Pi_2(\tau_1, \tau_2; t)$. Porque h_2^{asym} no hace ninguna contribución a la cantidad $y_2(t)$ éste puede ser ignorado y los kernels h_2 se puede suponer que sean simétricos. Esencialmente, el h_2 recoge todas las simetrías de la cantidad Π_2 . Este argumento puede ser generalizado para el kernel $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$. En general, para un kernel simétrico, h_2^{sym} se obtiene sumando todas las permutaciones posibles del argumento, ponderado por un factor inverso que cuenta los términos.

Existe una doble representación en el dominio de la frecuencia para sistemas no-lineales. Las transformaciones FRFs de mayor orden o kernel de Volterra $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$, $n = 1, \dots, \infty$ se definen como la transformada de Fourier multi-dimensional de los kernels, por ejemplo:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \times e^{-i(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} \quad (2.23)$$

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) d\omega_1 \dots d\omega_n \times e^{+i(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} \quad (2.24)$$

Es una cuestión simple demostrar que la simetría de los kernels implica simetría del kernel transformado así, por ejemplo: $H_2(\omega_1, \omega_2) = H_2(\omega_2, \omega_1)$.

De manera directa se obtiene la doble representación en el dominio de la frecuencia de la expresión (2.11)

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + Y_3(\omega) + \dots \quad (2.25)$$

De donde:

$$Y_1(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) \quad (2.26)$$

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\omega_1, \omega - \omega_1) X(\omega_1) X(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (2.27)$$

$$Y_3(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \times X(\omega_1) X(\omega_2) X(\omega - \omega_1 - \omega_2) \quad (2.28)$$

El problema fundamental asociado con las series de Volterra es la determinación de ya sea los kernels o el kernel transformado. Esto debe ser hecho analíticamente si las ecuaciones de movimiento son conocidas o numéricamente si las series de tiempo son dadas para los procesos de entrada y salida.

2.4 ECUACIONES LINEALES ASOCIADAS

De la serie de Volterra

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) d\tau_1 \dots x(t - \tau_n) \dots d\tau_n \quad (2.29)$$

De la ecuación (2.29) se obtiene

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau h_1(t - \tau) f(y_1(\tau), \dots, y_{n-1}(\tau)). \quad (2.30)$$

La existencia de tal representación será demostrada con referencia a un número simple de sistemas no-lineales de un grado de libertad. La función (2.30) está asociada con una ecuación diferencial.

$$Ly_n = f(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad (2.31)$$

Donde L es un operador diferencial lineal (el cual tiene h_1 como función de Green) a este conjunto de ecuaciones serán llamadas Ecuaciones Lineales Asociadas (ELA's) (Fig. 2.6). Note que L es independiente de n.

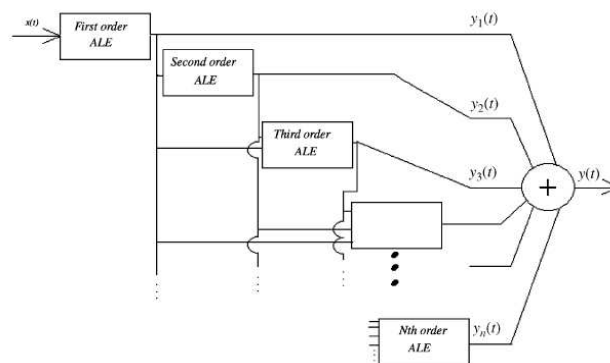


Figura 2.6. Sistema no-lineal representado por un grupo de modelos lineales (ELA's) cada uno produciendo un operador de Volterra. Fuente: Vazquez et al, 2005.

2.4.1. ECUACIONES LINEALES ASOCIADAS PARA EL SISTEMA GENERAL NO LINEAL

Por simplicidad sólo la rigidez de la no-linealidad se incluye aquí. El polinomio no-lineal de amortiguamiento no presenta dificultades para su formalismo. Consideremos el caso de un sistema no-lineal Entrada - Salida Simple (SISO) representado por una ecuación diferencial de segundo orden.

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + \sum_{j=1}^N k_j y^j(t) = \sum_{j=2}^M a_j x^j(t) \quad (2.32)$$

Aquí N y M son el número de términos de cada clase presente en el modelo. También se puede añadir el término $\sum_{n=1}^m g_n(x)$. La rigidez no polinomial general puede ser acomodada a una expansión de Taylor y dejando que $N \rightarrow \infty$: Dejando todos los elementos lineales en el lado izquierdo, se encuentra:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = \sum_{j=1}^M a_j x^j(t) - \sum_{j=2}^N k_j y^j(t) \quad (2.33)$$

Dado que el sistema cuenta con una representación de Volterra, se hace la siguiente sustitución,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (2.34)$$

Entonces la ecuación (2.33) se convierte en,

$$m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{y}_n(t) + c \sum_{n=1}^{\infty} \dot{y}_n(t) + k \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^M a_n x^n(t) - \sum_{n=2}^N k_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \right)^n \quad (2.35)$$

El segundo término del lado izquierdo se pueden desarrollar en potencias y entonces se tiene una serie de términos lineales en los parámetros. Es posible reordenar la suma, agrupando por el grado de los términos:

$$\begin{aligned}
& m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{y}_i(t) + c \sum_{n=1}^{\infty} \dot{y}_i(t) + k \sum_{n=1}^{\infty} y_i(t) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n x^n(t) - \sum_{l=2}^n k_l \sum_{j_1=1}^{n-l+1} \dots \sum_{j_{l-1}=1}^{n-l+j_1-\dots-j_{l-1}} \dots \sum_{j_l=0}^{n-j_1-\dots-j_{l-1}} y_{j_1}(t) y_{j_2}(t) \dots y_{j_l}(t) \right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

En la ecuación (2.36) todos los elementos del lado izquierdo son lineales. Como todos los términos del lado derecho de la ecuación (2.36) comprenden una suma de términos, por el principio de superposición es posible tomar un solo término, o un grupo de ellos, para ver cómo responde el sistema. Entonces, todas las respuestas pueden sumarse para obtener la respuesta total. Así, se puede seleccionar los términos en función del grado producido por cada término. Aplicando este proceso a la ecuación (2.36), las primeras tres ELA's obtenidas son:

$$m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = a_1 x(t), \tag{2.37}$$

$$m\ddot{y}_2(t) + c\dot{y}_2(t) + ky_2(t) = a_2 x^2(t) + k_2 y_1^2, \tag{2.38}$$

$$m\ddot{y}_3(t) + c\dot{y}_3(t) + ky_3(t) = a_3 x^3(t) + k_2 y_1 y_2 + k_3 y_1^3. \tag{2.39}$$

Si el grado específico no se toma en cuenta, la descomposición no es única y se pierde la interpretación de y_n como un operador de Volterra. Por ejemplo, se podría tomar:

$$m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = a_2 x^2(t), \tag{2.40}$$

Pero luego el lado derecho de la ecuación (2.41) no es homogéneo. Tenga en cuenta que es suficiente tener sólo un término no-lineal en la salida para generar un número infinito de ELA's y así una serie de Volterra infinita (Vazquez et al., 2005). La forma general de la ELA es así:

$$m\ddot{y}_2(t) + c\dot{y}_2(t) + ky_2(t) = a_1 x(t) - k_2 y_1^3, \tag{2.41}$$

Una vez más, el argumento no depende formalmente de asumir la pequeñez de cualquier coeficiente de polinomio determinado, pero supone una expansión de la forma indicada en la ecuación (2.34).

$$Ly_i = a_i x^i + f_i(y_1, \dots, y_{i-1}). \tag{2.42}$$

2.5 CONTROL DE LAZO ABIERTO POR INVERSA DE VOLTERRA

Los sistemas en los cuales la salida no afecta la acción de control se denominan *sistemas de control de lazo abierto*, es decir, en estos sistemas, no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada de referencia. En la práctica, el control de lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas (Ogata, 1998).

El control de los sistemas estructurales involucra el sensado del rendimiento de la estructura y una acción que corrige cualquier desviación del comportamiento requerido. La acción puede variar desde la supresión de vibraciones hasta la auto-reparación de los daños en las estructuras para compensar el posicionamiento y así sucesivamente. Los últimos años han sido testigos de la aparición de estructuras inteligentes, en las que el sistema está diseñado para ser capaz de detectar y corregir la disfunción del sistema, crea la necesidad de un método preciso de detección y accionamiento. Para un monitoreo de vibraciones confiable de estructuras, es necesario tener información exacta del sensor. Sin embargo, una limitación grave es que muchos de los efectos físicos utilizados para ambas funciones presentan un comportamiento no-lineal, lo que limita la aplicabilidad práctica.

La implementación de la inversa de Volterra basada en las Ecuaciones Lineales Asociadas (Vazquez et al., 2005) sustituye para un sistema una serie de modelos lineales, por lo que cada ecuación produce un operador de Volterra particular, se reduce la complejidad del proceso de extracción inverso.

El control de lazo abierto hace uso de sensores y actuadores que pueden ser considerados como subsistemas. Desafortunadamente el proceso de actuado y sensado introducen no-linealidades por si mismos. Si uno intenta linealizar estos subsistemas, debe ser por control de lazo abierto, en el caso del control retroalimentado a un sistema sensor, significa que el sensor necesitará otros sensores para monitorear sus propias funciones.

Si se obtiene un buen modelo de estos subsistemas, se construye un sistema de compensación (Postinversa de Volterra) para sensores. El sistema sensor se transforma a un elemento de ganancia unitaria, la Figura 2.7 muestra el esquema de esta estrategia.

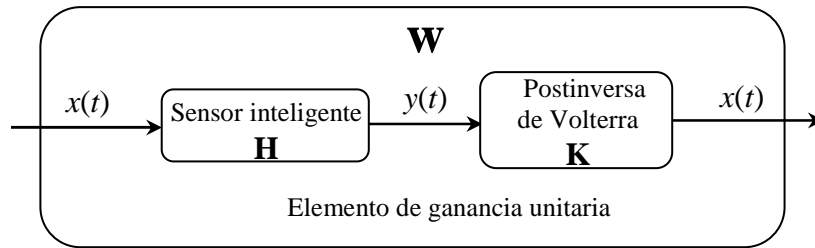


Figura 2.7. El sensor es transformado en un elemento de ganancia unitaria cuando es conectado a la serie inversa de Volterra. Fuente: Vazquez et al., 2007.

Los detalles sobre la teoría de Volterra directa e inversa de Volterra se puede encontrar en Schetzen (1980). Los operadores inversos de Volterra pueden considerar la salida de un sistema \mathbf{K} conectado en serie con el sistema de control \mathbf{H} (Fig. 2.7). El sistema general se identifica como \mathbf{W} . Cuando el sistema \mathbf{H} está operando solo, el proceso es $(x(t) \rightarrow y(t))$ y se representa como $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$. Los corchetes son los medios convencionales para representar a un operador general \mathbf{H} que actúe sobre la señal $x(t)$. Aquí $x(t)$ es la propiedad física a medir y $y(t)$ es lo que el sistema sensor \mathbf{H} mide.

Cualquier sistema \mathbf{H} debe considerarse como $\mathbf{H} = \sum \mathbf{H}_i$, donde \mathbf{H}_i es un operador de Volterra. Cada operador de Volterra es un operador multi-lineal. (Se le llama a un operador multi-lineal cuando el operador es lineal con respecto a cualquiera de sus argumentos cuando todos los otros argumentos se mantienen constantes.) Los subsistemas Volterra considerados como operadores multi-lineales se denotan por:

$$\mathbf{H}_n \{ \underbrace{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)}_{n\text{-número de argumentos}} \}$$

Para los sensores se utiliza la estrategia de compensación (Fig. 2.7). La salida del sistema sensores $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es la entrada en el postinversa del sistema Volterra \mathbf{K} en el proceso $y(t) \rightarrow z(t)$ representado como $z(t) = \mathbf{K}[y(t)]$. El sistema global es un proceso $x(t) \rightarrow z(t) = w(t)$, es decir, $w(t) = \mathbf{W}[x(t)] = \mathbf{K} \circ \mathbf{H}[x(t)]$. El sistema \mathbf{K} está diseñado de tal manera $w(t) = x(t)$.

El sistema \mathbf{H} se supone que tiene una representación de Volterra convergente y por lo tanto la salida del sistema es una suma (posiblemente infinita) de los operadores $y_j = \mathbf{H}_j[x(t)]$ o en forma expandida $y_j(t) = \mathbf{H}_j\{x(t), x(t), \dots, x(t)\}$ con el argumento que

contiene un número j de elementos. La inversa de Volterra también es una suma (posiblemente también infinita) de los operadores de la forma $z_j(t) = \mathbf{K}_j[y(t)]$.

La inversa de Volterra para el proceso $y(t) \rightarrow x(t)$ se obtiene en dos pasos. El primer paso es tratar de extraer la señal de entrada $x(t)$ directamente produciendo el operador inverso de primer orden \mathbf{K}_1 del primer operador de Volterra \mathbf{H}_1 . Luego $\mathbf{K}_1 = \mathbf{H}_1^{-1}$, esto no es difícil de hacer en el dominio de la frecuencia como se muestra a continuación. Para el segundo paso es necesario considerar lo siguiente: de la figura (2.8), la entrada en el operador de Volterra de primer orden \mathbf{K}_1 , no obstante, no es sólo $y_1(t)$, sino toda la señal $y(t)$ con todos los operadores no-lineales en el mismo. La salida real de la Postinversa de Volterra de primer orden es entonces:

$$z_1(t) = \mathbf{K}_1[y_1(t)] + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{K}_1[y_n(t)] \quad (2.43)$$

ó

$$z_1(t) = x(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{K}_1[y_n(t)]. \quad (2.44)$$

El primer término es el resultado deseado, el resto de los términos tienen que ser eliminados por el resto de los operadores inversos de Volterra (\mathbf{K}_n con $n > 1$). Los operadores \mathbf{K}_n son construidos de tal manera que produzcan las salidas $z_n(t)$ que cancelen aditivamente cada término de la suma en la ecuación (2.44).

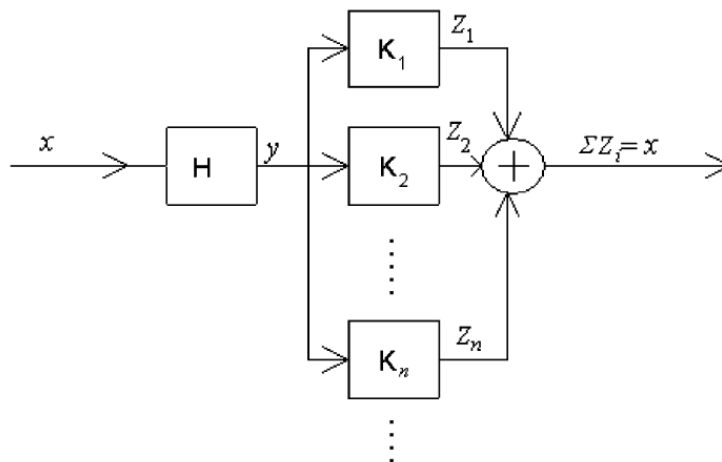


Figura 2.8. La serie de Volterra inversa se puede considerar que es producida por una serie infinita de subsistemas, cada uno produciendo un operador de Volterra. Fuente: Vazquez et al., 2007.

La salida total también tiene representación Volterra como

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) = x(t). \quad (2.45)$$

Como la salida del operador Inverso de Volterra de primer orden debe ser $x(t)$, todos los demás operadores tienen que dar $w_n(t) = 0$. En (Schetzen, 1980), se demuestra desde la preinversa de Volterra que a fin de cancelar todos los términos de la suma en la ecuación 2.44, todos los operadores globales $w_n(t)$ deben ser obtenidos a partir de:

$$w_n(t) = \sum_{m=1}^n \sum_{i_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{i_a=1}^{n-m-\sum_{b=1}^{a-1} i_b + a} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n-m-\sum_{b=1}^{m-2} i_b + (m-1)} \mathbf{H}_m\{\mathbf{K}_{i_1}[x(t)], \dots, \mathbf{K}_{i_a}[x(t)], \dots, \mathbf{K}_{i_{m-1}}[x(t)], \mathbf{K}_{im}[x(t)]\} \quad (2.46)$$

where $i_m = n - \sum_{b=1}^{m-1} i_b$

Esta es una expresión más compleja y la complejidad de los términos individuales de la inversa crece muy rápidamente con el orden no-lineal, por ejemplo, para el operador del sistema total de cuarto orden $\omega_4(t) = 0$, la ecuación es:

$$\begin{aligned} w_4(t) = & \mathbf{H}_1\{\mathbf{K}_4[x(t)]\} + \mathbf{H}_2\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_3[x(t)]\} + \mathbf{H}_2\{\mathbf{K}_2[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)]\} \\ & + \mathbf{H}_1\{\mathbf{K}_3[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\} + \mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)]\} + \mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_1[x(t)], \\ & \mathbf{K}_2[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\} + \mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_2[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\} + \mathbf{H}_4\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \\ & \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\} = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Multiplicando por \mathbf{K}_1 , la función inversa de \mathbf{H}_1 , se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_4[x(t)] = & -\mathbf{K}_1[\mathbf{H}_2\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_3[x(t)]\}] - \mathbf{K}_1[\mathbf{H}_2\{\mathbf{K}_2[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)]\}] - \\ & \mathbf{K}_1[\mathbf{H}_2\{\mathbf{K}_3[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\}] - \mathbf{K}_1[\mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)]\}] \\ & - \mathbf{K}_1[\mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\}] - \mathbf{K}_1[\mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_2[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\}] \\ & - \mathbf{K}_1[\mathbf{H}_4\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)]\}] = 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

Que especifica, \mathbf{K}_4 en el supuesto de que los términos anteriores de la serie: \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 y \mathbf{K}_3 ya se han establecido. De la misma manera, de la ecuación (2.46) es posible obtener la siguiente fórmula general para \mathbf{K}_n ,

$$\mathbf{K}_n[x(t)] = - \sum_{m=2}^n \sum_{i_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{i_a=1}^{n-m-\sum_{b=1}^{a-1} i_b + a} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n-m-\sum_{b=1}^{m-2} i_b + (m-1)} \mathbf{K}_1 [\mathbf{H}_m\{\mathbf{K}_{i_1}[x(t)], \dots, \mathbf{K}_{i_a}[x(t)], \dots, \mathbf{K}_{i_{m-1}}[x(t)],$$

$$\mathbf{K}_{im}[x(t)] \quad \text{where } i_m = n - \sum_{b=1}^{m-1} i_b \quad \}. \quad (2.49)$$

2.5.1 LA SERIE INVERSA DE VOLTERRA OBTENIDA DE ELA's

El análisis de la figura 2.7, la serie $y(t) = \mathbf{H}[x(t)]$ es la serie directa de Volterra para el proceso de $x(t) \rightarrow y(t)$. La serie inversa correspondiente tendrá la propiedad de $x(t) = \mathbf{K}[y(t)]$ así que \mathbf{K} o \mathbf{H} es el operador identidad o $x(t) = \mathbf{K}[\mathbf{H}[x(t)]]$. La inversa se puede construir basada en las ELA's de los operadores directos, a fin de obtener un grupo de ELA's inversos para los operadores inversos de Volterra. Una descripción detallada de las ELA's se puede encontrar en (Vazquez et al., 2007).

En el caso más general, tanto la serie directa como inversa son infinitas. Por lo tanto, para la mayoría de los casos la inversa de Volterra tiene que ser truncada a un orden armónico determinado. Este hecho implica que la eliminación de armónicos perfecto no se puede hacer para todos los casos. Para el caso general, una serie de Volterra Inversa de orden enésima se define como

$$W_n(t) = x(t) + \sum_{j=n+1}^{\infty} w_j(t) \approx x(t). \quad (2.50)$$

Si la respuesta del sistema se encuentra dentro del radio de convergencia de la serie de Volterra, entonces, el mayor orden del menor será la respuesta. Esto significa que es posible encontrar un orden armónico n para que componentes de mayor orden sean insignificantes, y por lo tanto una serie inversa de Volterra de orden n pueda ser construida.

Puesto que, el sistema Postinverso puede ser utilizado como Preinversa sin ningún cambio. Al igual que en la serie directa, los operadores inversos de Volterra hasta orden n pueden considerarse que se obtuvieron de un grupo de subsistemas lineales n (Figura 2.8) con la siguiente salida:

$$z(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t) \quad (2.51)$$

Para el caso Postinverso cada operador actúa sobre $y(t)$

$$z_i(t) = \mathbf{K}_i[y(t)] \quad (2.52)$$

El operador Postinversa de primer orden es:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{H}_1^{-1} \quad (2.53)$$

Un ejemplo concreto ayuda a entender el proceso. Considere el siguiente modelo de oscilador Duffing:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + k_3y(t)^3 = x(t). \quad (2.54)$$

De acuerdo con la metodología presentada en (Vazquez et al., 2007), las Ecuaciones Lineales Asociadas de menor orden diferente de cero son:

$$m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = x(t) \quad (2.55)$$

y

$$m\ddot{y}_3(t) + c\dot{y}_3(t) + ky_3(t) = -k_3y_1^3, \quad (2.56)$$

De donde, $y_j(t)$ es la salida de la ELA de orden correspondiente y es idéntico al operador de Volterra de orden j . No hay operadores de Volterra de orden par para este ejemplo en particular (ver Vazquez et al., 2007). Es muy sencillo de obtener el operador inverso en el dominio de la frecuencia, como la función inversa es la inversa multiplicativa de la FRF. Hay métodos muy bien establecidos para obtener la FRF de un sistema lineal o no-lineal, por ejemplo, el algoritmo de prueba armónica (Worden et al., 1997). La principal ventaja del método es que es posible obtener la HFRF de cualquier orden. Cuando este método se aplica a las ecuaciones (2.55) y (2.56), se obtiene

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k}, \quad (2.57)$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_3H_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3) \quad (2.58)$$

Para la FRF de primer orden y la HFRF de tercer orden, respectivamente. La FRF de la inversa de Volterra de la ALE de primer orden se obtiene a partir de la inversa multiplicativa de $\mathbf{H}_1(\omega)$.

$$K_1(\omega) = H_1^{-1}(\omega) = -m\omega^2 + ic\omega + k. \quad (2.59)$$

La ecuación (2.59), se regresa al dominio del tiempo por el proceso inverso de prueba armónica, la inversa de $y_1(t)$, es decir, $z_1(t)$ es:

$$z_1(t) = \mathbf{K}_1[y] = m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t). \quad (2.60)$$

La ecuación (2.60) representa la Postinversa de Volterra de primer orden. Esta ecuación puede ser utilizado como una Preinversa con sólo cambiar el argumento de entrada a $x(t)$. En esta sección, sólo se considera la Postinversa. Cuando la entrada en \mathbf{K}_1 es $y_1(t)$ (desde el sistema \mathbf{H}_1).

$$\mathbf{K}_1[y_1] = m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = x(t), \quad (2.61)$$

Es lo que se requiere, sin embargo, en la práctica la entrada es toda la señal $y(t)$ y la salida actual se obtiene comparando las ecuaciones (2.54) y (2.60):

$$z_1(t) = \mathbf{K}_1[y] = m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = x - k_3y^3(t) \quad (2.62)$$

ó

$$z_1(t) = x - k_3y^3(t). \quad (2.63)$$

Esta es la salida deseada más un término espurio de mayor orden. Las Ecuaciones Lineales Asociadas de mayor orden son diseñadas con el fin de eliminar el término no-lineal en la ecuación (2.63). De hecho, este término es una suma infinita (teniendo en cuenta que se compone de sus operadores de Volterra), es decir:

$$k_3y^3(t) = k_3\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i\right)^3 = k_3y_1^3(t) + 3k_3y_1^2y_3(t) + 3k_3y_1y_2^2(t) + \dots \quad (2.64)$$

En este sistema en particular la ecuación (2.54), los operadores impares son diferentes de cero. Por lo tanto, como no hay componente de segundo orden o incluso componente de orden par en esta suma, no hay necesidad de buscar un operador inverso de Volterra de segundo orden. El operador de Volterra de tercer orden tiene que eliminar el término no-lineal aditivo en la ecuación (2.64). De acuerdo a la ecuación (2.49)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_3[x(t)] &= -\mathbf{K}_1[\mathbf{H}_2\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_2[x(t)]\}] \\ &\quad -\mathbf{K}_1[\mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\}]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Como no hay componentes de segundo orden, la ecuación (2.65) se reduce a:

$$\mathbf{K}_3[x(t)] = -\mathbf{K}_1[\mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)], \mathbf{K}_1[x(t)]\}]. \quad (2.66)$$

Esto para una Postinversa se lee:

$$\mathbf{K}_3[y(t)] = -\mathbf{K}_1[\mathbf{H}_3\{\mathbf{K}_1[y(t)], \mathbf{K}_1[y(t)], \mathbf{K}_1[y(t)]\}]. \quad (2.67)$$

Esta ecuación implica la siguiente relación entre los operadores:

$$\mathbf{K}_3 = -\mathbf{K}_1 \circ \mathbf{H}_3 \circ \mathbf{K}_1. \quad (2.68)$$

Esta relación se muestra en forma de diagrama en la Figura 2.9a. El operador directo de tercer orden \mathbf{H}_3 (Ecuación 2.59) se muestra en la Figura 2.9b. Si este último diagrama es incorporado en el diagrama de \mathbf{K}_3 en la Figura 2.9a, se obtiene el diagrama de la Figura 2.9c. La reducción de todas las funciones inversas (Ecuación 2.54), del diagrama de la figura 2.9d se obtiene.

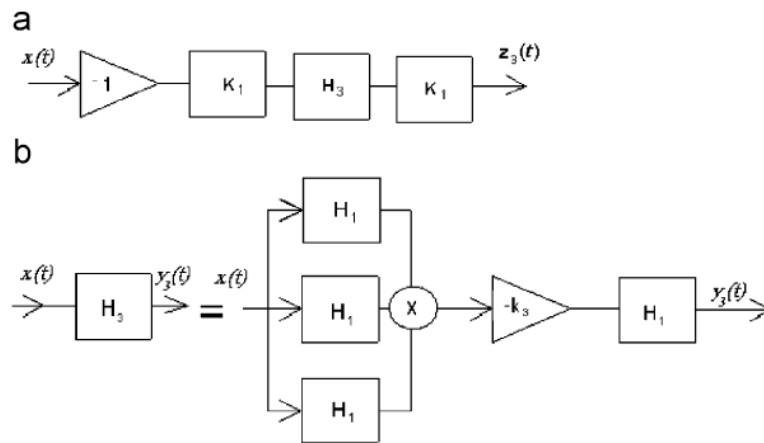
De esta figura la salida de la Postinversa de tercer orden es simplemente:

$$z_3(t) = k_3 y^3(t) \quad (2.69)$$

Cuando los primeros dos operadores Postinversos se añaden

$$z_1(t) + z_3(t) = x(t) \quad (2.70)$$

La no-linealidad se elimina. Esta es una característica que será encontrada en todos los sistemas no-lineales, donde la no-linealidad pertenece a la salida, es decir, para osciladores tipo Duffing con la forma más general



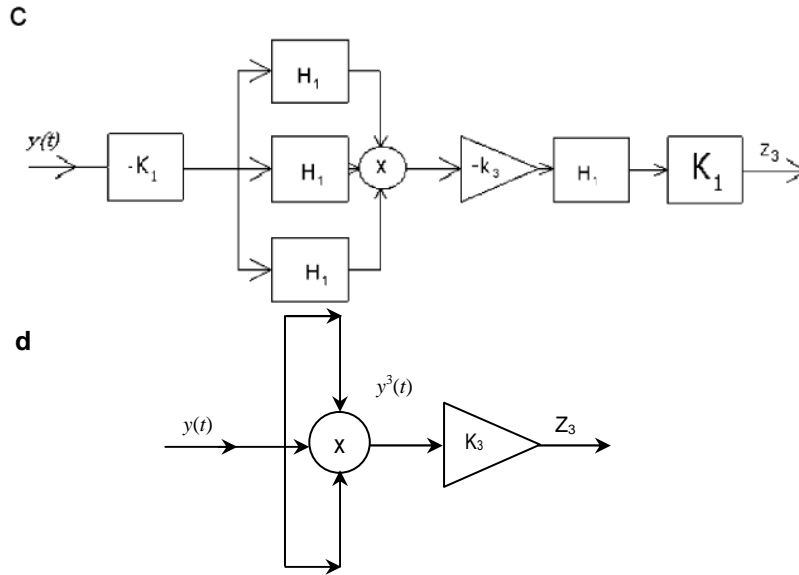


Figura 2.9. Descomposición esquemática de la ELA inversa de Volterra de tercer orden: (a) los operadores implicados, (b) ELA de tercer orden, (c) la sustitución de la ELA de tercer orden en el operador inverso y (d) la reducción de funciones inversas. Fuente: Vazquez et al., 2007.

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = x(t) - \sum_{n=2}^N k_n y^n(t). \quad (2.71)$$

La ecuación correspondiente a la ecuación (2.61) es:

$$z_1(t) = K_1[y] = m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = x(t) - \sum_{n=2}^N k_n y^n(t) \quad (2.72)$$

Las Ecuaciones Lineales Asociadas inversas de mayor orden son encontradas para dar:

$$z_n(t) = k_n y^n(t). \quad (2.73)$$

De este modo, se obtiene de las ecuaciones (2.72) y (2.73):

$$z(t) = z_1(t) + \sum_{n=2}^N z_n(t) = x(t). \quad (2.74)$$

Ahora podemos considerar el caso donde la no-linealidad pertenece a la entrada (el modelo de Hammerstein (Bendat, 1992). El modelo general considerado es:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = \sum_{i=1}^n a_i x(t)^i. \quad (2.75)$$

Ya se ha demostrado en (Vazquez et al., 2007) que tales sistemas pueden ser descritos por una serie de Volterra finita conjunto finito de Volterra, pero ocurre con sus inversos. Se considera el caso siguiente:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = a_1x(t) + a_3x(t)^3, \quad (2.76)$$

Los cuales pueden ser divididos en dos Ecuaciones Lineales Asociadas:

$$m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = a_1x(t), \quad (2.77)$$

$$m\ddot{y}_3(t) + c\dot{y}_3(t) + ky_3(t) = a_3x(t)^3. \quad (2.78)$$

La Función de Respuesta a la Frecuencia de primer orden se obtiene de la ecuación (2.76) por prueba armónica

$$H_1(\omega) = \frac{a_1}{-m\omega^2 + ic\omega + k}. \quad (2.79)$$

Puesto que, las ecuaciones (2.77) y (2.78) son lineales con respecto a $x(t)$ y $x_3(t)$, respectivamente.

$$y_3 = \mathbf{H}_3[x(t)] = \frac{a_3}{a_1} \mathbf{H}_1[x^3(t)]. \quad (2.80)$$

El operador inverso de primer orden se obtiene de $H_1^{-1}(\omega)$, por lo que de acuerdo a la ecuación (2.79):

$$K_1(\omega) = -\frac{m}{a_1}\omega^2 + \frac{ic}{a_1}\omega + \frac{k}{a_1}. \quad (2.81)$$

Regresando al dominio del tiempo, la Ecuación Lineal Asociada de primer orden del operador Postinverso es:

$$z_1(t) = \frac{m}{a_1}\ddot{y}(t) + \frac{c}{a_1}\dot{y}(t) + \frac{k}{a_1}y(t). \quad (2.82)$$

Como la entrada en la Postinversa de primer orden es $y(t)$, de la ecuación (2.62), cuando se compara con la (2.82) se obtiene:

$$z_1(t) = \frac{m}{a_1} \ddot{y}(t) + \frac{c}{a_1} \dot{y}(t) + \frac{k}{a_1} y(t) = x(t) + \frac{a_3}{a_1} x^3(t). \quad (2.83)$$

El operador de tercer de orden se obtiene de la ecuación (2.49), sólo el argumento tiene que ser cambiado a $y(t)$, como la Postinversa es construida:

$$z_3(t) = -\mathbf{K}_1[\mathbf{H}_3[\mathbf{K}_1[y(t)]]]. \quad (2.84)$$

Recordando que $z_1(t) = \mathbf{K}_1[y(t)]$ puede ser reducido a:

$$z_3(t) = -\mathbf{K}_1\left[\mathbf{H}_3\left[\left(x(t) + \frac{a_3}{a_1}x(t)^3\right)\right]\right] \quad (2.85)$$

y de acuerdo a la ecuación (2.80), esto es convertido a:

$$z_3(t) = -\frac{a_3}{a_1}\mathbf{K}_1\left[\mathbf{H}_1\left[\left(x(t) + \frac{a_3}{a_1}x(t)^3\right)^3\right]\right]. \quad (2.86)$$

De la ecuación (2.54), la ecuación (2.86) es reducida a:

$$z_3(t) = -\frac{a_3}{a_1}\left(x(t) + \frac{a_3}{a_1}x^3(t)\right)^3 = -\frac{a_3}{a_1}z_1(t)^3, \quad (2.87)$$

Que es la salida inversa de tercera orden. Expandiendo:

$$z_3(t) = -\frac{a_3}{a_1}\left(x^3(t) + 3\frac{a_3}{a_1}x^5(t) + 3\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2x^7(t) + \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^3x^9(t)\right). \quad (2.88)$$

Sumando (2.87) y (2.88) se tiene:

$$z(t) = z_1(t) + z_3(t) = x(t) - 3\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2x^5(t) - 3\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^3x^7(t) - \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^4x^9(t). \quad (2.89)$$

Como es requerido, la inversa de tercer orden elimina todos los componentes hasta el tercer orden. Sin embargo, todavía hay elementos de mayor orden en el sistema que exige de los operadores inversos de mayor orden. A su vez, ellos producen componentes de orden superior y este proceso es repetido indefinidamente. Se puede

concluir que un sistema con una no-linealidad en la entrada (Hammerstein) posee una serie de Volterra directa finita, pero su inverso es de orden infinito. Lo contrario se aplica para sistemas con una no-linealidad en la salida (oscilador de Duffing), que no tienen una serie de Volterra directa finita, pero tienen una serie inversa finita. Las ELA's han demostrado su utilidad al trabajar con la serie de Volterra inversa. En el caso del oscilador de Duffing, permitieron que una prueba sencilla de la serie de Volterra inversa sea finita. En el caso del modelo de Hammerstein, la relación ALE (2.80) permitió una derivación muy simple del resultado final (2.89).

2.6 MODELO NARMAX

El hecho de que las leyes de Movimiento de Newton sean ecuaciones diferenciales lleva directamente a la representación en el tiempo continuo. Esta representación define el movimiento en todo momento.

En realidad, la mayoría de las observaciones de las mediciones del comportamiento del sistema de las señales de entrada y salida se llevarán a cabo en intervalos discretos. Los datos del sistema son entonces un conjunto discreto de valores $\{x_i, y_i, i = 1, \dots, N\}$. Para propósitos de modelado, cabe preguntar si existe un modelo que represente las entradas discretas x_i directamente a las salidas discretas y_i . Tales modelos existen, y en muchos casos ofrecen ventajas sobre la representación en el tiempo continuo, particularmente en los casos de los sistemas no-lineales.

Considerando el caso general lineal para un sistema con un grado de libertad,

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x(t) \quad (2.90)$$

Suponiendo que se está interesado en el valor de la salida como una secuencia de tiempos separados regularmente t_i donde $t_i = (i-1)\Delta t$ (Δt es el intervalo de muestreo y la frecuencia asociada $f_s = 1/\Delta t$ es conocida como la frecuencia de muestreo). En el instante t_i ,

$$m\ddot{y}_i + c\dot{y}_i + ky_i = x_i \quad (2.91)$$

De donde: $x_i = x(t_i)$ etc. Las derivadas $\dot{y}(t_i)$ y $\ddot{y}(t_i)$ pueden ser aproximadas por la forma discreta:

$$\dot{y}_i = \dot{y}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_i - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \quad (2.92)$$

$$\ddot{y}(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (2.93)$$

Sustituyendo estas aproximaciones en (2.91), después de un pequeño arreglo:

$$y_i = \left(2 - \frac{c\Delta t}{m} - \frac{k\Delta t^2}{m}\right)y_{i-1} + \left(\frac{c\Delta t}{m} - 1\right)y_{i-2} + \frac{\Delta t^2}{m}x_{i-1} \quad (2.94)$$

ó

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + b_1 x_{i-1} \quad (2.95)$$

En donde las constantes a_1 , a_2 , b_1 están definidas por la ecuación (2.94). La ecuación (2.95) es una representación discreta en tiempo del sistema de un grado de libertad bajo estudio. El movimiento para todo tiempo discreto está determinado por la secuencia de entrada x_i junto con valores para y_i y y_2 . La especificación de los primeros dos valores de la secuencia de salida es directamente equivalente para la especificación de valor inicial de $y(t)$ y $\dot{y}(t)$ en el caso de tiempo continuo. Una ventaja obvia de usar un modelo discreto como (2.95), es que es mucho más fácil predecir numéricamente la salida en comparación de una ecuación diferencial. El precio que se paga es la pérdida de generalidad, por que los coeficientes de (2.84) están en función del intervalo de muestreo Δt , se puede usar éste modelo sólo para predecir respuestas con la misma separación en tiempo.

Podría decirse que el enfoque más versátil para sistemas no-lineales en tiempo discreto es la metodología NARMAX (Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs) la cuál ha sido desarrollada sobre un considerable periodo de tiempo por S. A. Billings y numerosos colaboradores.

El oscilador de Duffing representado por:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_3 y^3 = x(t) \quad (2.96)$$

En tiempo discreto:

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + b_1 x_{i-1} + c y_{i-1}^3 \quad (2.97)$$

De donde a_1 , a_2 y b_1 son sin modificar de (2.95) y

$$c = \frac{\Delta t^2 k_3}{m} \quad (2.98)$$

El modelo (2.97) es ahora denominado un modelo NARX (No-lineal ARX). La función de regresión $y_i = F(y_{i-1}, y_{i-2}, x_{i-1})$ es ahora no-lineal; éste contiene un término cúbico. Sin embargo, el modelo es todavía lineal en los parámetros que debe ser estimado.

Si todos los términos de tercer orden o menos fueran incluidos en la estructura del modelo, por ejemplo $(y_{i-1})^2 x_{i-1}$ etc. un modelo mucho más general se obtiene (estos términos más complicados a menudo surgen, particularmente si el amortiguamiento no-lineal está presente):

$$y_i = F^{(3)}(y_{i-1}, y_{i-2}; x_{i-1}) \quad (2.99)$$

(El superíndice denota el término del producto de mayor orden) el cual sería suficientemente general para representar el comportamiento de cualquier sistema dinámico con no-linealidades arriba de tercer orden, por ejemplo, conteniendo términos de la forma $\dot{y}^3, \dot{y}^2 y$ etc.

El polinomio más general del modelo NARX (incluyendo productos de orden $\leq n_p$) está denotado por:

$$y_i = F^{(n_p)}(y_{i-1}, \dots, y_{i-n_y}; x_{i-1}, \dots, x_{i-n_x}) \quad (2.100)$$

Esto ha sido probado por Leontaritis y Billings, que bajo muy moderadas suposiciones, cualquier proceso de entrada – salida tiene una representación de un modelo de la forma (2.100). Si las no-linealidades del sistema son de naturaleza polinomial, este modelo representará bien al sistema para todos los niveles de excitación. Si las no-linealidades del sistema son no polinomial, ellos pueden ser aproximados arbitrariamente por polinomios sobre un rango dado de sus argumentos. Esto significa que el sistema puede ser exactamente modelado al tomar el mayor orden n_p . Sin embargo, el modelo sería de entrada sensible como la aproximación polinomial requerida de los datos. Este problema puede ser removido al incluir términos no polinomial en el modelo NARX.

Por ejemplo, de la ecuación de movimiento del péndulo simple forzado:

$$\ddot{y} + \sin y = x(t) \quad (2.101)$$

O en tiempo discreto:

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + b_1 x_{i-1} + c \sin(y_{i-1}) \quad (2.102)$$

El modelo más compacto de éste sistema será obtenido al incluir un término base $\sin(y_{i-1})$ en lugar de aproximararlo a un polinomio en y_{i-1} .

El análisis anterior no realista, supone que los datos medidos están libres de ruido. Sin embargo, como antes, esto supone que la señal de ruido $\kappa(t)$ está agregada en la señal de salida $y(t)$. Esto no constituía restricción cuando el sistema fue supuesto lineal, pero es generalmente no válido para un sistema no-lineal. Si el sistema es no-lineal, el proceso de ruido puede ser muy complejo; términos de ruido multiplicativo con la entrada y la salida no son poco comunes, pero pueden ser fácilmente acomodados por los algoritmos descritos al principio.

Bajo la previa suposición, la salida medida tiene la forma:

$$y(t) = y_c(t) + \kappa(t) \quad (2.103)$$

De donde $y_c(t)$, es de nuevo la salida limpia del sistema. Si el sistema subyacente es la ecuación del oscilador de Duffing (2.96), la ecuación que satisface los datos medidos es ahora:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_3y^3 - m\ddot{\kappa} - c\dot{\kappa} - k\kappa - k_3(\kappa^3 + 3y^2\kappa + 3y\kappa^2) = x(t) \quad (2.104)$$

Y la correspondiente ecuación en tiempo discreto contendrá términos de la forma $\kappa_{i-1}, \kappa_{i-2}, \kappa_{i-1}y_{i-1}^2$ etc. Se tiene en cuenta que aún el ruido simple agregado en la salida introduce el término producto cruz si el sistema es no-lineal. El modelo del sistema (2.100) es por lo tanto extendido otra vez por la adición del modelo del ruido y toma la forma de:

$$y_i = F^{(3)}(y_{i-1}, y_{i-2}; x_{i-2}; \kappa_{i-1}, \kappa_{i-2}) + \kappa_i \quad (2.105)$$

El término “promedio de movimiento”, se refiere al modelo del ruido, debe ahora ser entendido como una posible regresión no-lineal en valores pasados del ruido. Si una regresión general en un proceso de ruido no correlacionado ficticio $e(t)$ es incorporado, se obtiene la forma general final:

$$y_i = F^{(n_p)}(y_{i-1}, \dots, y_{i-n_y}; x_{i-1}, \dots, x_{i-n_x}; e_{i-1}, \dots, e_{i-n_e}) + e_i \quad (2.106)$$

Este tipo de modelo es el genérico modelo NARMAX.

2.6.1 VALIDEZ DEL MODELO

Habiendo obtenido un modelo NARMAX para un sistema, la siguiente etapa en el proceso de identificación es determinar si la estructura es correcta y los parámetros estimados son imparciales. Es importante saber si el modelo ha capturado satisfactoriamente la dinámica del sistema, con esto, se proporcionarán buenas predicciones de la salida del sistema para diferentes excitaciones de entrada, o si simplemente se ha ajustado el modelo a los datos; en cualquier caso esto será de poco uso, puesto que, será aplicable a un conjunto de datos. En lo siguiente, y_i denota una salida medida mientras que \hat{y}_i denota un valor de salida predicho por el modelo.

2.6.2 PREDICCIONES UN PASO ADELANTE

Dada la representación NARMAX de un sistema:

$$y_i = F^{(n_p)}(y_{i-1}, \dots, y_{i-n_y}; x_{i-1}, \dots, x_{i-n_x}; e_{i-1}, \dots, e_{i-n_e}) + e_i \quad (2.107)$$

La predicción paso adelante de y_i es hecha usando valores medidos para todas las entradas y salidas pasadas. La estimación de los residuos son obtenidos de la expresión $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$, es decir:

$$\hat{y}_i = F^{(n_p)}(y_{i-1}, \dots, y_{i-n_y}; x_{i-1}, \dots, x_{i-n_x}; \hat{e}_{i-1}, \dots, \hat{e}_{i-n_e}) \quad (2.108)$$

La serie predicción paso adelante puede entonces ser comparada con la salida medida. Un buen acuerdo es una condición necesaria para validar el modelo. A fin de obtener una medida objetivo de la bondad del ajuste, el error cuadrático medio (MSE) normalizado es introducido; la definición es:

$$\text{MSE}(\hat{y}) = \frac{100}{N\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.109)$$

Este MSE tiene la siguiente propiedad de utilidad; si la media de la señal de salida \bar{y} es usada como el modelo, es decir, $\hat{y}_i = \bar{y}$ para toda i , el MSE es 100.0.

$$\text{MSE}(\hat{y}) = \frac{100}{N\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \frac{100}{\sigma_y^2} \cdot \sigma_y^2 = 100. \quad (2.110)$$

La experiencia muestra que un MSE menor que 5.0 indica buen acuerdo, mientras que uno menor que 1.0 refleja un excelente ajuste.

2.6.3. SALIDA DEL MODELO PREDICHO

En este caso, las salidas son las únicas cantidades medidas usadas para generar la salida del modelo, es decir:

$$\hat{y}_i = F^{(n_p)}(\hat{y}_{i-1}, \dots, \hat{y}_{i-n_y}; x_{i-1}, \dots, x_{i-n_x}; 0, \dots, 0) \quad (2.111)$$

Los ceros están presentes por que los errores de predicción no estarán generalmente disponibles cuando se usa el modelo para predecir la salida. Con el fin de evitar un error transitorio al comienzo del registro de \hat{y} , el primer valor n_y de la salida medida son usadas para iniciar la recursión. Como antes, las salidas estimadas deben de ser comparadas con las salidas medidas, con buen acuerdo, una condición necesaria para aceptar el modelo. Es claro que esta prueba es más fuerte que la anterior; de hecho la predicción paso adelante puede ser excelente en algunos casos cuando la salida del modelo predicho muestra completo desacuerdo con los datos medidos.

2.7 AMPLIFICADOR OPERACIONAL

El amplificador operacional, es un componente electrónico básico que se comporta como una fuente de voltaje controlada por voltaje. Un amplificador operacional puede sumar señales, amplificarlas, integrarlas o diferenciarlas cuando componentes externos, tales como resistencias y capacitancias están conectadas a sus terminales. La capacidad del amplificador operacional para realizar estas operaciones matemáticas es la razón por la cuál es nombrado amplificador operacional. Los amplificadores operacionales están comercialmente disponibles en paquetes de circuitos integrados en varias formas, uno típico es el 741 de 8 pines, mostrado en la figura 2.10a. Las cinco terminales más importantes son:

1. La entrada inversora, pin 2.
2. La entrada no inversora, pin 3.

3. La salida, pin 6.
4. Alimentación positiva V_+ , pin 7.
5. Alimentación negativa V_- , pin 4.

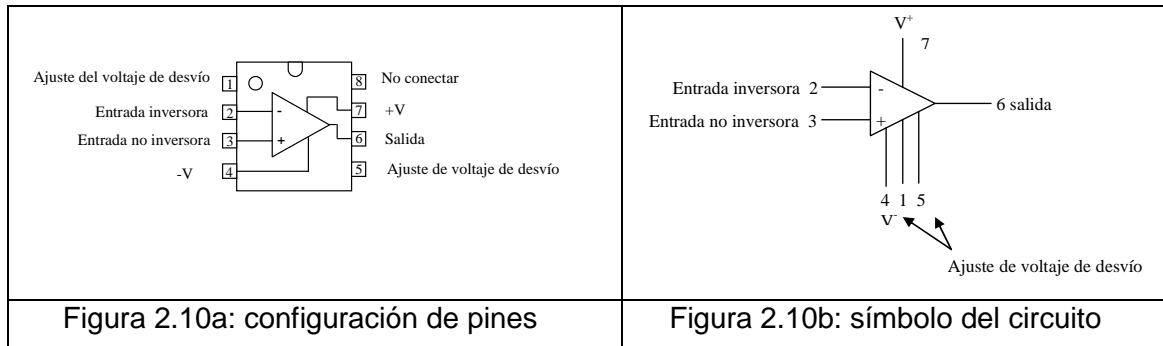


Figura 2.10: Amplificador operacional típico. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

El símbolo del circuito para el amplificador operacional es el triángulo en la figura 2.10b; como es mostrado, el amplificador operacional tiene dos entradas y una salida. Las entradas están marcadas con menos (-) y mas (+) para especificar entradas inversoras y no inversoras respectivamente. Una entrada aplicada a la terminal no inversora aparecerá con la misma polaridad en la salida, mientras una entrada aplicada a la terminal no inversora aparecerá invertida en la salida.

Como un elemento activo, el amplificador operacional debe ser alimentado por un voltaje aplicado como el mostrado en la figura 2.10. Aunque, los voltajes aplicados son a menudo ignorados en los diagramas de circuitos, las corrientes aplicadas no deben ser pasadas por alto. Por la Ley de corrientes de Kirchhoff (KCL):

$$i_o = i_1 + i_2 + i^+ + i^- \quad (2.112)$$

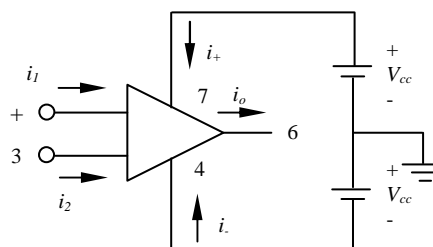


Figura 2.11: Alimentación del Amplificador operacional. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

El circuito del modelo equivalente del amplificador operacional se muestra en la figura 2.11. La salida consiste de una fuente de voltaje controlada en serie con la resistencia

de salida R_o , es evidente que la resistencia de entrada R_i es la resistencia equivalente de Thevenin visto en las terminales de entrada, mientras que la resistencia de salida R_o es la resistencia equivalente de Thevenin visto en la salida. El voltaje diferencial de entrada v_d está dado por:

$$v_d = v_2 - v_1 \quad (2.113)$$

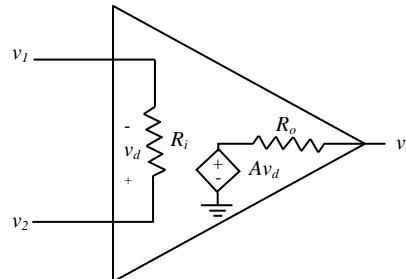


Figura 2.12: Circuito equivalente del amplificador operacional no ideal. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

De donde v_1 es el voltaje entre la terminal inversora - tierra y v_2 es el voltaje entre la terminal no inversora - tierra. El amplificador operacional sensa la diferencia de voltaje entre las dos entradas, las multiplica por la ganancia A , y produce que el voltaje resultante aparezca a la salida. Así, la salida v_o está dada por:

$$v_o = Av_d = A(v_2 - v_1) \quad (2.114)$$

A es llamada ganancia de lazo abierto, por que es la ganancia del amplificador operacional sin retroalimentación externa desde la salida a la entrada. La tabla 2.1 muestra los parámetros básicos para el 741. La tabla 2.2 muestra valores típicos de ganancia de voltaje A , resistencia de entrada R_i , resistencia de salida R_o y voltaje V_{cc} .

Tabla 2.1: Parámetros básicos del amplificador operacional

Parámetro	Rango típico
Voltaje de alimentación	+/- 15v DC (+/- 5v min, +/- 18v max)
Impedancia de entrada	Aproximadamente 2MΩ
Ganancia de voltaje de baja Frecuencia	Aproximadamente 200,000
Corriente de polarización de entrada	80nA
Velocidad de respuesta	0.5v por μs
Corriente de salida Máxima	20mA
Carga de salida recomendada	No menor de 2kΩ

Tabla 2.2: Rangos típicos para parámetros del amplificador operacional

Parámetro	Rango típico	Valor ideal
Ganancia de lazo abierto, A	10^5 a 10^8	∞
Resistencia de entrada, R_i	10^6 a $10^{13} \Omega$	$\infty \Omega$
Resistencia de salida, R_o	10 a 100Ω	0Ω
Voltaje aplicado, V_{cc}	5 a 24 V	

Se tiene una retroalimentación negativa cuando la salida es conectada a la terminal inversora del amplificador operacional. Cuando hay una trayectoria de retroalimentación de salida a la entrada, la razón del voltaje de salida con el voltaje de entrada es llamada ganancia de lazo cerrado. Como resultado de la retroalimentación negativa, puede ser mostrado que la ganancia de lazo cerrado es casi insensible a la ganancia de lazo abierto A del amplificador operacional. Por esta razón, los amplificadores operacionales se emplean en circuitos con trayectorias de retroalimentación.

Una limitación práctica del amplificador, es que la magnitud de su voltaje de salida no puede exceder $|V_{cc}|$. En otras palabras, el voltaje de salida es dependiente y esta limitado por el voltaje de alimentación. La figura 2.12 ilustra que el amplificador operacional puede operar en tres modos, dependiendo del voltaje de entrada diferencial v_d :

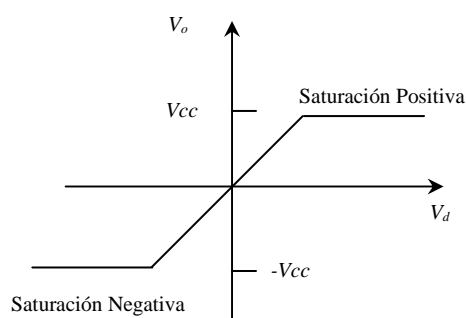


Figura 2.13: Voltaje de salida del amplificador operacional v_o como función del voltaje de entrada diferencial v_d . Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

1. Saturación Positiva, $v_o = V_{CC}$.
2. Región Lineal, $-V_{CC} \leq v_o = Av_d \leq V_{CC}$.
3. Saturación Negativa, $v_o = -V_{CC}$.

Si intentamos incrementar v_d más allá del rango lineal, el amplificador operacional comienza a saturarse y cede $v_o = V_{CC}$ o $v_o = -V_{CC}$. Por lo que la salida de voltaje está restringida por $-V_{CC} \leq v_o \leq V_{CC}$.

2.7.1 AMPLIFICADOR OPERACIONAL IDEAL

Un amplificador operacional es ideal si tiene las siguientes características:

- 1.- Ganancia de lazo abierto infinita, $A \approx \infty$
- 2.- Resistencia de entrada infinita, $R_i \approx \infty$
- 3.- Resistencia de salida cero, $R_o \approx 0$

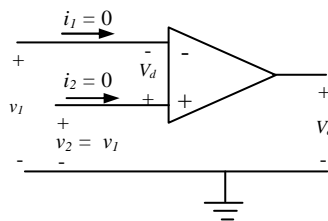


Figura 2.14: Modelo del amplificador operacional ideal. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Suponiendo que un amplificador operacional proporciona sólo un análisis aproximado, la mayoría de los amplificadores modernos tienen grandes ganancias e impedancias de entrada que proporcionan análisis aproximados muy buenos. Dos características importantes del amplificador operacional son:

- 1.- Las corrientes en ambas terminales de entrada son cero:

$$i_1 = 0 \quad i_2 = 0 \quad (2.115)$$

Esto es, debido a la Resistencia de entrada infinita. Una resistencia infinita entre las terminales de entrada implica que existe un circuito abierto y la corriente no puede entrar al amplificador operacional. Pero la corriente de salida no es necesariamente cero.

- 2.- El voltaje a través de las terminales de entrada es insignificante:

$$v_d = v_2 - v_1 \approx 0 \quad (2.116)$$

ó

$$v_1 = v_2 \quad (2.117)$$

Así, un amplificador operacional ideal tiene corriente cero en sus dos terminales de entrada, y voltaje insignificante entre las dos terminales de entrada.

2.7.2. AMPLIFICADOR INVERSOR

El amplificador inversor se muestra en la figura 2.15. En este circuito, la entrada no inversora está aterrizada, v_i está conectada a la entrada inversora a través de R_1 y la resistencia de retroalimentación R_f está conectada entre la entrada y salida inversora.

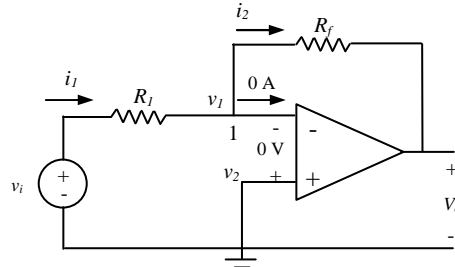


Figura 2.15: Amplificador inversor. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Aplicando la ley de corrientes de Kirchoff en nodo 1:

$$i_1 = i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \quad (2.118)$$

Pero $v_1 = v_2 = 0$ para un amplificador operacional ideal, puesto que, la terminal no inversora está aterrizada. Así que:

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_f} \quad \text{ó} \quad v_o = -\frac{R_f}{R_1} v_i \quad (2.119)$$

La ganancia de voltaje es $A_v = v_o/v_i = -R_f/R_1$. La designación del circuito en la figura 2.15 como un inversor surge del signo negativo. Así, un Amplificador inversor invierte la polaridad de la señal de entrada mientras la amplifica.

2.7.3. AMPLIFICADOR SUMADOR

Además de amplificar, el amplificador operacional puede realizar sumas y restas. Un amplificador sumador es un circuito que combina varias entradas y produce una salida que es la suma ponderada de las entradas.

El amplificador sumador mostrado en la figura 2.16, es una variación del amplificador inversor.

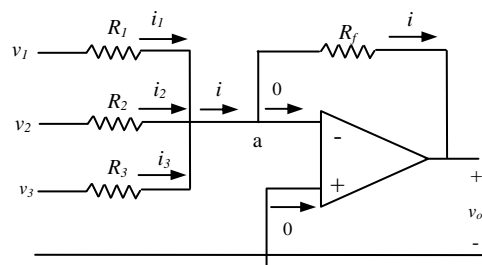


Figura 2.16: Amplificador sumador. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Toma ventaja del hecho de que la configuración puede manejar muchas entradas al mismo tiempo. Aplicando Ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo a se tiene:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad (2.120)$$

Pero:

$$i_1 = \frac{v_1 - v_a}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v_2 - v_a}{R_2} \quad (2.121)$$

$$i_3 = \frac{v_3 - v_a}{R_3}, \quad i = \frac{v_a - v_o}{R_f}$$

$v_a = 0$ y sustituimos (2.121) en (2.120). Tenemos:

$$v_o = - \left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \frac{R_f}{R_3} v_3 \right) \quad (2.122)$$

Lo cual indica que la salida de voltaje es una suma ponderada de las entradas. Por esta razón, el circuito de la figura 2.16 es conocido como sumador. El sumador puede utilizar cualquier número de entradas siempre y cuando el voltaje de salida no exceda el rango nominal del amplificador.

2.7.4.- INTEGRADOR

Los circuitos operacionales importantes que utilizan elementos de almacenamiento de energía incluyen a los integradores y diferenciadores. Estos circuitos operacionales implican a menudo resistores y condensadores; los inductores (bobinas) tienden a ser muy voluminosos y costosos.

Un integrador es un circuito operacional cuya salida es proporcional a la integral de la señal de entrada.

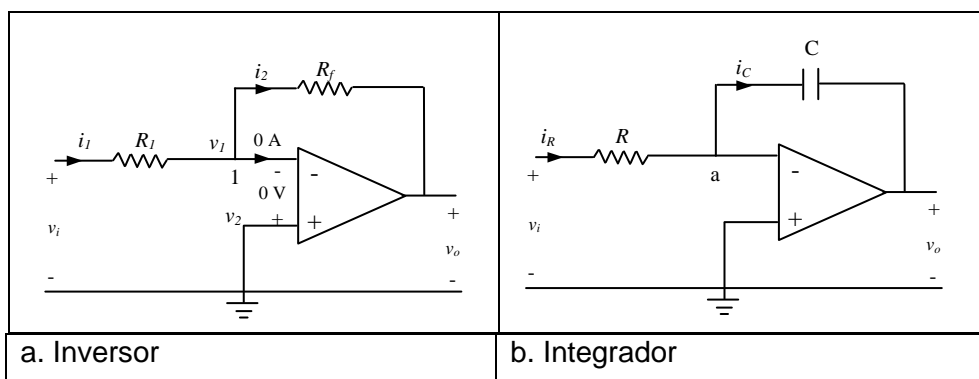


Figura 2.17: Reemplazando la Resistencia de retroalimentación en el amplificador inversor en a) produce un integrador en b). Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

Si la resistencia de retroalimentación R_f del amplificador inversor de la figura 2.17a es reemplazada por un capacitor, se obtiene un integrador ideal, como el mostrado en la figura 2.17b. Del nodo a de la figura 2.17b:

$$i_R = i_C \quad (2.123)$$

Pero:

$$i_R = \frac{v_i}{R}, \quad i_C = -C \frac{dv_o}{dt} \quad (2.124)$$

Sustituyendo esta en ecuación (2.112), obtenemos:

$$\frac{v_i}{R} = -C \frac{dv_o}{dt} \quad (2.125)$$

$$dv_o = -\frac{1}{RC} v_i dt \quad (2.126)$$

Integrando ambos lados se obtiene:

$$v_o(t) - v_o(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt \quad (2.127)$$

Para asegurar que $v_o(0) = 0$, es necesario descargar el capacitor del integrador para la aplicación de una señal. Suponiendo que $v_o(0) = 0$:

$$v_o = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt \quad (2.128)$$

Lo cual muestra que el circuito en la figura 2.17b proporciona una salida de voltaje proporcional a la integral de la entrada. En la práctica, el integrador requiere de una resistencia de retroalimentación para reducir la ganancia de corriente directa y prevenir saturación. Se debe tener cuidado de que el operacional opere en la región lineal y así no se sature.

2.7.5.- DERIVADOR

Es posible mostrar, por un análisis, que el amplificador operacional se puede utilizar para derivar. Un diferenciador, es un circuito amplificador operacional de donde la salida es proporcional a la razón de cambio de la señal de entrada.

De la figura 2.17a, si el resistor de entrada es reemplazado por un capacitor, el circuito resultante es un diferenciador, mostrado en la figura 2.18. Aplicando la Ley de corrientes de Kirchoff en nodo a:

$$i_R = i_C \quad (2.129)$$

Pero:

$$i_R = -\frac{V_0}{R}, \quad i_C = C \frac{dV_i}{dt} \quad (2.130)$$

Sustituyendo esto en ecuación (2.118):

$$V_0 = -RC \frac{dV_i}{dt} \quad (2.131)$$

Se muestra que la salida es la derivada de la entrada. Los circuitos derivadores son electrónicamente inestables porque cualquier ruido eléctrico dentro del circuito es amplificado por el derivador. Por esta razón, el circuito diferenciador de la figura 2.18 no es tan útil y popular como el integrador. Este circuito es rara vez usado en la práctica para este fin.

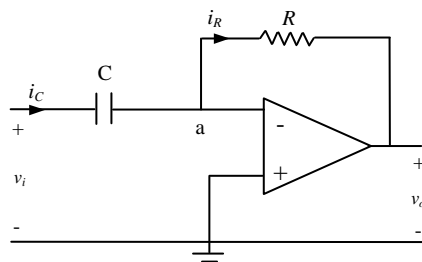


Figura 2.18: Amplificador operacional diferencial. Fuente: Alexander Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos.

En la práctica, el valor de la resistencia de retroalimentación R_f , es usualmente de $1M\Omega$ y el valor del capacitor de retroalimentación C_f es generalmente de $1\mu F$. El valor de la resistencia de entrada varia de $0.1M\Omega$ a $1M\Omega$, aunque en ciertos problemas los valores pueden diferir de estos valores (Sadiku, 2001).

Capítulo 3

Metodología

3. METODOLOGÍA

El siguiente trabajo de investigación se llevó a cabo en ocho etapas:

En la primera etapa se llevó a cabo el diseño del sistema lineal, su simulación en el software de circuitos integrados analógicos llamado Pspice, así como su construcción empleando amplificadores operacionales.

El diseño correspondiente al sistema analógico no-lineal, su simulación en Pspice y su construcción se tiene en la segunda etapa.

La identificación de los parámetros modales del sistema lineal mediante el método ajuste de círculo, se presenta en la tercera etapa.

En la cuarta etapa se presenta la comparación de las salidas obtenidas de manera simulada con la experimental del sistema lineal y su MSE.

La comparación de las salidas obtenidas de manera simulada con la experimental del sistema no-lineal se lleva a cabo en la quinta etapa.

La identificación del sistema no-lineal mediante modelos NARMAX se muestra en la sexta etapa.

En la séptima etapa se aplica la Postinversa de Volterra al sistema no-lineal de manera continua en simulink de Matlab.

La implementación de la Postinversa de Volterra utilizando modelos NARMAX se describe en la última etapa.

A continuación se muestran dos diagramas de flujo correspondientes a la metodología utilizada en esta investigación del sistema lineal y no-lineal.

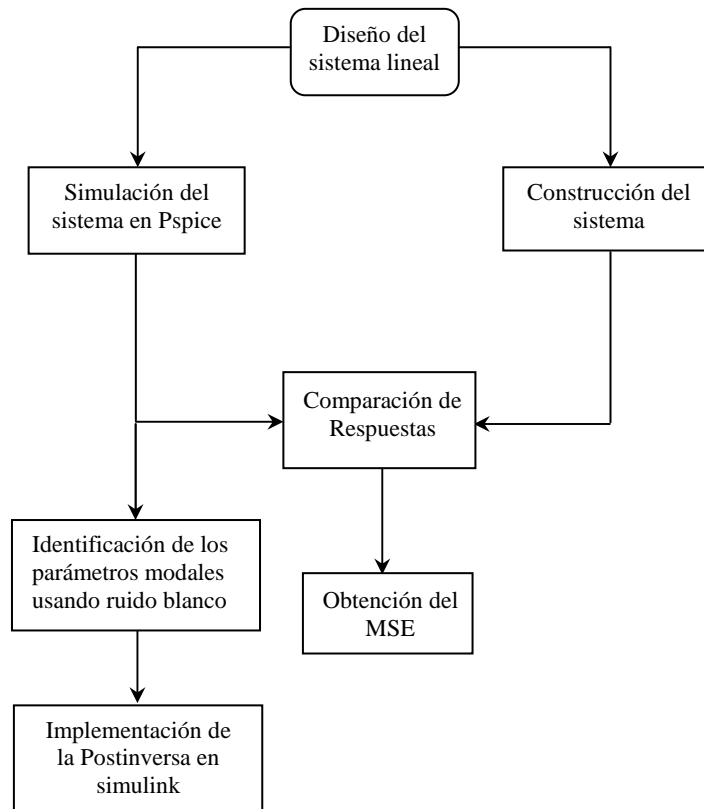


Figura 3.1: Metodología del sistema analógico lineal de segundo orden. Fuente: Autor.

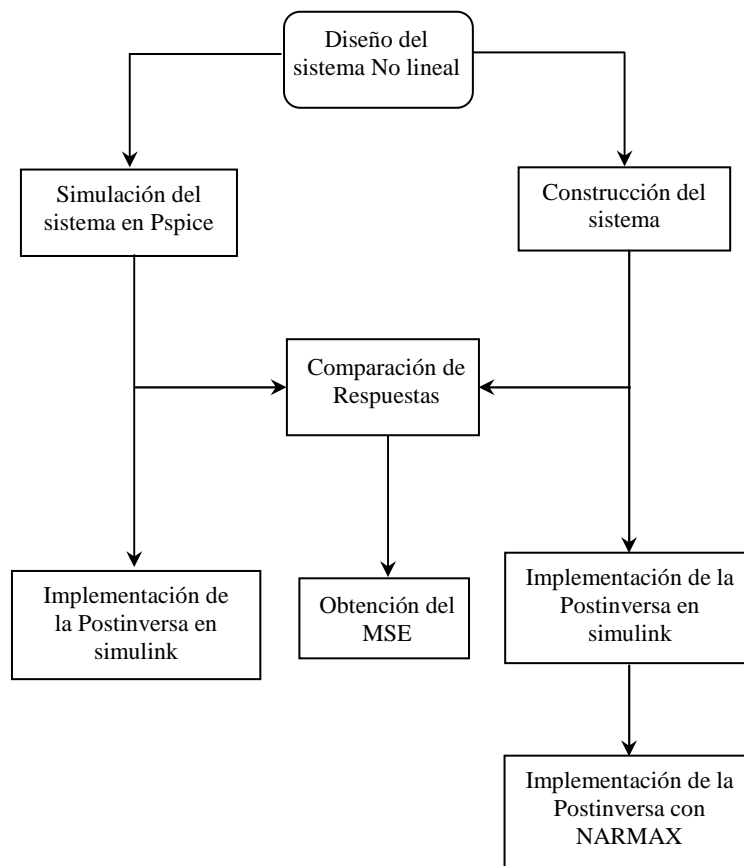


Figura 3.2: Etapas de la Metodología del sistema analógico no-lineal de segundo orden. Fuente: Autor.

3.1 DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA ANALÓGICO LINEAL

Para resolver cualquier ecuación diferencial lineal usando amplificadores operacionales, es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones, tales como:

La salida de cada amplificador debe ser mantenido dentro del rango ± 12 Volts, por lo que es necesario escalar los voltaje de entrada.

Por ejemplo, si el problema del cálculo de la velocidad de un cohete se resolviera usando amplificadores operacionales, sería imposible relacionar 1 volt en el sistema a 1 m/s en el problema real. Sin embargo, el problema podría ser resuelto al relacionar 1 volt en el sistema a 1 milla/s en el problema. Por lo tanto, el problema debe tener la magnitud a escala adecuada de modo que el equipo pueda procesarla.

Por otro lado, se deben evitar que la señal de salida tenga niveles cercanos a microvolts, ya que, estos valores de amplitud están en el nivel de ruido de los amplificadores lo cuál ocasionaría resultados erróneos.

El punto anterior se debe tomar en cuenta al momento de realizar el diseño, esto, para evitar sobrepasar los límites de operación del amplificador, ya que ocasionaría que el amplificador se sature.

Se busca solucionar la respuesta forzada de un sistema masa-resorte con amortiguamiento de un grado de libertad.

La ecuación a resolver es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, no homogénea ordinaria con coeficientes constantes.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{3.1}$$

De la ecuación 3.1, x es el desplazamiento de masa m , soportado por un resorte de rigidez k , un amortiguamiento viscoso c y f es una fuerza externa aplicada a la masa. Los puntos sobre x representan la diferenciación con respecto al tiempo (en Notación de Newton).

El método que se implementó consiste en obtener la solución para la derivada de mayor orden de la ecuación (d^2x/dt^2 en éste caso). Éste resultado es una suma de términos, cada una involucrando la variable dependiente “ x ” y/o la derivada de menor

orden de “x” y coeficientes constantes. Integraciones múltiples (dos en este caso) de este resultado proporciona “x” y sus derivadas restantes. Estos términos están retroalimentados para el cálculo inicial (a través de potenciómetros para los coeficiente constantes) como entradas. Donde, necesariamente, sumadores adicionales son usados como señales inversoras, así que todos los voltajes de entrada tienen el signo requerido.

Se resolvió (3.1) para la derivada de mayor orden de “x” (la aceleración). Específicamente:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} f - \frac{c}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x \quad (3.2)$$

La velocidad puede ser encontrada integrando el resultado de (3.2). Esto es:

$$\dot{x} = \int \ddot{x} dt \quad (3.3)$$

Ahora, al integrar la velocidad (3.3) se obtiene el desplazamiento.

$$x = \int \dot{x} dt \quad (3.4)$$

La ecuación 3.2 requiere de tres tipos de circuitos amplificadores operacionales para su construcción: amplificadores sumadores, integradores y amplificadores inversores.

Dos integradores en cascada se tienen en la figura 3.3, la entrada es \ddot{x} , las salidas son \dot{x} y x :

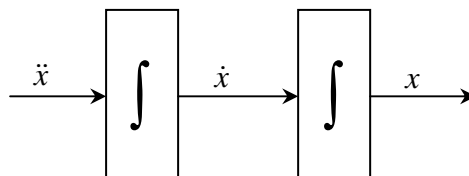


Figura 3.3: Integradores en cascada. Fuente: Autor.

A continuación, se utilizó la ecuación 3.2 para construir el diagrama a bloques de la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

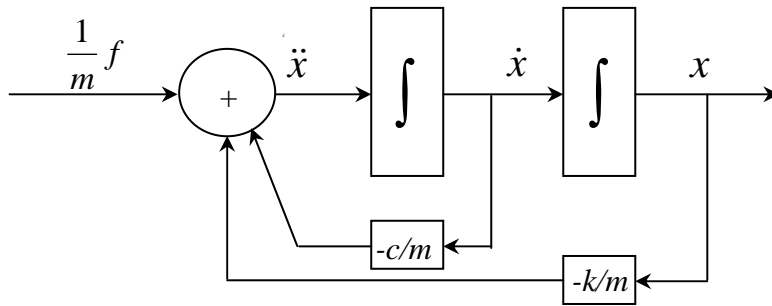


Figura 3.4: Diagrama a bloques del sistema lineal. Fuente Autor.

Se tuvo cuidado al seleccionar los valores de las resistencias y capacitores para asegurar que el amplificador operacional no se saturara durante el intervalo de tiempo de la solución.

Los valores de los coeficientes de la ecuación 3.2 se obtuvieron con las siguientes fórmulas:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{R_1 C} \quad (3.5)$$

$$\frac{c}{m} = \frac{1}{R_2 C} \quad (3.6)$$

$$\frac{k}{m} = \frac{1}{R_3 C} \quad (3.7)$$

Por razones prácticas, la operación de integración es más fácil de aplicar que la operación de diferenciación. La razón radica en el hecho de que las señales de voltajes son reales y, por tanto, son corrompidos por el ruido, en cierta medida. Una solución más precisa se puede obtener mediante técnicas de integración (Howe, 2005).

La ecuación Diferencial propuesta que representa al sistema analógico fue:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 25x(t) = f(t) \quad (3.8)$$

El diagrama a bloques que representa a la ecuación diferencial lineal de segundo orden se muestra en la figura 3.5.

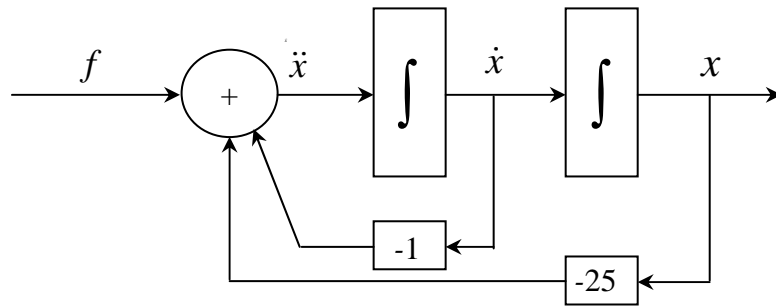


Figura 3.5: Coeficientes del sistema lineal. Fuente: Autor.

Se utilizaron amplificadores operacionales en la configuración de integrador, sumador e inversor, el esquema del sistema analógico lineal se muestra en la figura 3.6.

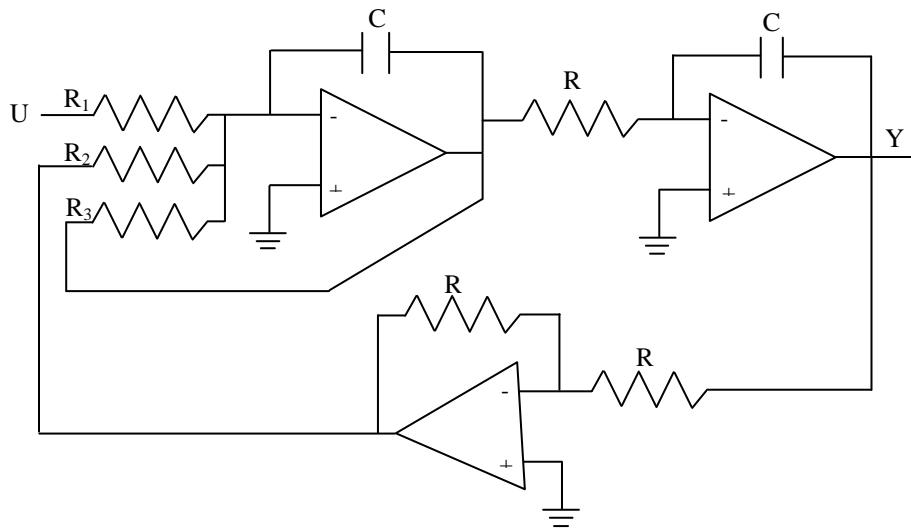


Figura 3.6: Circuito del sistema analógico lineal de segundo orden. Fuente: Autor.

Se utilizaron las siguientes ecuaciones para obtener los valores de las resistencias del sistema analógico lineal:

$$R_1 = \frac{1}{b_2 C} \quad (3.9)$$

$$R_2 = \frac{1}{b_1 C} \quad (3.10)$$

$$R_3 = \frac{1}{b_0 C} \quad (3.11)$$

De donde:

b_2 = masa; b_1 = amortiguamiento; b_0 = rigidez; $C = 1\mu\text{F}$.

$$R_1 = \frac{1}{b_2 C} = \frac{1}{(1) \cdot (1 \times 10^{-6})} = 1\text{M}\Omega \quad (3.12)$$

$$R_2 = \frac{1}{b_1 C} = \frac{1}{(1) \cdot (1 \times 10^{-6})} = 1\text{M}\Omega \quad (3.13)$$

$$R_3 = \frac{1}{b_0 C} = \frac{1}{(25)(1 \times 10^{-6})} = 40\text{k}\Omega \quad (3.14)$$

El valor utilizado de R fue de 100kΩ.

El circuito final se simuló en Pspice, la figura 3.7 muestra el esquema del circuito. El circuito real conectado con amplificadores operacionales se muestra en la figura 3.8.

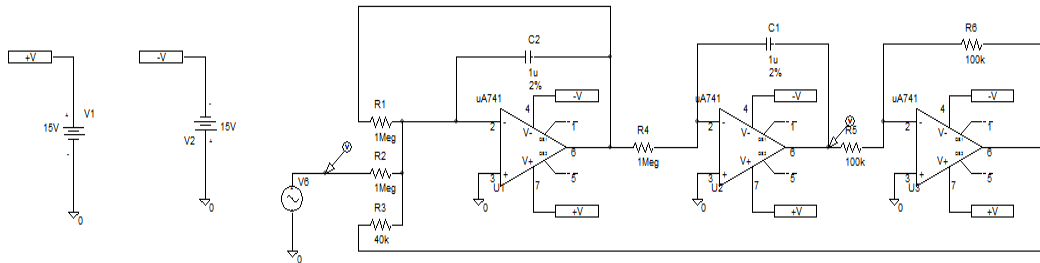


Figura 3.7: Circuito analógico lineal de segundo orden simulado en Pspice. Fuente: Autor.

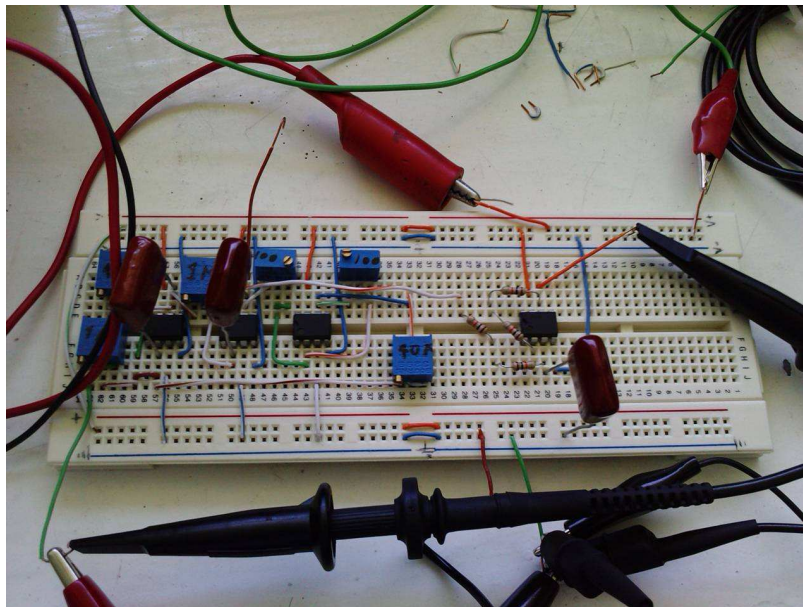


Figura 3.8: Sistema Analógico Lineal Experimental. Fuente: Autor.

3.2.- DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA ANALÓGICO NO LINEAL

La ecuación no-lineal de movimiento para un sistema con un grado de libertad, con amortiguamiento, rigidez lineal y rigidez no-lineal es conocida como Ecuación de Duffing:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + k_3x(t)^3 = f(t) \quad (3.15)$$

La ecuación 3.15 es la única ecuación más estudiada en ciencias de la no-linealidad e ingeniería, ya que, es el oscilador no-lineal más simple, a pesar de su estructura simple, es capaz de mostrar casi todos los comportamientos característicos interesantes de los sistemas no-lineales.

Empleando el método utilizado en el sistema lineal, se resolvió (3.15) para la derivada de mayor orden de "x" (la aceleración). Específicamente:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} f(t) - \frac{c}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x - \frac{k_3}{m} x^3 \quad (3.16)$$

Para obtener la no-linealidad de tipo cúbico, se utilizaron circuitos multiplicadores, la señal aplicada al circuito se multiplicó tres veces, de esta forma se obtuvo la señal cúbica. El bloque correspondiente al circuito cúbico se muestra en la Figura 3.9.

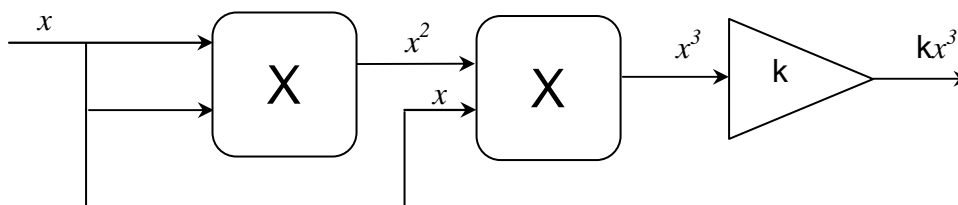


Figura 3.9: No-linealidad. Fuente: Autor.

El diagrama del circuito correspondiente únicamente a la no-lineal cúbica, simulada en Pspice se muestra en la figura 3.10.

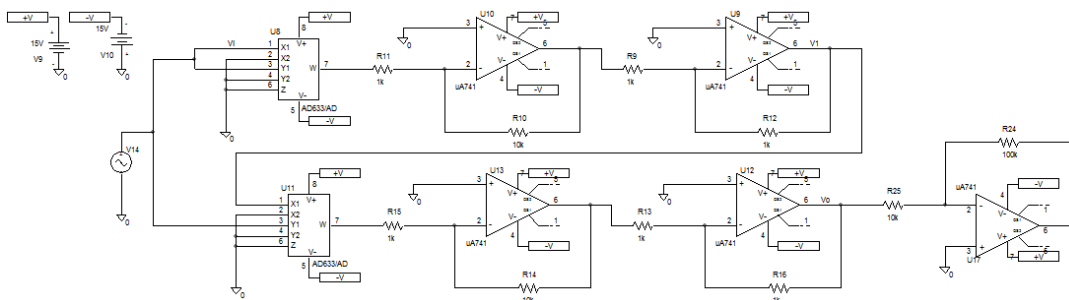


Figura 3.10: No-linealidad simulada en Pspice. Fuente: Autor.

La no-linealidad se retroalimentó al sistema lineal, la salida x del sistema lineal se aplicó como señal de entrada al circuito no-lineal de tipo cúbico, posteriormente, la salida del circuito no-lineal se retroalimentó a la entrada del sistema lineal, de esta manera se obtuvo el sistema analógico no-lineal.

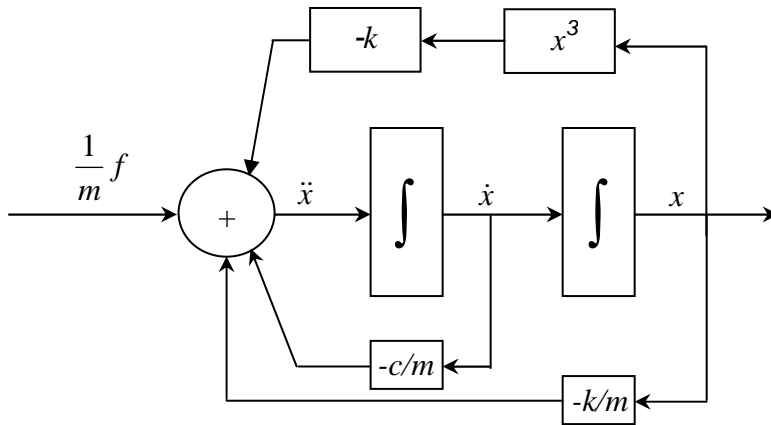


Figura 3.11: Diagrama a bloques del sistema analógico no-lineal. Fuente: Autor.

El coeficiente utilizado en la no-linealidad, fue de 13, en la figura 3.12 se muestra el diagrama completo del sistema analógico no-lineal y en la figura 3.13 el circuito experimental.

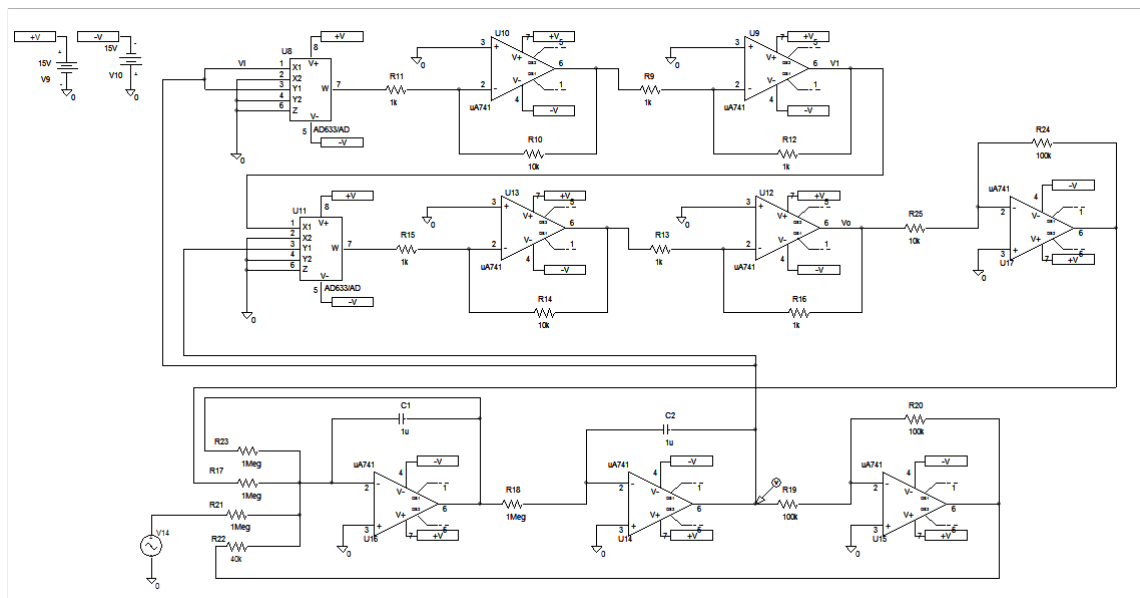


Figura 3.12: Sistema analógico no-lineal que representa a un oscilador de Duffing. Fuente Autor.

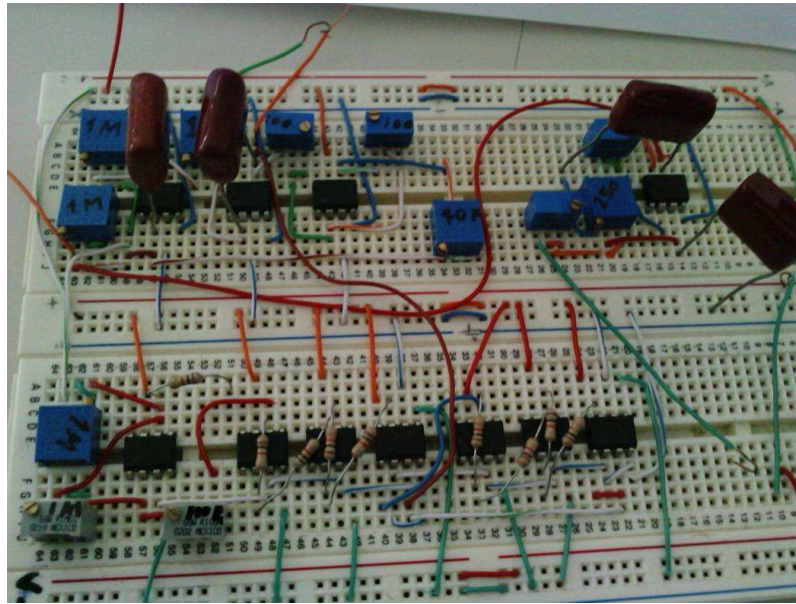
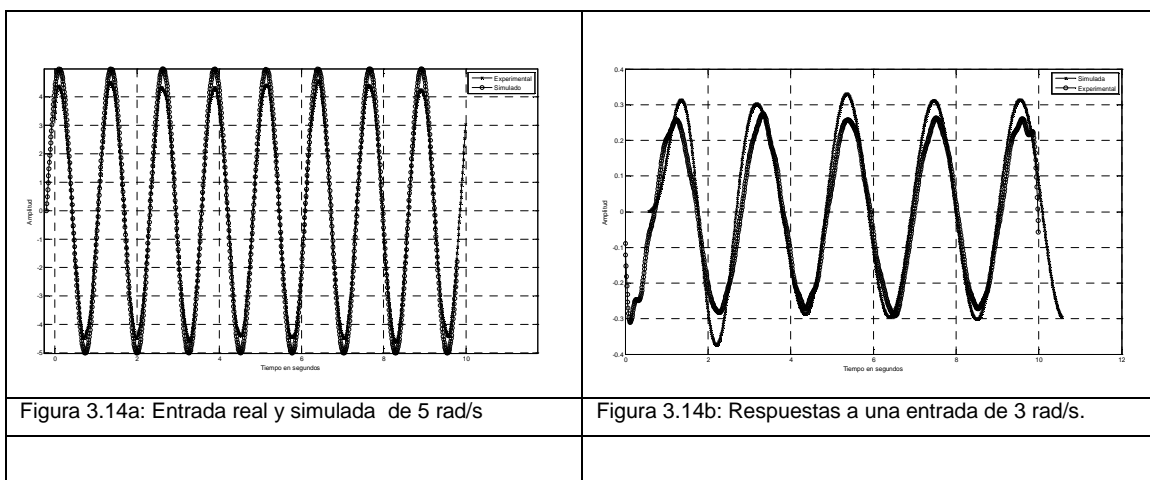


Figura 3.13: Sistema analógico no-lineal Experimental. Fuente: Autor.

3.3 COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA LINEAL SIMULADO CON LA REAL

Las señales aplicadas al sistema analógico lineal real y simulado fueron de tipo senoidal, el rango de frecuencias usadas fue de 1 a 9 rad/s con amplitud de 9 Volts. A continuación, se muestran las comparaciones de las salidas obtenidas a frecuencias de 3,5 y 7 rad/s, con un periodo de 10s.

En la Figura 3.14a se muestra la comparación de las señales de entrada aplicadas al sistema analógico simulado y real, a una frecuencia de 5 rad/s.



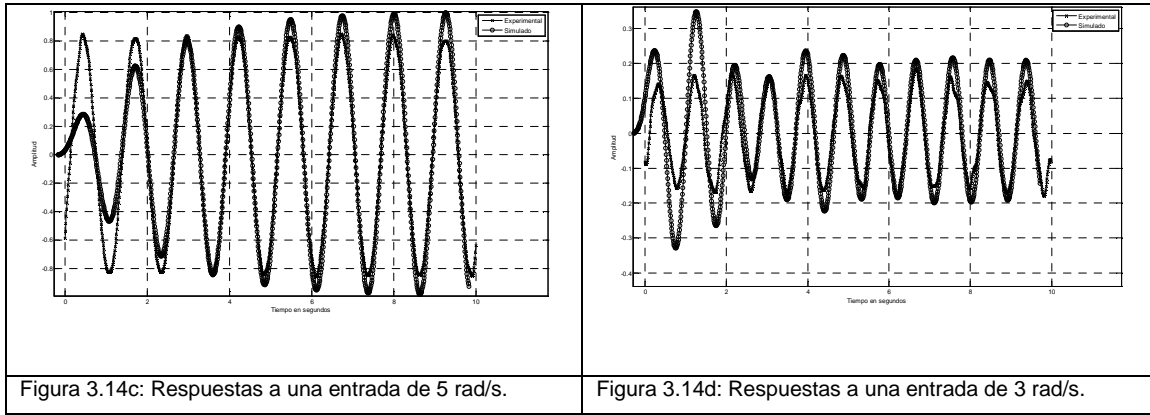


Figura 3.14c: Respuestas a una entrada de 5 rad/s.

Figura 3.14d: Respuestas a una entrada de 3 rad/s.

Figura 3.14: Respuesta del sistema lineal en “-x” la real y “-•” simulada. Fuente: Autor

Tabla 3.1: MSE de las comparaciones del sistema analógico lineal

Frecuencia	MSE
3 rad/s	80.7687
5 rad/s	31.1589
7 rad/s	45.3986

Se puede observar claramente en las figuras 3.14b, 3.14c y 3.14d que las salidas tanto del sistema real como el simulado tienden a presentar el mismo comportamiento, esto se puede corroborar con el error cuadrático medio mostrado en la tabla 3.1. Sin embargo, el sistema real parece variar su respuesta con la frecuencia de excitación, donde la respuesta para ambos sistemas mejora conforme nos acercamos a la Frecuencia de resonancia.

Lo anterior, se debe a que las amplitudes de las frecuencias menores así como a las frecuencias mayores a la frecuencia de resonancia del sistema se encuentran en niveles de amplitud de ruido del amplificador operacional, es por eso, que la respuesta con menor ruido es en amplitudes mayores a los niveles de ruido que maneja el amplificador operacional, además, el ruido introducido durante la experimentación perturba la respuesta del sistema.

Debido a limitaciones del equipo experimental, el cual no acepta niveles de amplitud de ruido blanco mayor a 1. Por lo tanto, la FRF se obtuvo aplicando señales de excitación a frecuencias de 1 hasta 9 rad/s, se tomó la magnitud de la amplitud de la salida a cada frecuencia aplicada. En la figura 3.15 se muestra la FRF discreta comparada con la FRF obtenida de cada una de las frecuencias aplicadas al sistema analógico lineal real.

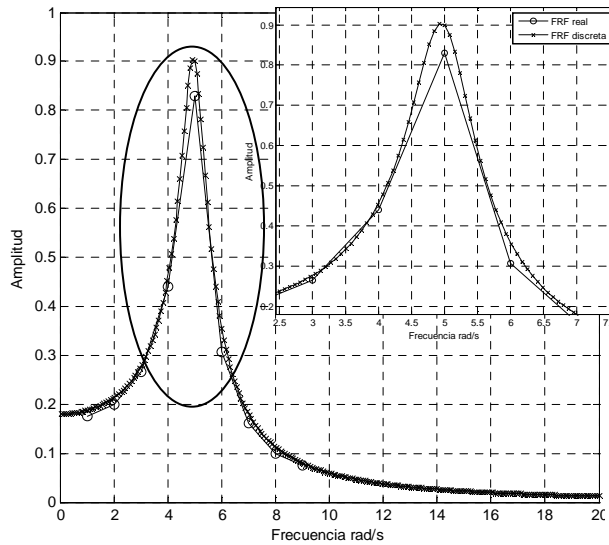


Figura 3.15: FRF discreta y FRF real. Fuente: Autor.

En la figura 3.15 se observa que la FRF real tiene la misma tendencia que la FRF obtenida de la ecuación diferencial propuesta, sin embargo, el MSE no se pudo obtener debido a la diferencia del tamaño de los vectores frecuencia.

3.4 COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA NO LINEAL SIMULADO CON LA REAL

Las señales aplicadas al sistema analógico no-lineal real y simulado fueron de tipo senoidal, a frecuencias de 1 a 10 rad/s con amplitud de 9 Volts. Las comparaciones de las señales senoidales se hicieron para las frecuencias de 3,5 y 7 rad/s con un periodo de 10 segundos.

Se utilizó un filtro pasa bajas de 12.5 rad/s para limpiar la señal de entrada y salida de frecuencias altas. En la Figura 3.16 se muestra la comparación de las respuestas obtenidas del sistema analógico no-lineal, a frecuencias de entrada senoidal de 3, 5 y 7 rad/s. En la figura 3.16c, se muestra sólo la respuesta estable de la frecuencia de 7 rad/s, es por ello que no se observa el comportamiento oscilatorio al inicio.

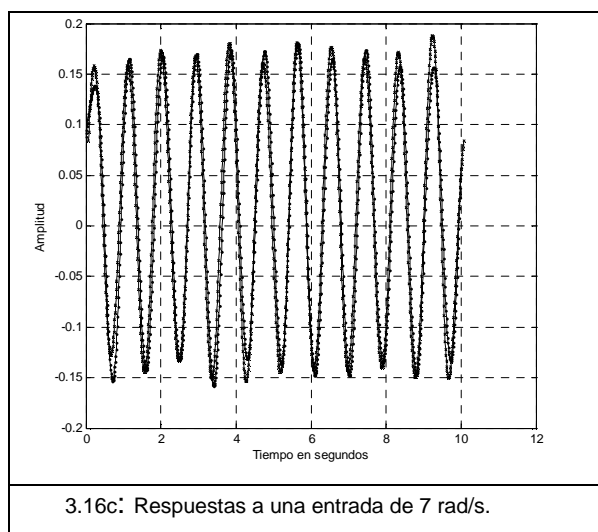
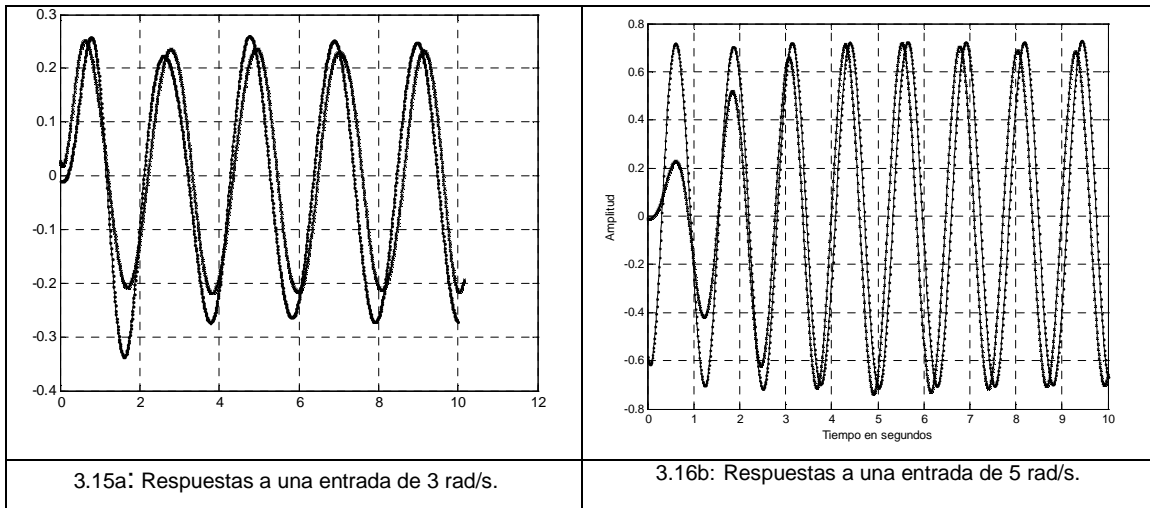


Figura 3.16: Respuesta del sistema no-lineal en “-x” la simulada y “-•” real.
Fuente: Autor.

Tabla 3.2: MSE de las comparaciones del sistema no-lineal.

Frecuencia	MSE
3 rad/s	27.021
5 rad/s	62.402
7 rad/s	68.708

El menor error obtenido fue para la frecuencia de 3 rad/s, las otras frecuencias presentan mayor error debido a que presentan mayor inestabilidad al inicio de la señal.

3.5 IDENTIFICACIÓN Y ASIGNACIÓN DE UN MODELO AL SISTEMA SIMULADO.

La identificación de los parámetros modales se obtuvo con el método ajuste de círculo, ya que, la gráfica de Nyquist de la función de respuesta en frecuencia es un círculo.

Para utilizar el ajuste de círculo, se aplicó ruido blanco como señal de excitación al sistema analógico lineal simulado en Pspice, el límite del ancho de banda empleado fue de 20 rad/s, con un periodo de simulación de 80.43 segundos, en la Figura 3.17 se muestra el ruido blanco que se aplicó al sistema lineal en Pspice. El eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical la amplitud de la señal aplicada.

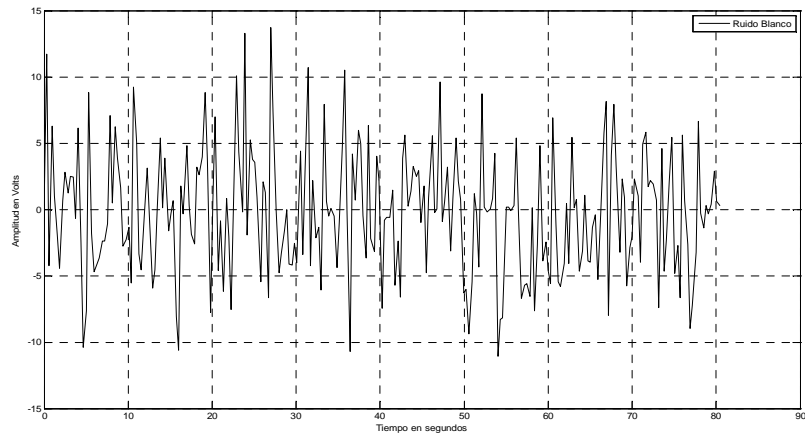


Figura 3.17: Ruido Blanco aplicado al sistema analógico lineal. Fuente: Autor.

La salida obtenida del sistema analógico se muestra en la Figura 3.18

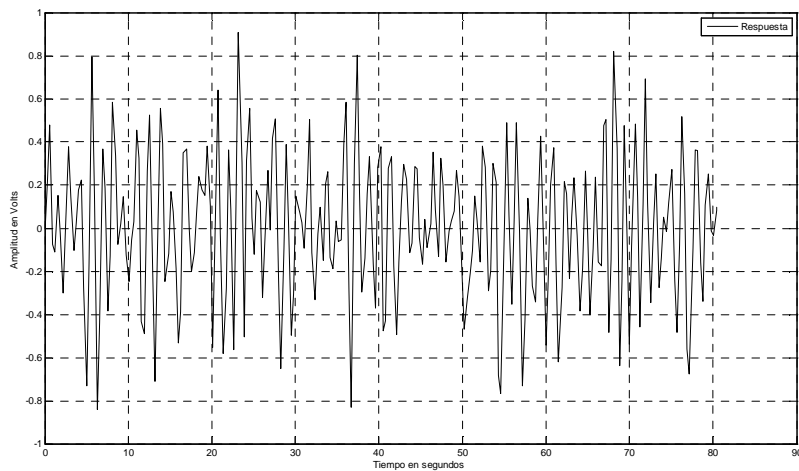


Figura 3.18: Salida del sistema analógico lineal. Fuente: Autor.

Una vez obtenida la respuesta del sistema analógico simulado, se pasó al dominio de la frecuencia mediante la Transformada Rápida de Fourier, esto nos permitió analizar los datos de manera más fácil, la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) del sistema lineal se muestra en la Figura 3.19. El eje vertical representa la amplitud y el eje horizontal la frecuencia en rad/s.

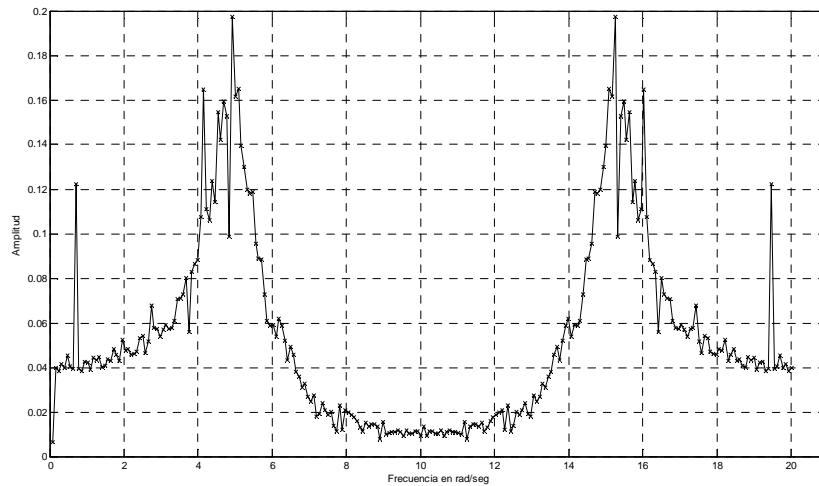


Figura 3.19: Función de Respuesta en Frecuencia del sistema analógico lineal. Fuente: Autor.

Se hizo la comparación de la FRF obtenida de la discretización de la ecuación diferencial propuesta en la ecuación 3.8 con la simulación del sistema analógico, esto se puede ver en la Figura 3.20.

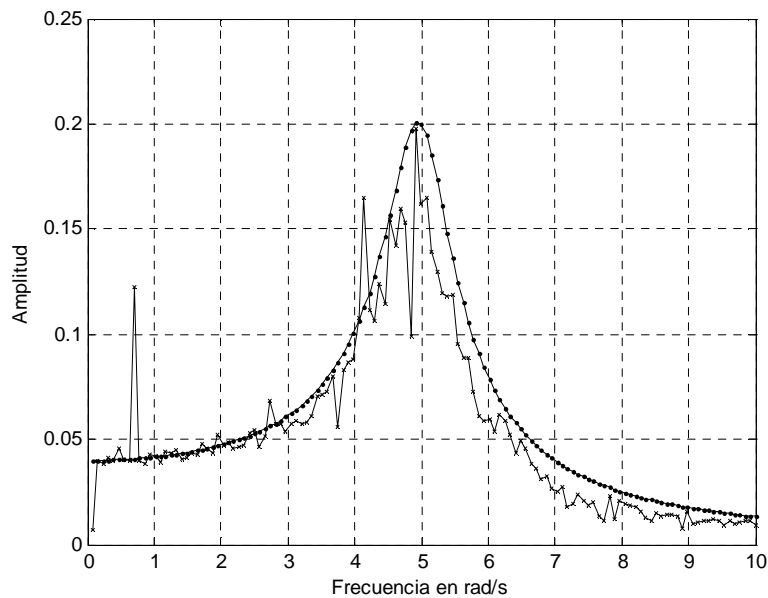


Figura 3.20: Comparación de las FRF. Fuente: Autor.

El error obtenido entre la FRF discreta con la identificada fue de 27.0996.

Una vez obtenida la FRF, se procedió a obtener la movilidad del sistema, para ello se derivó en frecuencia la FRF calculada, la gráfica de Nyquist calculada se tiene en la Figura 3.21, esta figura muestra la movilidad del sistema, a los datos del círculo de Nyquist se le aplicó el método de ajuste de círculo para la obtención de los parámetros modales.

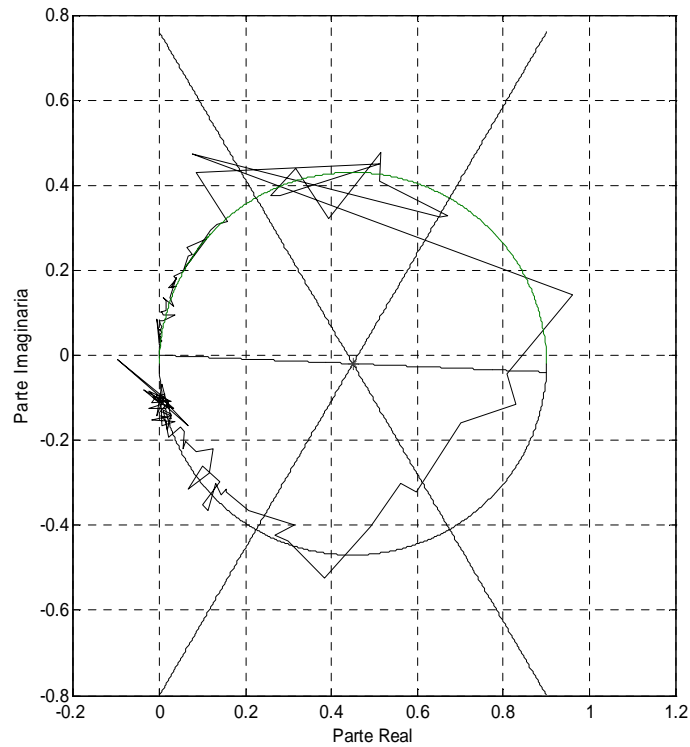


Figura 3.21: Movilidad del sistema. Fuente: Autor.

Los parámetros modales (Frecuencia natural, razón de amortiguamiento y una constante modal A) calculados de las ecuaciones derivadas del círculo se obtuvieron con las siguientes fórmulas:

$$\omega_n = \sqrt{\omega_a \omega_b} = \sqrt{5.5 * 4} = 4.69 \text{ rad/s} \quad (3.17)$$

$$\zeta = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\omega_n} = \frac{5.5 - 4}{2(4.69)} = 0.159 \quad (3.18)$$

$$A = 4\zeta\omega_n R = 4(0.159)(4.69)(0.45) = 1.342 \quad (3.19)$$

Los parámetros modales calculados se sustituyeron en la ecuación 3.20

$$f(t) = \frac{\ddot{y}}{A} + \frac{2\zeta\omega_n \dot{y}}{A} + \frac{\omega_n^2 y}{A} \quad (3.20)$$

El sistema lineal de segundo orden se expresa como la ecuación 3.21:

$$f(t) = 0.74\ddot{y} + 1.11\dot{y} + 16.39y \quad (3.21)$$

En la Figura 3.22 se muestra la comparación de las movilidades real e identificada obtenida del sistema analógico lineal, el círculo de color negro representa la movilidad del modelo propuesto, en gris la movilidad obtenida con los parámetros identificados.

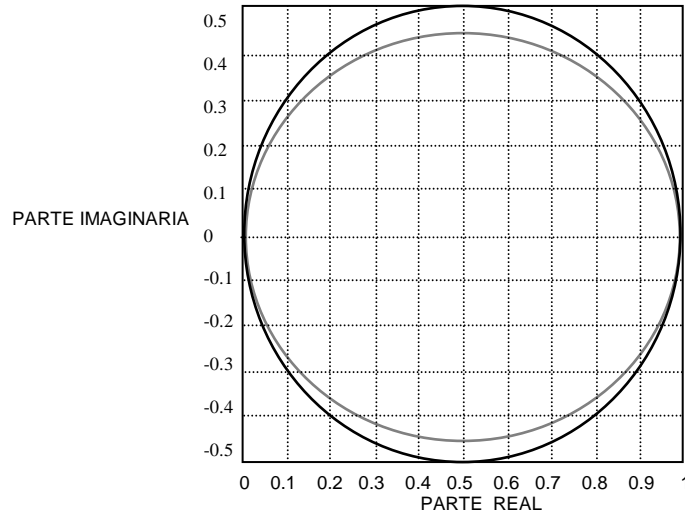


Figura 3.22: Comparación de la movilidad propuesta con la identificada.
Fuente: Autor.

3.6 IDENTIFICACIÓN A TRAVÉS DE NARMAX

En este punto se presenta la identificación del sistema no-lineal real mediante modelos NARMAX.

De los datos experimentales y simulados, se modelaron cuatro ecuaciones diferentes tratando de predecir la señal de salida, los modelos fueron los siguientes:

$$\text{a) } y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta x_i = 0 \quad (3.22)$$

$$\text{b) } y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta x_i + \gamma y_{i-1}^2 + \epsilon y_{i-1}^3 = 0 \quad (3.23)$$

$$\text{c) } y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i = 0 \quad (3.24)$$

$$\text{d) } y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i + \chi y_{i-1}^2 + \eta y_{i-1}^3 = 0 \quad (3.25)$$

De los modelos anteriores, y_i representa el desplazamiento, y_{i-1} la velocidad, y_{i-2} la aceleración y x_i la señal de entrada del sistema, los elementos y_{i-1}^2 , y_{i-1}^3 son los que ajustan la representación no-lineal del sistema y las constantes $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \epsilon, \chi$ y η son coeficientes de ajuste del sistema.

- a) Representa un modelo lineal de la señal de salida con un máximo de dos retrasos sin elementos exponenciales.
- b) Representa un modelo lineal de la señal de salida con un máximo de dos retrasos, con elementos no-lineales
- c) Representa un modelo lineal de la señal de salida con un máximo de cuatro retrasos sin elementos exponenciales
- d) Representa un modelo lineal de la señal de salida con un máximo de cuatro retrasos, con elementos no-lineales

La tabla 3.3 muestra los valores de los coeficientes para los modelos de las ecuaciones 3.22 a la 3.25, correspondientes al sistema no-lineal real a una frecuencia de 4 rad/s.

Tabla 3.3: Coeficientes del modelo no-lineal ajustado con la frecuencia de 4 rad/s.

	α	β	δ	γ	ϵ	χ	η
1	0.4247	0.4513	0.0114				
2	0.1876	0.2137	0.2478	0.2274	0.0119		
3	0.5196	0.4225	0.0109	0.0208	-0.5899		
4	0.2430	0.2057	0.2403	0.2210	0.0117	0.0153	-0.3022

Las figuras 3.23a - 3.23d representan los modelos ajustados de las ecuaciones 3.22 a la 3.25.

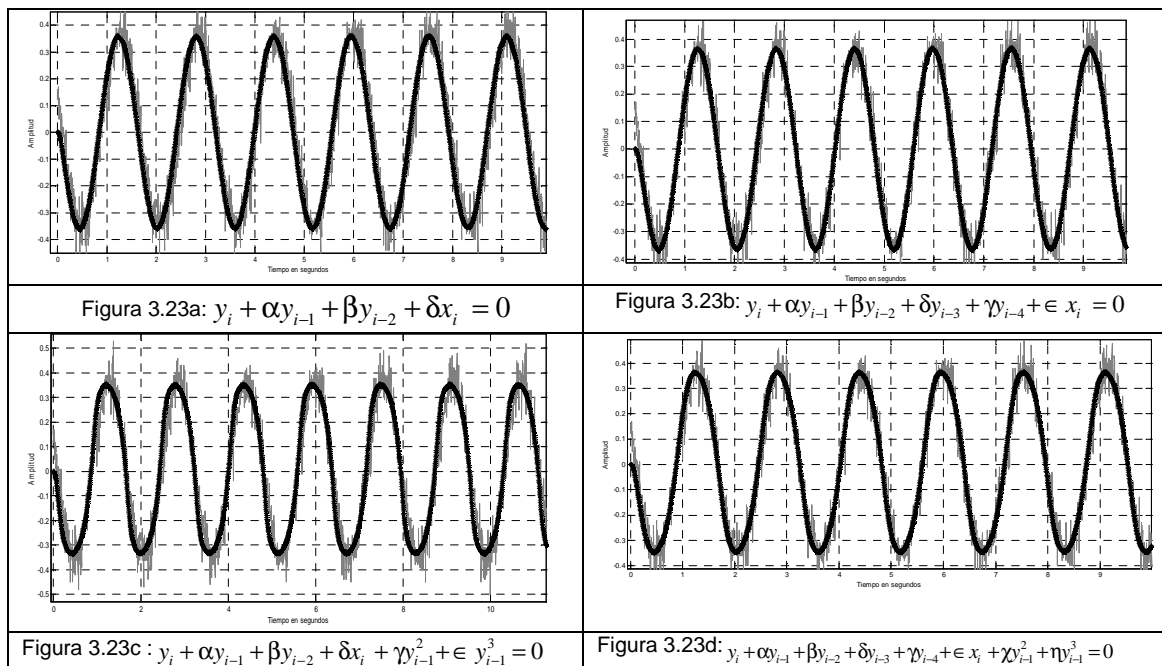


Figura 3.23: Ajuste del modelo no-lineal real a 4 rad/s. Fuente: Autor.

Tabla 3.4: MSE del ajuste para el modelo no-lineal real.

	MODELO	MSE
1	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta x_i = 0$	e = 25.73
2	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i = 0$	e = 16.93
3	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta x_i + \gamma y_{i-1}^2 + \epsilon y_{i-1}^3 = 0$	e = 24.24
4	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i + \chi y_{i-1}^2 + \eta y_{i-1}^3 = 0$	e = 16.68

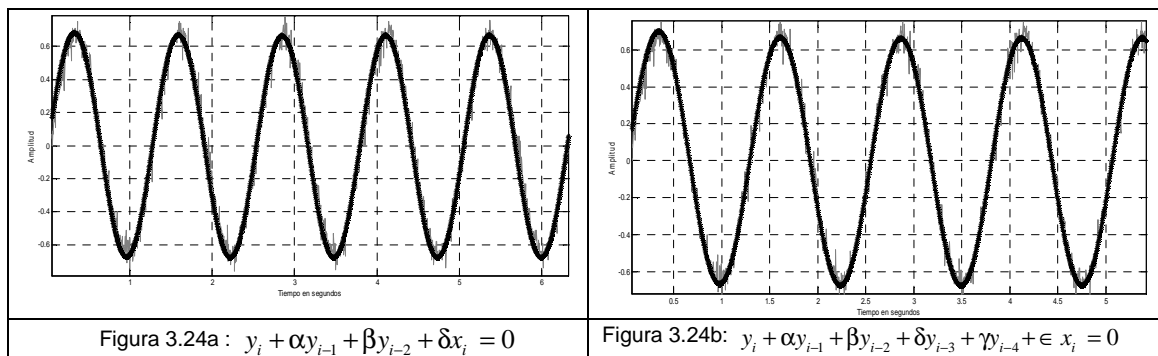
El error obtenido correspondiente a los modelos ajustados de las figuras 3.23a a la 3.23d, se presenta en la tabla 3.4, en donde, el menor error obtenido correspondió al modelo lineal con términos exponenciales utilizando cuatro retrasos.

También, se calcularon los valores de los coeficientes para los modelos de las ecuaciones 3.22 a la 3.25, a una frecuencia de 5 rad/s. En la tabla 3.5 se tienen los valores de los coeficientes.

Tabla 3.5: Coeficientes del modelo no-lineal ajustado para 5 rad/s

	α	β	δ	γ	ϵ	χ	η
1	0.4847	0.4966	0.0060				
2	0.2337	0.2458	0.2552	0.2403	0.0095		
3	0.5218	0.4851	0.0060	0.0028	-0.0764		
4	0.2543	0.2432	0.2524	0.2374	0.0094	0.0022	-0.0365

Las figuras 3.24a a la 3.24d representan los modelos ajustados de las ecuaciones 3.22 - 3.25.



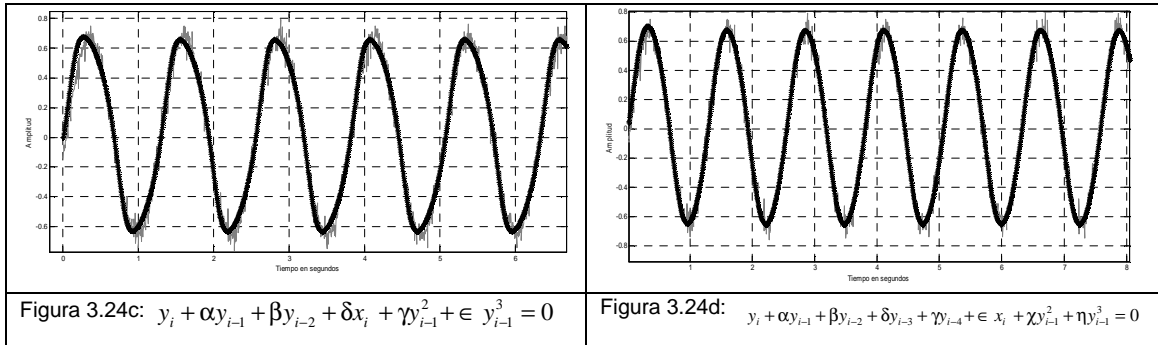


Figura 3.24: Ajuste del modelo no-lineal real a 5 rad/s. Fuente: Autor.

Tabla 3.6: MSE del ajuste para el modelo no-lineal real

	MODELO	MSE
1	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta x_i = 0$	e = 14.35
2	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i = 0$	e = 8.62
3	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta x_i + \gamma y_{i-1}^2 + \epsilon y_{i-1}^3 = 0$	e = 11.98
4	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i + \chi y_{i-1}^2 + \eta y_{i-1}^3 = 0$	e = 8.06

Se puede observar de la tabla 3.6 que el menor error obtenido, corresponde al modelo lineal con elementos exponenciales y cuatro retrasos.

3.7 IMPLEMENTACIÓN DE LA POSTINVERSA DE VOLTERRA

En este punto se muestra la salida de la inversa de Volterra tanto para el sistema simulado y real. La obtención detalla de la inversa de Volterra se muestra en el anexo A, puesto que la técnica propuesta es compensación, la inversa de Volterra se coloca después del sistema, como se muestra en la figura 3.25.

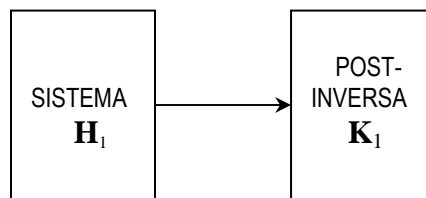


Figura 3.25: Diagrama del sistema directo e inverso. Fuente: Autor.

Puesto que, la inversa del sistema lineal es la inversa multiplicativa de la Función de Respuesta en frecuencia, de los parámetros identificados de la ecuación 3.21, se construyó la Postinversa de Volterra de primer orden, esto se muestra en la figura 3.26.

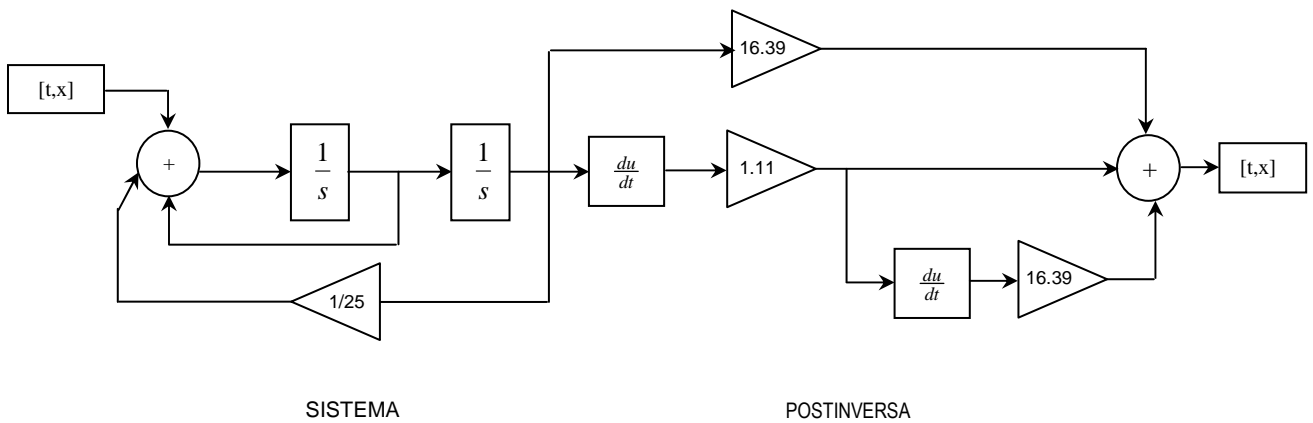


Figura 3.26: Sistema directo e Inverso de primer orden. Fuente: Autor.

Posteriormente, a la entrada y salida del sistema lineal simulado se le aplicó un filtro pasa bajas de 6.12 rad/s, después la señal filtrada se aplicó como señal de entrada a la Postinversa de Volterra, se muestra en la figura 3.27 la señal de entrada del sistema lineal en gris y la salida en negro. La respuesta de la Postinversa se tiene en negro, la entrada al sistema en gris en la figura 3.28, además, el vector tiempo se generó con el comando linspace de matlab.

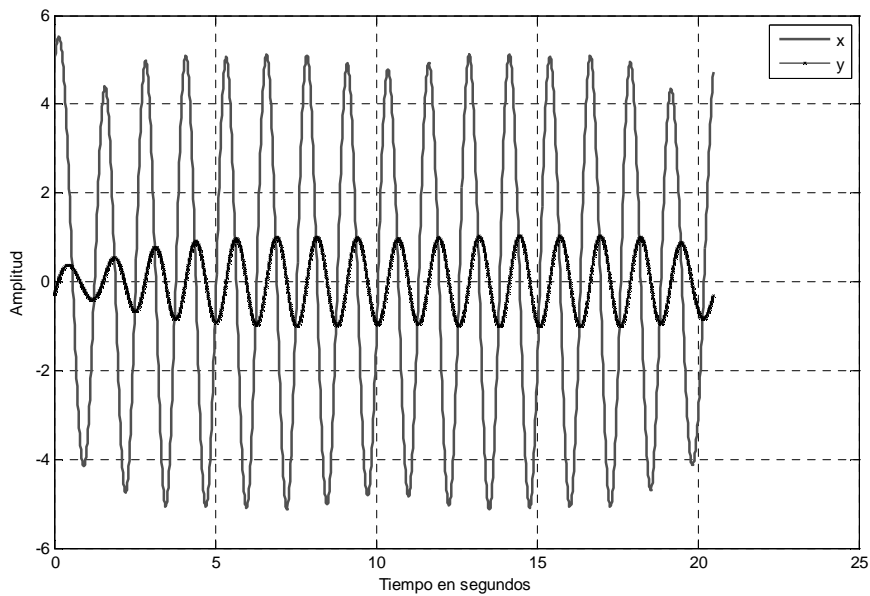


Figura 3.27: Entrada y salida del sistema lineal simulado. Fuente: Autor.

En la tabla 3.7 se tienen los valores del error obtenido entre la entrada aplicada al sistema lineal simulado con la salida de la inversa de Volterra de primer orden.

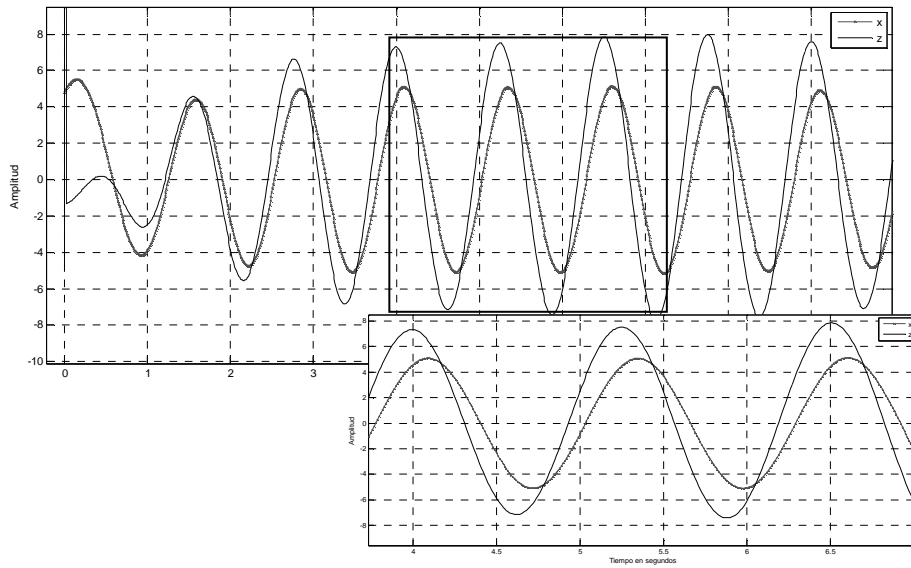


Figura 3.28: Entrada del sistema y salida de la Postinversa de Volterra del sistema lineal simulado. Fuente: Autor.

En la figura 3.29 se muestra en gris la señal de entrada al sistema lineal real y la salida del sistema lineal real en negro.

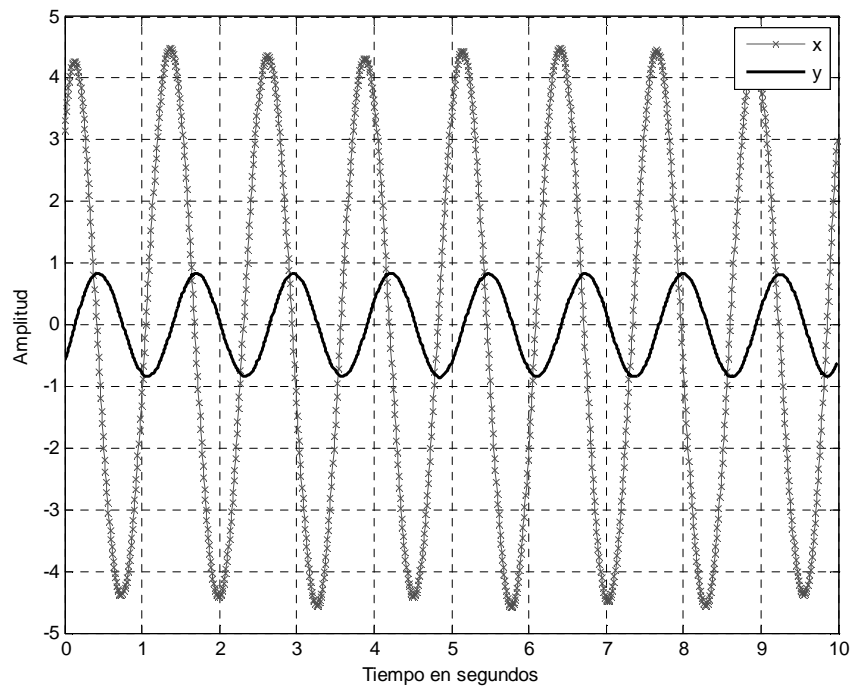


Figura 3.29: Entrada y salida del sistema lineal real. Fuente: Autor.

La figura 3.30, muestra la comparación de la respuesta obtenida de la Postinversa de Volterra de primer orden en gris con la señal aplicada al sistema en color negro.

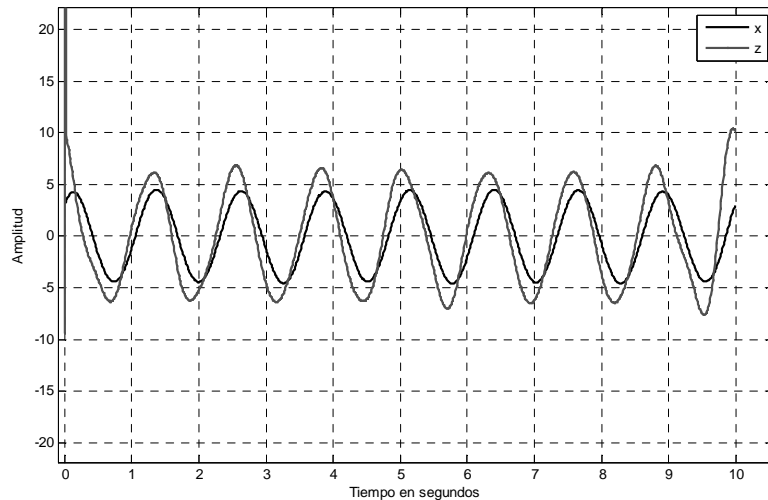


Figura 3.30: Entrada del sistema (x) y salida de la Postinversa (z) de Volterra del sistema lineal real. Fuente: Autor.

El error obtenido es mayor al 5%, tanto para el caso simulado como para el caso real, esto se debe a que los coeficientes de la ecuación diferencial corresponden a los parámetros identificados, así como, al ruido introducido en el sistema experimental, lo cuál perturba la señal.

Tabla 3.7: MSE de la inversa de primer orden.

	Frecuencia	Filtro	MSE
Sistema simulado	5 rad/s	6.12 rad/s	151.13
Sistema real	5 rad/s	6.12 rad/s	293.23

La Postinversa de Volterra también se construyó con los coeficientes de la ecuación (3.8) propuesta, la figura 3.31 muestra la comparación de la señal de entrada al sistema lineal real en negro (-) y en gris con asteriscos la salida de la postinversa de Volterra de primer orden.

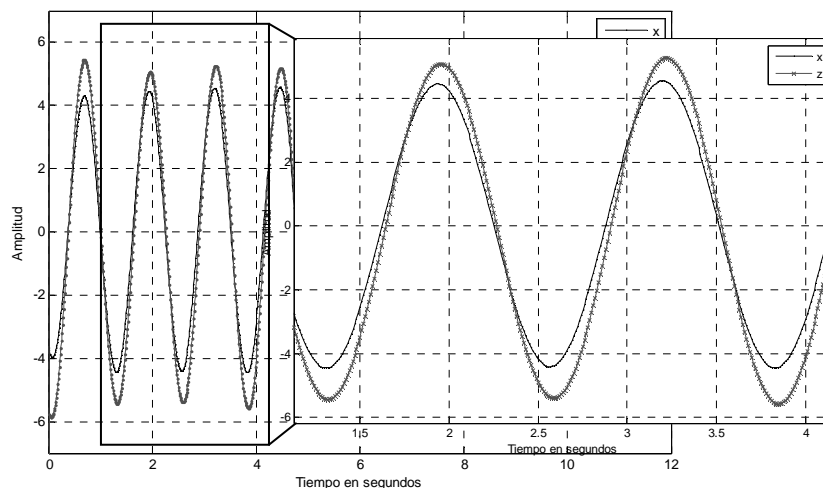


Figura 3.31: Entrada (x) del sistema y salida (z) de la Postinversa de Volterra del sistema lineal real propuesto. Fuente: Autor.

En la figura 3.32 se muestra la comparación de la señal de entrada al sistema simulado en negro (-) y en gris con asteriscos la salida de la inversa de Volterra de primer orden construida con los parámetros del sistema propuesto, también, el vector tiempo se generó con el comando linspace de matlab.

La tabla 3.8 muestra el error obtenido entre la señal de entrada aplicada al sistema con la salida de la Postinversa de Volterra, se puede ver que el error calculado es mayor que el límite aceptable, esto se debe principalmente a que el sistema analógico presenta ruido externo, así como inestabilidad.

Tabla 3.8: MSE de la inversa de primer orden del modelo propuesto.

	Frecuencia	Filtro	MSE
Sistema simulado	5 rad/s	6.27 rad/s	164.34
Sistema real	5 rad/s	6.13 rad/s	365.03

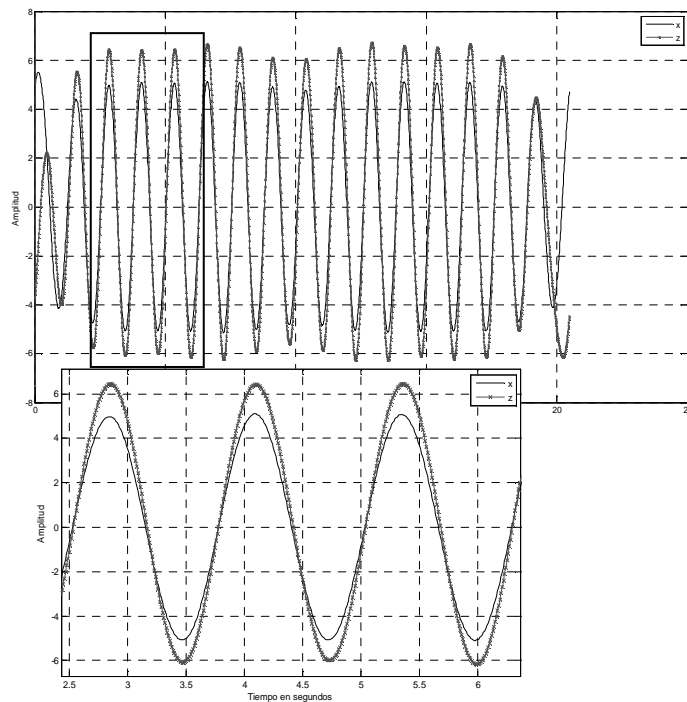


Figura 3.32: Entrada (x) del sistema y salida (z) de la Postinversa de Volterra del sistema lineal simulado propuesto. Fuente: Autor.

La figura 3.33 muestra el diagrama a bloques de la Postinversa de Volterra de tercer orden, para eliminar la no-linealidad del sistema no-lineal, el cual fue construido en simulink.

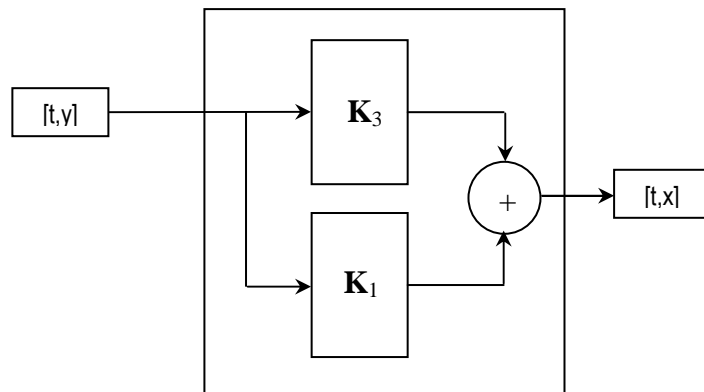


Figura 3.33: Diagrama de la Postinversa de Volterra. Fuente: Autor.

La Postinversa de Volterra de primer orden \mathbf{K}_1 se tiene en la figura 3.34.

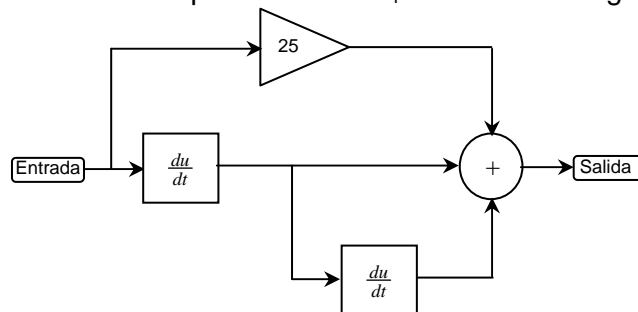


Figura 3.34: Sistema inverso \mathbf{K}_1 de Primer Orden. Fuente: Autor.

El sistema directo de primer orden \mathbf{H}_1 se tiene en la figura 3.35.

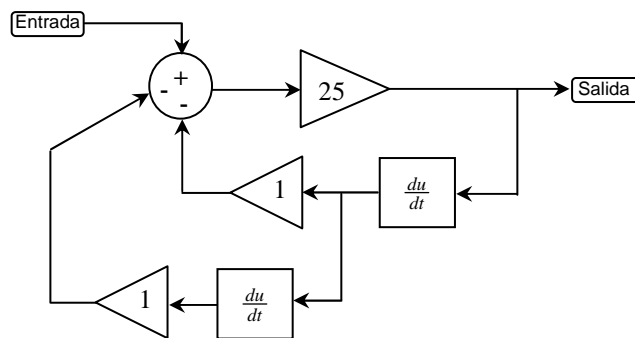


Figura 3.35: Sistema directo de Primer Orden, \mathbf{H}_1 . Fuente: Autor

Los bloques que forman la Postinversa de Volterra de tercer orden \mathbf{K}_3 se muestra en la figura 3.36.

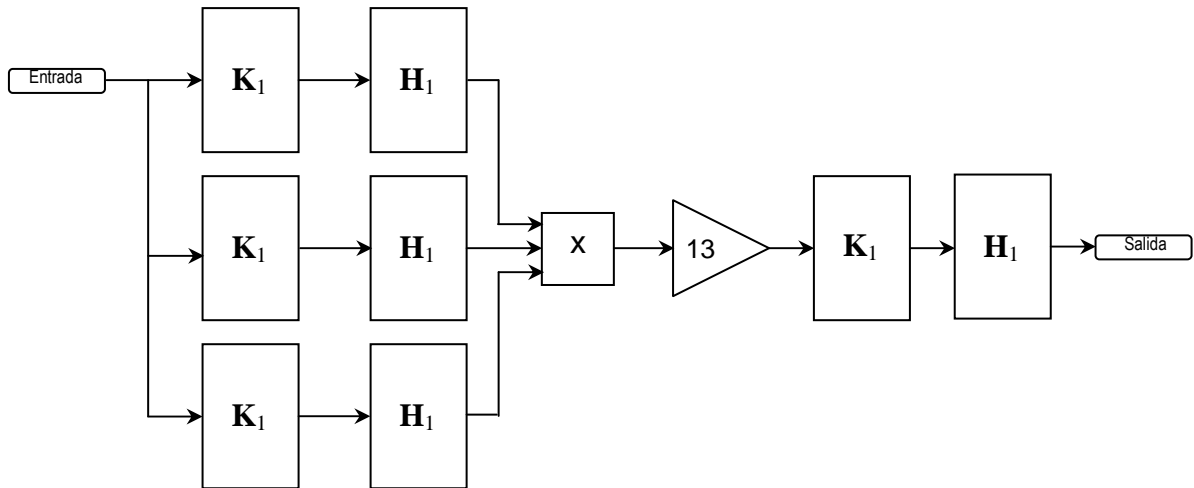


Figura 3.36: Inversa de Tercer Orden, K_3 . Fuente: Autor.

Se utilizó un vector tiempo generado con el comando linspace de matlab, las señales de entrada en gris y la salida en negro correspondientes al sistema no-lineal simulado, la cual se presenta en la figura 3.37.

Un filtro de 7.8 rad/s se aplicó a la señal de entrada y salida del sistema no-lineal, la señal filtrada se aplicó a la Postinversa de Volterra de tercer orden, la señal recuperada se muestra en la figura 3.38, la señal en negro es la señal aplicada al sistema no-lineal simulado y en gris se muestra la salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden.

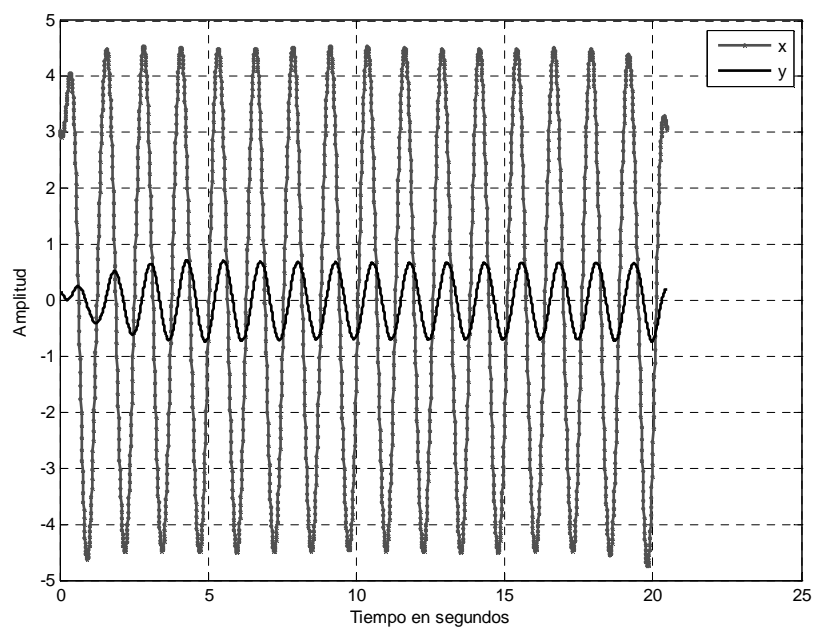


Figura 3.37: Entrada y salida del sistema no-lineal simulado. Fuente: Autor.

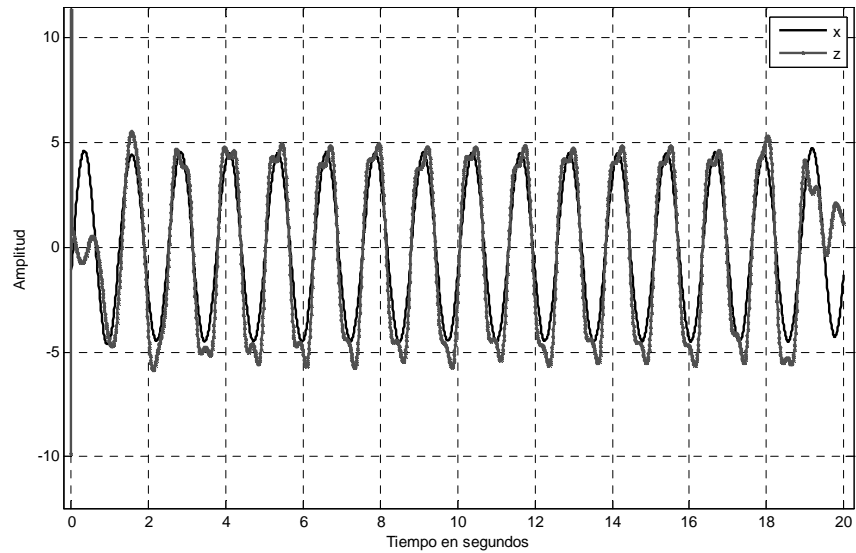


Figura 3.38: Respuesta de la inversa de Tercer Orden. Fuente: Autor.

El error calculado de las señales de la figura 3.38 se muestran en la tabla 3.9.

Los datos del sistema no-lineal real, también se aplicaron a la Postinversa de Volterra de tercer orden de manera continua, las señales obtenidas del circuito experimental se muestran en la figura 3.39, en gris la señal de entrada y en negro la salida del sistema.

El filtro aplicado a las señales de la figura 3.39 fue de 7.8 rad/s, la señal filtrada se aplicó a la Postinversa de Volterra del sistema no-lineal real, la señal de entrada aplicada al sistema no-lineal real se muestra en negro, la salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden está en gris mostrado en la figura 3.40.

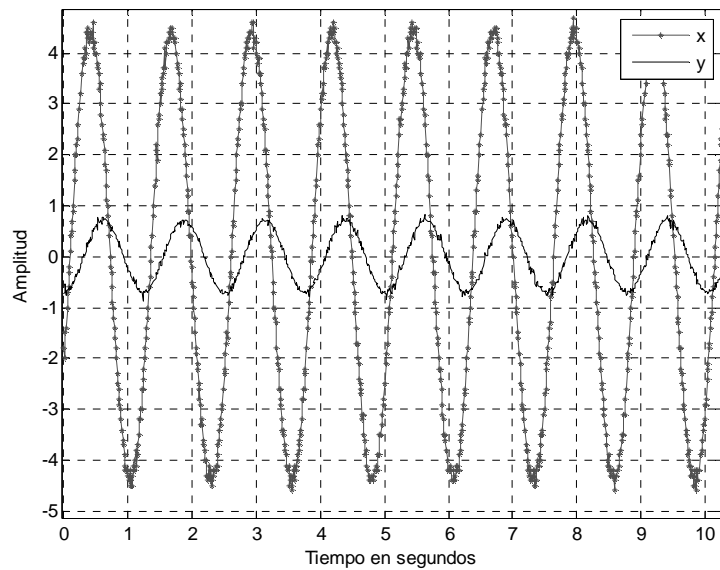


Figura 3.39: Entrada y salida del sistema no-lineal real. Fuente: Autor.

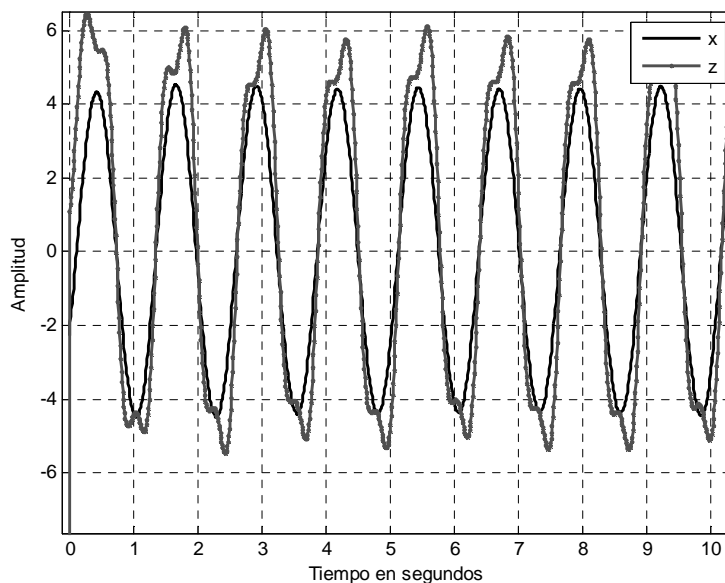


Figura 3.40: Respuesta de la inversa de Tercer Orden. Fuente: Autor.

Se observa recuperación parcial de la señal de entrada aplicada al sistema no-lineal, tanto de los datos simulados, como de los datos reales al implementar la Postinversa de Volterra de tercer orden de manera continua. Aunque la no-linealidad si fue eliminada, el ruido externo y la inestabilidad del sistema analógico no-lineal ocasionan que el error calculado en ambos sistemas sea mayor al límite aceptable.

Tabla 3.9: MSE de la inversa de tercer orden del sistema no-lineal

	Frecuencia	Filtro	MSE
Sistema simulado	5 rad/s	7.8 rad/s	58.35
Sistema real	5 rad/s	7.8 rad/s	71.46

3.8 IMPLEMENTACIÓN DE LA POSTINVERSA DE VOLTERRA AL SISTEMA NO LINEAL A PARTIR DE NARMAX

En esta última etapa se llevó a cabo la implementación de la Postinversa de Volterra discreta de tercer orden al sistema analógico no-lineal real y simulado, la obtención de la Postinversa de Volterra mediante modelos NARMAX se muestra en el anexo B.

La señal aplicada al sistema no-lineal simulado se muestra en gris, la salida en negro mostrado en la figura 3.41. La comparación de la señal de entrada al sistema en color negro y la salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden en gris se puede ver en la figura 3.42, la frecuencia que se utilizó fue de 5 rad/s.

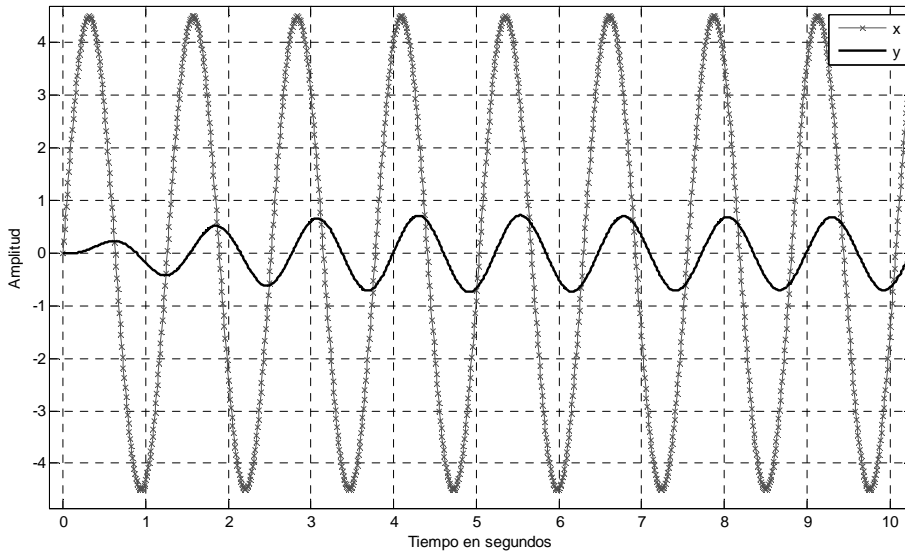


Figura 3.41: Entrada y salida del sistema no-lineal simulado, a 5 rad/s.
Fuente: Autor.

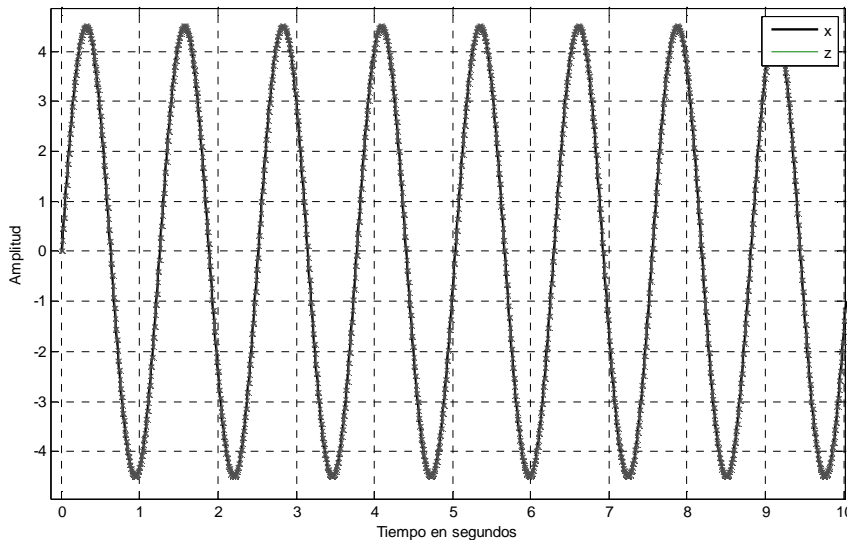


Figura 3.42: Entrada al sistema y salida de la Postinversa de tercer orden discreto del sistema simulado. Fuente: Autor.

En la tabla 3.10 se muestra el modelo empleado, así como el error obtenido de la señal de entrada aplicada al sistema con la salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden discreto.

Tabla 3.10: MSE de la Postinversa de tercer orden del sistema no-lineal simulado

	MODELO	MSE
1	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i + \chi y_{i-1}^2 + \eta y_{i-1}^3 = 0$	1.8566e-015

El error obtenido de la inversa es mucho menor del límite aceptable, además, se observa recuperación total de la señal de entrada. La Postinversa de Volterra también se implementó a los datos del sistema no-lineal real, en la figura 3.43 se muestra la señal de entrada y salida del sistema no-lineal real.

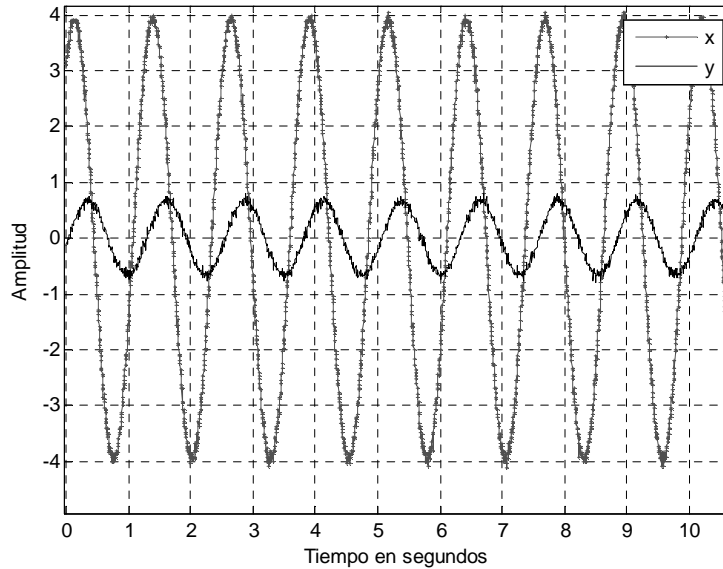


Figura 3.43: Señal de entrada en gris, salida en negro del sistema no-lineal real.
Fuente: Autor.

Al implementar la Postinversa de Volterra de tercer orden usando modelos NARMAX, se puede observar recuperación total de la señal de entrada mostrado en la figura 3.44, ambas señales se encuentran juntas, en negro la señal de entrada aplicada al sistema no-lineal y en gris la salida de la Postinversa de tercer orden.

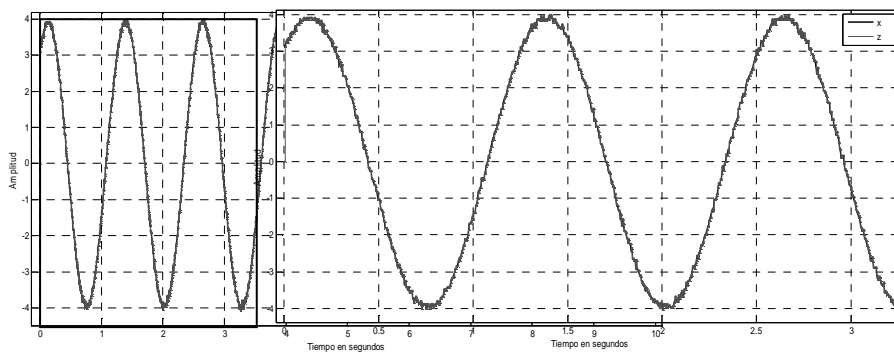


Figura 3.44: Entrada al sistema y salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden discreta. Fuente: Autor.

En la tabla 3.11 se muestra el modelo empleado, puesto que, la señal de entrada se recupera completamente, ambas señales son prácticamente iguales, y el error obtenido fue 1.13, esto indica que la inversa de Volterra discreta recupera por completo la señal sensada.

Tabla 3.11: MSE de la inversa de tercer orden del sistema no-lineal real.

	MODELO	MSE
1	$y_i + \alpha y_{i-1} + \beta y_{i-2} + \delta y_{i-3} + \gamma y_{i-4} + \epsilon x_i + \chi y_{i-1}^2 + \eta y_{i-1}^3 = 0$	1.13

DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL Y EQUIPO UTILIZADO

El sistema analógico diseñado para las pruebas experimentales, fue construido con el amplificador operacional UA741, potenciómetros de precisión con valores de $1\text{M}\Omega$ hasta $1\text{k}\Omega$, se emplearon capacitores cerámicos de $1\mu\text{F}$ en el sistema analógico lineal, el circuito integrado AD633 se utilizó para modelar la no-linealidad de tipo cúbico. Para alimentar los amplificadores operacionales se usó una fuente de Voltaje continua simétrica de $\pm 12\text{V}$. El equipo usado para generar las señales fue un generador de funciones arbitrarias de la serie AFG3000, para visualizar y guardar los datos de salida de ambos sistemas se usó un osciloscopio digital Tektronix de la serie TDS3000C.

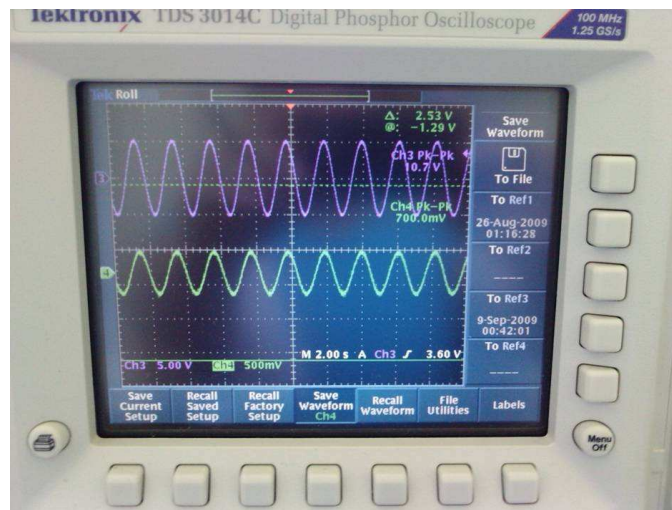


Figura 3.45: Osciloscopio. Fuente: Autor.



Figura 3.46: Generador de señales y fuente simétrica. Fuente: Autor.

PROCESADO DE LAS SEÑALES

En el sistema analógico simulado fue construido en el software Pspice versión 9.2 de la Familia Orcad, el análisis de las respuestas del sistema analógico real y simulado se llevó a cabo en Matlab versión 7.1 junto con simulink para construir la Inversa de Volterra.

Capítulo 4

Discusión de Resultados

4.1 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

- Las soluciones fueron eficientes con el uso de integradores en los sistemas analógicos, esto se puede ver en las figuras 3.14b, 3.14c, 3.14d, 3.16a, 3.16b y 3.16c, las salidas para frecuencias de 3,5 y 7rad/s tienen la misma tendencia que las simuladas, sólo varían en amplitud. La tabla 3.1 muestra el error cuadrático medio obtenido del sistema lineal para las tres frecuencias, el menor error fue para la frecuencia de 5 rad/s, la cual corresponde a la frecuencia natural, ya que, a esta frecuencia se tiene mayor amplitud de voltaje de salida, puesto que, la salida no es tan cercana a los niveles de ruido del amplificador operacional. En el sistema no-lineal, el menor error obtenido fue para la frecuencia de 3 rad/s, esto se debió principalmente a que la señal presentó menor inestabilidad en comparación con las frecuencias de 5 y 7rad/s mostradas en la tabla 3.2.
- La FRF del sistema lineal experimental mostró tener la misma tendencia que la FRF del modelo propuesto, esto se puede ver en la figura 3.15, su obtención se llevó a cabo mediante la aplicación de frecuencias individuales de 1 a 9 rad/s, tomando sólo la amplitud de la respuesta a cada frecuencia. Por lo tanto, el MSE no pudo ser obtenido debido a la diferencia del tamaño de los datos discretos con los reales. Se observa que la FRF del sistema experimental presentó menor amplitud a frecuencias cercanas a la frecuencia natural, que la FRF del sistema simulado, esto es ocasionado principalmente a que el sistema lineal experimental es afectado por ruido externo.
- El uso de ruido blanco como señal de excitación aplicado al sistema lineal experimental no se llevó a cabo, principalmente a las limitaciones del software del generador de funciones arbitrarias, ya que, no acepta niveles de amplitud mayores a 1Volt de ruido blanco, puesto que, la máxima amplitud de ruido blanco permitido en el software es de 1 Volt pico a pico, al hacer simulación con este nivel de amplitud, la salida del sistema se encuentra en amplitudes de microvolts, los cuales corresponden a niveles de amplitud de ruido del amplificador operacional, por lo tanto, la identificación de los parámetros modales se obtuvo de manera simulada en Pspice.
- Los coeficientes de la ecuación diferencial identificada mediante el método de ajuste de círculo fueron muy cercanas a los coeficientes de la ecuación diferencial propuesta 3.8, la cual se muestra en la ecuación 3.21, además, la

movilidad del sistema identificado tiene la misma tendencia que la movilidad del sistema propuesto en la ecuación 3.8.

- Se obtuvo mejor ajuste al introducir la no-linealidad en los datos correspondientes al sistema no-lineal experimental tanto para la frecuencia de 4 y 5 rad/s, esto se puede ver en la tabla 3.4 y 3.6. A una frecuencia de 4 rad/s el error calculado del ajuste a un modelo lineal fue de 25.73, al introducir la no-linealidad se obtuvo un error de 24.24 con dos retrasos en ambos casos, al aumentar el número de retrasos a 4, el error obtenido al ajustarlo a un modelo lineal fue de 16.93, al hacer el ajuste a un modelo lineal con términos exponenciales el error fue de 16.68, por lo tanto, se consiguió mejor ajuste de la señal al aumentar el número de retrasos a 4, así como al introducir términos exponenciales al modelo. El menor error calculado no difiere mucho del modelo lineal con dos retrasos agregando términos exponenciales, esto se debe a que la máxima ganancia diseñada en la no-linealidad fue de 13.
- La recuperación de la señal mediante el uso de la Postinversa de Volterra de primer orden en el sistema lineal fue parcial, básicamente se debió a que la inversa de Volterra se construyó con los parámetros identificados de la ecuación 3.20. En la figura 3.28 se muestra que la salida de la inversa de Volterra de primer orden tiene la misma tendencia que la señal de entrada aplicada al sistema lineal simulado, además se observa que varían en amplitud y ángulo de fase. La salida de la Postinversa de Volterra de primer orden del sistema lineal experimental mostrado en la figura 3.30, presenta retraso en el ángulo de fase y mayor amplitud, además, el error es mayor en comparación al error del sistema lineal simulado mostrado en la tabla 3.7, correspondiente al modelo identificado. Sin embargo, la salida de la Postinversa de Volterra de primer orden con el modelo propuesto muestra tener el mismo ángulo de fase, pero con diferente amplitud, tanto para el sistema simulado como experimental, así como mayor MSE del sistema experimental, esto es ocasionado por el ruido externo introducido e inestabilidad del sistema, lo cual se muestra en la tabla 3.8, por lo tanto, la recuperación de la señal de entrada en ambos casos fue parcial.
- La respuesta de la Postinversa de Volterra de tercer orden para el sistema no-lineal simulado mostró menor error que el sistema no-lineal experimental, esto se puede ver en la tabla 3.9. En la figura 3.38 se observa que la salida de la

Postinversa de Volterra de tercer orden correspondiente al sistema no-lineal simulado presenta el mismo ángulo de fase que la señal de entrada aplicada al sistema, aunque con algunas distorsiones en las amplitudes. La salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden del sistema no-lineal experimental mostrado en la figura 3.40, también presenta distorsiones en la amplitud de la señal, pero con el mismo ángulo de fase de la señal de entrada aplicada al sistema, el error calculado del sistema simulado y experimental que se muestra en la tabla 3.9 es mayor al 5%, el cual es considerado como límite aceptable, la no-linealidad se logra eliminar en ambos casos, pero las distorsiones presentadas en amplitud son ocasionadas por el ruido externo introducido que afecta principalmente al sistema experimental, así como, inestabilidad que presentan tanto el sistema analógico simulado como experimental. Por lo tanto, se obtuvo recuperación parcial de la señal en ambos casos, con mejor error en el sistema no-lineal simulado.

- Debido a las dificultades presentadas en la exacta identificación de los parámetros del sistema, se optó por utilizar modelos discretos de los operadores de Volterra inversos. La implementación de la Postinversa de Volterra discreta mostró mejores resultados que la Postinversa de Volterra continua, ya que, se obtuvo recuperación total de la señal del sistema no-lineal simulado y experimental, así como la eliminación de distorsiones. Esto se puede ver en la figura 3.42, la cual muestra la entrada del sistema y la salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden discreta a la frecuencia de 5 rad/s recuperada completamente, con un error de $1.85e-015$ mostrado en la tabla 3.10 para los datos del sistema no-lineal simulado, el error calculado entre la entrada del sistema no-lineal y la salida de la Postinversa de Volterra de tercer orden discreta del sistema experimental fue de 1.13 mostrado en la tabla 3.11, la señal recuperada se muestra en la figura 3.44.
- Por lo tanto, si un sistema no-lineal tiene una representación en series de Volterra, los operadores de Volterra directos e Inversos pueden ser calculados de manera sencilla a través de operadores lineales modelados como un conjunto de ELA's. En este trabajo se llevó a cabo el control de lazo abierto usando la estrategia de compensación mediante la construcción de la Postinversa de Volterra a un sistema lineal y no-lineal basado en las ELA's. Se implementaron dos enfoques diferentes, el primero fue la obtención de la

inversa de Volterra de manera continua mediante su construcción en simulink y la segundo de manera discreta con modelos NARMAX.

- El control de lazo abierto mediante la implementación de la Postinversa de Volterra basada en ecuaciones lineales asociadas de manera discreta, elimina distorsiones así como el comportamiento no-lineal, ya que, las figuras 3.42 y 3.44 muestran recuperación total de la señal de entrada aplicada al sistema.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 CONCLUSIONES

- La obtención de mayor ancho de banda mediante la implementación de la Postinversa de Volterra de manera continua y discreta no se obtuvo.
- La implementación de la Postinversa de Volterra continua de primer y tercer orden mostró recuperación parcial de las señales de entrada aplicadas al sistema analógico lineal y no-lineal.
- El control de lazo abierto mediante la implementación de la Postinversa de Volterra de tercer orden discreta, mostró recuperación total de la señal de entrada aplicada al sistema analógico no-lineal, tanto para el caso simulado como para el experimental.
- El control de lazo abierto mediante la implementación de la Postinversa de Volterra basada en Ecuaciones Lineales Asociadas, compensa pérdidas, elimina la inercia y los armónicos generados por la no-linealidad.

5.2 RECOMENDACIONES

- El sistema analógico lineal y no-lineal presentan inestabilidad, por lo tanto, se recomienda implementar técnicas de análisis de estabilidad, así como estabilizar ambos sistemas ó utilizar otro sistema experimental con comportamiento estable.
- Como trabajo futuro se pretende implementar la inversa de Volterra discreta a un sistema experimental estable de múltiples grados de libertad.

REFERENCIAS

- [1] Alexander, C. K. y Sadiku, M. N. O. (2001). *Fundamental of electric circuits*. McGraw-Hill, 2nd Edition.
- [2] Bendat, J.S., (1992). *Nonlinear Systems Techniques and Applications*, Wiley Interscience, New York, (ISBN:047116576x).
- [3] Biglieri, E., Barberis, S., Catena, M., (1988). *Analysis and Compensation of Nonlinearities in Digital Transmission Systems*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 6, No. 1, pp. 42-51.
- [4] Bodson, M., Chiasson, J., Novotnak, R., (1994). *High Performance Induction Motor Control via Input-Output Linearization*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 14, No. 4, pp. 25-33.
- [5] Box, G.E.P., Jenkins, G.M., (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, (Section 3.2).
- [6] Brown, G.S., Campbell, D.P., (1948). *Principles of Servomechanisms*. New York: Wiley.
- [7] Bush, V., Caldwell, S., (1945). "A new type of differential analyzer," *J. Franklin Inst.*, vol. 240, no. 4, pp. 255–326.
- [8] Bush, V., Hazen, H., (1931). "The differential analyzer: A new machine for solving differential equations," *J. Franklin Inst.*, vol. 212, no. 4, pp. 447–488.
- [9] Caughey, T.K. (1963), Equivalent linearisation techniques. *Journal of the Acoustical Society of America*. 35, 1706-1711.
- [10] Falconer, D.D., (1978). Adaptive equalization of channel nonlinearities in QAM data transmission systems, *Bell System Technology Journal* 57-7 2589–2611.
- [11] Ferreira, P. M., Faria, E. A. and Ruano, A. E. (2002). Neural network models in greenhouse air temperature prediction, *Neurocomputing*, Vol-43, Page 51-75.

- [12] Frank, W., Reger, R., Appel, U., (1992). Loudspeaker nonlinearities: analysis and compensation, in: 27th Asilomar Conference on Signals Systems and Computers, Pacific Grove, Universitat der Bunderwehr, Munchen, pp. 756–760.
- [13] Ghaderi, M., Kumar, S., Dodds, D.E., (1993). *Fast Adaptive Predistortion Lineariser Using Polynomial Functions*, Electronics Letters, Vol. 29, No. 17, pp. 1526-1528.
- [14] Gifford, S.J., (1989). Volterra series analysis of nonlinear structures, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Heriot-Watt University, (Sections 3.3, 6.5).
- [15] Haroon, M. y Adams, D.E. (2007). Time and frequency domain nonlinear system characterization for mechanical fault identification. *Nonlinear Dynamics*. 50, 387-408.
- [16] Hazen, H.L., (1934). "Theory of servo-mechanisms," *J. Franklin Inst.*, vol. 218, no. 3, pp. 279–331.
- [17] Holst, P.A., Philbrick, George A., Polyphemus, (1982). The first electronic training simulator," *Ann. History Comput.*, vol. 4, no. 2, pp. 143–156.
- [18] Howe, Robert M. (2005) *Fundamentals of the Analog Computer Circuits technology and simulation*, IEEE Control Systems Magazine.
- [10] Howe, Robert M. (2005) *Analog Computing in Academia and Industry*, IEEE Control Systems Magazine.
- [20] Hsu, P. H., (1998). *Análisis de Fourier*. Prentice - Hall 1a ed.
- [21] Iwan, W.D. (1973). A generalization of the concept of equivalent linearization. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 8, 279-287.
- [22] Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A. F., (2005). Review past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics.
- [23] Korenberg, M., Billings, S.A., Liu, Y.P., McIlroy, P.J., (1988). An orthogonal parameter estimation algorithm for nonlinear stochastic systems, *International Journal of Control* 48, 193–210 (Sections 3.2, 6.3).

- [24] Korenberg, M.J., Paarmann, L.D., (1991). *Orthogonal Approaches to Time-Series Analysis and System Identification*, IEEE Signal Processing Magazine, pp. 29-43.
- [25] Lazzarin, G., Pupolin, S., Sarti, A., (1994). Nonlinearities compensation in digital radio systems, IEEE Transactions on Communication 988–998.
- [26] Leontaritis, I.J., Billings, S.A., (1985). Input-output parametric models for nonlinear systems, part I: deterministic nonlinear systems, International Journal of Control 41, 303–328 (Sections 3.2, 6.3).
- [27] Leontaritis, I.J., Billings, S.A., (1985). Input-output parametric models for nonlinear systems, part II: stochastic nonlinear systems, International Journal of Control 41, 329–344 (Sections 3.2, 6.3).
- [28] Lovell, C.A., (1947). “Continuous electrical computation,” *Bell Lab. Rec.*, vol. 25, no. 3, pp. 114–118.
- [29] Malatkar, P., Nayfeh, A.H. (2003). On transfer of energy between widely spaced modes in structures. *Nonlinear dynamics*. 31, 225-242.
- [30] Manson, G., Worden, K., Tomlinson, G.R., (1994). Pseudo-fault induction and harmonic suppression in engineering structures, in: *Proceedings of Smart Structures and Materials*, SPIE 2191, Orlando, Florida, pp. 499–510.
- [31] Mathews, V.J., (1991). *Adaptive Polynomial Filters*, IEEE Signal Processing Magazine, pp. 10-26.
- [32] Mesiya, M.F., Mc Lane, P.J., Campbell, L.L., (1973). Maximum likelihood receiver for carrier-modulated data transmission systems, IEEE Transactions in Communication Com-32 624–636.
- [33] Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control Moderna*. Prentice - Hall 3a ed.
- [34] Philbrick, G.A., (1948). “Designing industrial controllers by analog,” *Electronics*, vol. 21, no. 6, pp. 108–111.

- [35] Ragazzini, J.R., Randall, R.H., Russell, F.A., (1947). "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits," *Proc. IRE*, vol. 35, no. 5, pp. 444–452.
- [36] Rhee, S.H., Tsang, P.H.S., Yen, S.W., (1989). "Friction-induced noise and vibrations of disc brakes". *Wear* 133, pp. 39–45.
- [37] Sedra, A. S., Smith, K. C.(2006). *Circuitos Microelectrónicos*. McGraw-Hill 5a ed.
- [38] Schetzen, M. (1980). *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, Wiley-Interscience Publications, New York, ISBN 0471044555.
- [39] Simon, M., Tomlinson, G.R. (1984). Application of the Hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration*. 90, 275-282.
- [40] Sicuranza, G.L., (1992). *Quadratic Filters for Signal Processing*, Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 8, pp. 1263-1285.
- [41] Stapleton, S.P., Costescu, F.C., (1992). *An Adaptive Predistorter for a Power Amplifier Based on Adjacent Channel Emissions*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 41, No. 1, pp. 49-56.
- [42] Stapleton, S.P., Kandola, G.S., Cavers, J.K. (1992). *Simulation and Analysis of an Adaptive Predistorter Utilizing a Complex Spectral Convolution*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 41, No. 4, pp. 387-394.
- [43] Storer, D.M. (1991). Dynamic analysis of nonlinear structures using higher order frequency response functions, Ph.D. Thesis, Department of Engineering, University of Manchester, (Sections 3.3, 6.5).
- [44] Storer, D.M., Tomlinson, G.R. (1993). Recent developments in the measurements and interpretation of higher order functions from nonlinear structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 7, 173-189.
- [45] Theocharis, J., Petridis, V., (1994). *Neural Network Observer for Induction Motor Control*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 14, No. 2, pp. 26-37.

- [46] Truitt, T.D., (1964). "Hybrid computation: What is it? Who needs it?" *IEEE Spectr.*, vol. 1, no. 6, pp. 132–146.
- [47] Uchino, K., (1997). *Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors*, Kluwer Academic Publishers, Boston, ISBN 0792398114.
- [48] Vazquez-Feijoo, J.A., Worden, K., Stanway, R., (2000). On perturbation expansion and the Volterra series, in: *Proceedings of the Seventh International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, pp. 415–426.
- [49] Vazquez Feijoo, J.A., Worden, K., Stanway, R. (2004). System identification using associated linear equations. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 18, 431-455.
- [50] Vazquez Feijoo, J.A., Worden, K., Stanway, R. (2005). Associated Linear Equations for Volterra operators. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 19, 57-69.
- [51] Vazquez Feijoo, J.A., Worden, K., Stanway, R. (2006). Analysis of time – invariant systems in the time and frequency domain by associated linear equations (ALEs). *Mechanical Systems and Signal Processing*. 20, 896 - 919.
- [52] Vazquez Feijoo, J.A., Worden, K., Stanway, R. (2007). Transformation of a sensor or actuator system into a unitary gain element. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 21, 3088 - 3107.
- [53] Wickens, A. H., (1979). Flutter and divergence instabilities in systems of railway wheelsets with semi-rigid articulation, *Vehicle System Dynamics* 8-1 33–48.
- [54] Worden, K., Bullough, W.A., Haywood (2002). *Smart Technologies*, World Scientific, Singapore, ISBN 9810247761.
- [55] Worden, K., Manson, G., Tomlinson, G.R., (1997). A harmonic probing algorithm for the multi-input Volterra Series, *Journal of Sound and Vibration* 201 (1) 67–84
- [56] Zhang, H., Billings, S.A., (1993). Analysing non-linear systems in the frequency domain, I: the transfer function, *Mechanical Systems and Signal Processing* 7 (6) 531–550.

[57] Zhang, H., Billings, S.A., (1994). Analysing nonlinear systems in the frequency domain, II: the phase response, *Mechanical Systems and Signal Processing* 8-1 45–62.

[58] Ziegler, J.G., Nichols, N.B., (1942). “Optimum settings for automatic controllers,” *Trans. ASME*, vol. 64, pp. 759–768.

[59] Zuch, E.L., (1977). “Where and when to use which data converter,” *IEEE Spectr.*, vol. 14, no. 6, pp. 39–42.

ANEXO A

La obtención de la Postinversa de Volterra se basó en las ELA's, por lo que a continuación se muestra la obtención de los operadores inversos de primero hasta tercer orden de manera continua.

Calculando el operador inverso de primer Orden:

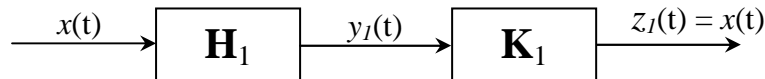


Figura A.1: Sistema lineal directo e inverso. Fuente: Autor.

La entrada al sistema \mathbf{H}_1 es:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} \quad (\text{A.1})$$

La salida y_1

$$y_1(t) = \mathbf{H}_1(\omega)Ae^{i\omega t} \quad (\text{A.2})$$

La salida de la inversa de primer orden:

$$z_1 = \mathbf{K}_1(\omega)y_1 \quad (\text{A.3})$$

$$z_1 = \mathbf{K}_1(\omega)\mathbf{H}_1(\omega)Ae^{i\omega t} \quad (\text{A.4})$$

pero, $z_1 = x(t)$:

Puesto que la salida de la inversa de primer orden debe ser igual a la entrada del sistema, se hace lo siguiente:

$$x(t) = \mathbf{K}_1(\omega)\mathbf{H}_1(\omega)Ae^{i\omega t}; \quad x(t) = Ae^{i\omega t} \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo (A.1) en (A.5) y despejando \mathbf{K}_1 :

$$1 = \mathbf{K}_1(\omega)\mathbf{H}_1(\omega)Ae^{i\omega t}$$

$$\mathbf{K}_1(\omega) = 1/\mathbf{H}_1(\omega) \Rightarrow \mathbf{K}_1(\omega) = [\mathbf{H}_1(\omega)]^{-1} \quad (\text{A.6})$$

De la ecuación diferencial lineal que modela al sistema lineal:

$$\ddot{y}(t) + A\dot{y}(t) + By(t) = x(t) \quad (\text{A.7})$$

Pasamos (A.7) al dominio de la frecuencia mediante el método de prueba armónica

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + Ai\omega + B} \quad (\text{A.8})$$

La inversa de Volterra obtenida en el dominio de la frecuencia de (A.8) es:

$$\mathbf{K}(\omega) = 1/\mathbf{H}(\omega) = -\omega^2 + Ai\omega + B \quad (\text{A.9})$$

Multiplicando (A.9) por $x(t) = e^{i\omega t}$

$$\underbrace{\mathbf{K}(\omega)e^{i\omega t}}_{z_1} = Be^{i\omega t} - \omega^2 e^{i\omega t} + Ai\omega e^{i\omega t} \quad (\text{A.10})$$

$$z_1 = \ddot{x}(t) + A\dot{x}(t) + Bx(t) \quad (\text{A.11})$$

$$z_1(y_1) = \ddot{y}_1(t) + A\dot{y}_1(t) + By_1(t) \quad (\text{A.12})$$

$$\ddot{y}_1(t) + A\dot{y}_1(t) + By_1(t) = x(t) \quad (\text{A.13})$$

z_1 debe ser igual a $x(t)$, por lo que los demás términos deben ser cero:

$$\text{Si } z_1(y_1) = x(t)$$

$$z_i(y_i) = 0 \quad \therefore \quad z = \sum z_i = x(t)$$

Calculando el operador inverso de segundo Orden, la figura A.2 muestra el diagrama de la inversa de segundo orden:

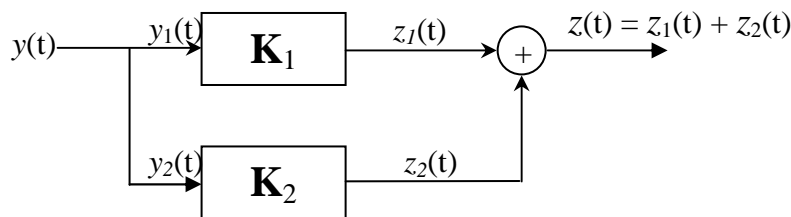


Figura A.2: Inversa de Volterra de segundo orden. Fuente: Autor.

Calculando z_1 :

$$z_1 = \mathbf{K}_1[y_1] + \mathbf{K}_1[y_2] + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{K}_1[y_i] \quad (\text{A.14})$$

Calculado z_2 :

$$z_2 = \mathbf{K}_2[y_1, y_2] + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} [y_i, y_j] \quad (\text{A.15})$$

Sumando todas las ecuaciones (A.14) y (A.15) e igualando a cero:

$$\mathbf{K}_1[y_2] + \mathbf{K}_2[y_1, y_1] = 0 \quad (\text{A.16})$$

Despejamos \mathbf{K}_2 :

$$\mathbf{K}_2\{y_1, y_1\} = -\mathbf{K}_1[y_2] \quad (\text{A.17})$$

Añadiendo a (A.17) \mathbf{K}_1 a y_1 :

$$\mathbf{K}_2\{\mathbf{K}_1[y_1], \mathbf{K}_1[y_1]\} = -\mathbf{K}_1[y_2\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_1\}] \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{K}_2\{x(t),x(t)\} = -\mathbf{K}_1[y_2\{\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_1\}] \quad (\text{A.19})$$

El operador inverso de segundo orden calculado es:

$$z_2 = -\mathbf{K}_1[y_2\{\mathbf{K}_1[y],\mathbf{K}_1[y]\}] \quad (\text{A.20})$$

Construyendo en bloques z_2 , queda como se muestra en la figura (A.3).

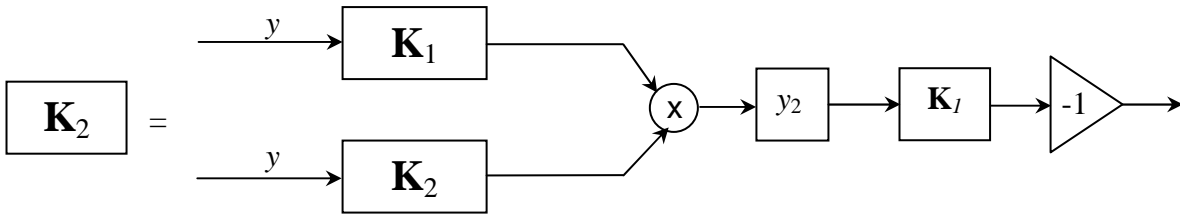


Figura A.3: Eliminación del operador inverso de segundo orden. Fuente: Autor.

A continuación, se calcula la inversa de 3er orden:

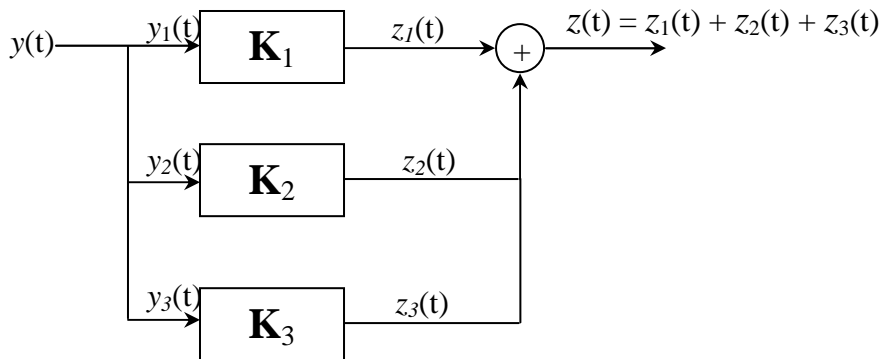


Figura A.4: Inversa de Volterra de tercer orden. Fuente: Autor.

Calculando la salida $z_1, z_2, z_3, :$

$$z_1 = \mathbf{K}_1[y_3] \quad (\text{A.21})$$

$$z_2 = 2\mathbf{K}_2[y_1, y_2] \quad (\text{A.22})$$

$$z_3 = \mathbf{K}_3[y_1, y_1, y_1] \quad (\text{A.23})$$

Sumando las ecuaciones (A.21) hasta la (A.23) e igualando a cero:

$$\mathbf{K}_1[y_3] + 2\mathbf{K}_2[y_1, y_2] + \mathbf{K}_3\{y_1, y_1, y_1\} = 0 \quad (\text{A.24})$$

Despejamos \mathbf{K}_3 :

$$\mathbf{K}_3\{y_1, y_1, y_1\} = -\mathbf{K}_1[y_3] - 2\mathbf{K}_2[y_1, y_2] \quad (\text{A.25})$$

Multiplicando (A.25) por \mathbf{K}_1

$$\mathbf{K}_3\{\mathbf{K}_1[y_1], \mathbf{K}_1[y_1], \mathbf{K}_1[y_1]\} = -\mathbf{K}_1[y_3\{\mathbf{K}_1[y_1], \mathbf{K}_1[y_1], \mathbf{K}_1[y_1]\}] - 2\mathbf{K}_2\{y_1[\mathbf{K}_1], y_2[\mathbf{K}_1]\} \quad (\text{A.26})$$

El operador inverso de tercer orden calculado queda como:

$$\mathbf{K}_3\{x(t), x(t), x(t)\} = -\mathbf{K}_1[y_3\{\mathbf{K}_1[y_1], \mathbf{K}_1[y_1], \mathbf{K}_1[y_1]\}] - 2\mathbf{K}_2\{y_1[\mathbf{K}_1], y_2[\mathbf{K}_1]\} \quad (\text{A.27})$$

El diagrama a bloques del operador de tercer orden se muestra en la figura A.5:

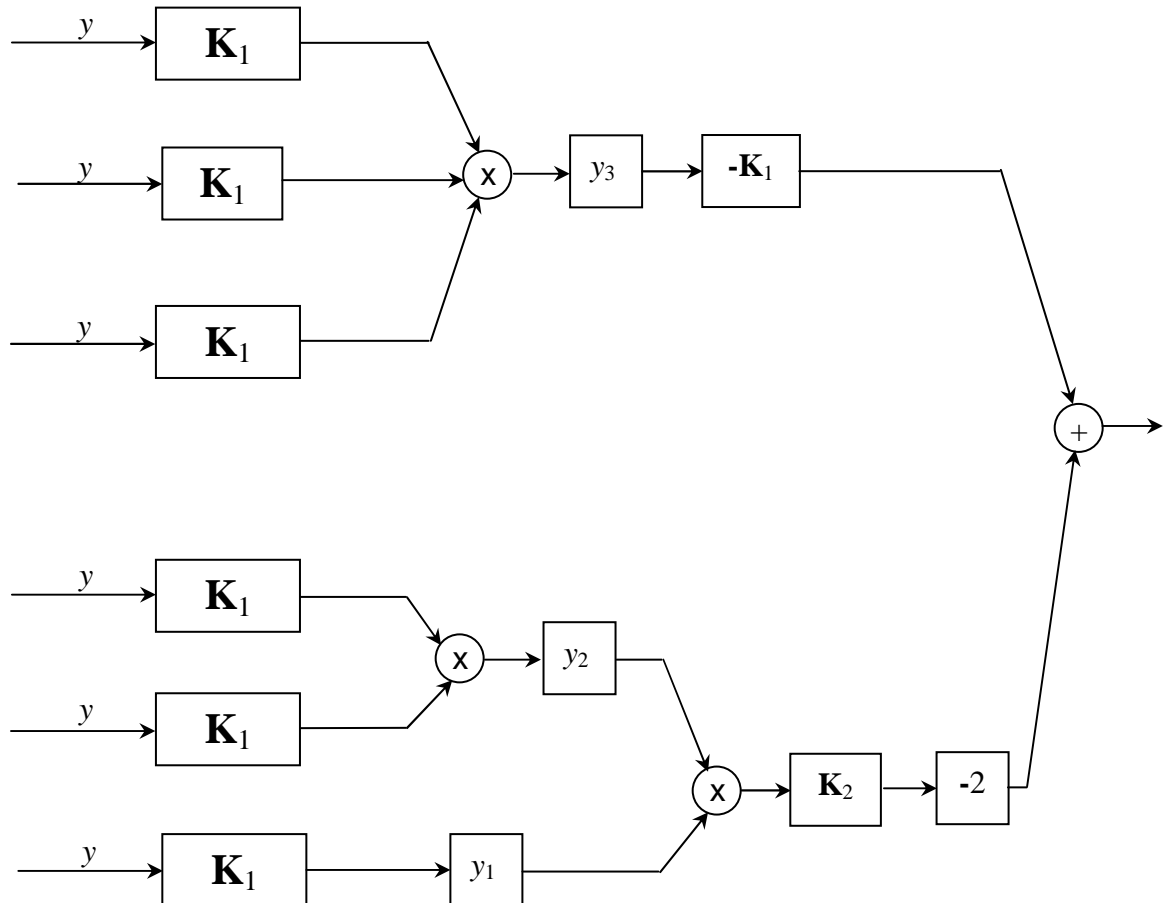


Figura A.5: Control de lazo abierto para un sistema no-lineal de tercer orden.
Fuente: Autor.

ANEXO B

Obtención de la inversa de Volterra de manera discreta

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + a_3 y_{i-1}^3 + b_1 x_i + a_4 y_{i-1}^2 \quad (\text{B.1})$$

Recordemos que

$$y_i = \sum_{n=1}^{\infty} y_{in} \quad (\text{B.2})$$

Sustituyendo (B.2) en (B.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_{in} = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} y_{i-1n} + a_2 \sum_{n=1}^{\infty} y_{i-2n} + a_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_{i-1n} \right)^3 + b_1 x_i + a_4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_{i-1n} \right)^2 \quad (\text{B.3})$$

Desarrollando los términos del lado izquierdo y derecho, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_{in} = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} y_{i-1n} + a_2 \sum_{n=1}^{\infty} y_{i-2n} + a_3 (y_{i-11}^3 + y_{i-12}^3 + \dots + y_{i-1\infty}^3 + 3y_{i-11}y_{i-12}^2 + 3y_{i-11}^2 y_{i-12} + \dots) + b_1 x_i + a_4 (2y_{i-11}y_{i-12} + \dots) \quad (\text{B.4})$$

Ordenando en operadores de Volterra:

Operador de Primer Orden	$y_{1i} = a_1 y_{1i-1} + a_2 y_{1i-2} + b_1 x_i$	(B.5)
Operador de Tercer Orden	$y_{3i} = a_1 y_{3i-1} + a_2 y_{3i-2} + a_3 y_{1i-1}^3$	(B.6)
Operador de Quinto Orden	$y_{5i} = a_1 y_{5i-1} + a_2 y_{5i-2} + 3a_3 y_{1i-1}^2 y_{3i-1}$	(B.7)

Al sumar todos los operadores de Volterra, el resultado es:

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + a_3 y_{i-1}^3 + b_1 x_i + a_4 y_{i-1}^2 \quad (\text{B.8})$$

Calculando los operadores Inversos de Volterra

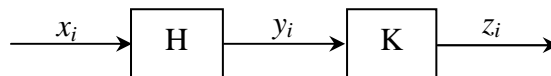


Figura B.1: Inversa de Primer orden discreta. Fuente: Autor.

De la ELA discreta de primer orden:

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + a_3 y_{i-1}^3 + b_1 x_i \quad (\text{B.9})$$

Despejando x_i de B.9

$$y_i - a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} = b_1 x_i$$

$$x_i = \frac{y_i}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} y_{i-1} + \frac{a_2}{b_1} y_{i-2} \quad (\text{B.10})$$

Pero $z_{1i} = x_i$ por lo tanto:

$$z_{1i} = \frac{y_i}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} y_{i-1} - \frac{a_2}{b_1} y_{i-2} \quad (\text{B.11})$$

De la ecuación del Oscilador de Duffing en tiempo discreto

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + a_3 y_{i-1}^3 + b_1 x_i \quad (\text{B.12})$$

Despejando x_i de (B.12)

$$x_i = \frac{y_i}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} y_{i-1} - \frac{a_2}{b_1} y_{i-2} - \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 \quad (\text{B.13})$$

Sustituyendo (B.11) en (B.13), tenemos:

$$x_i = z_{1i} - \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 \quad (\text{B.14})$$

Despejando z_{1i} de (B.14)

$$z_{1i} = x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 \quad (\text{B.15})$$

De $z_{1i} = x_i$, sustituyendo (B.15) en (B.12)

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + a_3 y_{i-1}^3 + b_1 \left(x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 \right) \quad (\text{B.16})$$

Desarrollando (B.16)

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + a_3 y_{i-1}^3 + b_1 x_i + a_3 y_{i-1}^3 \quad (\text{B.17})$$

La postinversa de tercer orden es:

$$K_3[y(t)] = -K_1[H_3\{K_1[y(t)], K_1[y(t)], K_1[y(t)]\}] \quad (\text{B.18})$$

Convirtiendo (B.18) en tiempo discreto, de donde:

$$K_3 = z_3; K_1 = z_1; H_3 = y_3$$

$$z_3[x(t)] = -z_1[y_3\{z_1[y_i], z_1[y_i], z_1[y_i]\}] \quad (\text{B.19})$$

Pero la salida $z_1[y_i] = x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3$, por lo tanto:

$$z_{3i} = -z_{1i}[y_{3i}\{x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3, x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3, x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3\}] \quad (\text{B.20})$$

y_{3i} es la ELA discreta de tercer orden:

$$y_{3i} = a_1 y_{3i-1} + a_2 y_{3i-2} + a_3 y_{3i-1}^3 \quad (\text{B.21})$$

De la ecuación (B.19) $-z_1[y_{3i}]$

Siguiendo la ecuación B.17

$$z_{1i} = \frac{y_{3i}}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} y_{3i-1} - \frac{a_2}{b_1} y_{3i-2} \quad (\text{B.22})$$

De la ecuación (B.22), despejamos $a_3 y_i^3$

$$a_3 y_{i-1}^3 = y_{3i} - a_1 y_{3i-1} - a_2 y_{3i-2} \quad (\text{B.23})$$

Dividiendo (B.23) entre b_1

$$\frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 = \frac{y_{3i}}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} y_{3i-1} - \frac{a_2}{b_1} y_{3i-2} \quad (\text{B.24})$$

Las Ecuaciones (B.22) y (B.24) son iguales, sustituyendo (B.22) en (B.24), tenemos:

$$\frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 = -z_{3i} \left[y_{3i} \left\{ x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3, x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3, x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 \right\} \right] \quad (\text{B.25})$$

sustituyendo $z_{3i}[x_i]$ de (B.20) en (B.25):

$$z_{3i} = -\frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 \quad (\text{B.26})$$

La salida total z es igual a la suma de:

$$z_i = z_{1i} + z_{3i} \quad (\text{B.27})$$

sumando (B.15) con (B.26)

$$z_i = x_i + \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 - \frac{a_3}{b_1} y_{i-1}^3 \quad (\text{B.28})$$

$$z_i = x_i \quad (\text{B.29})$$

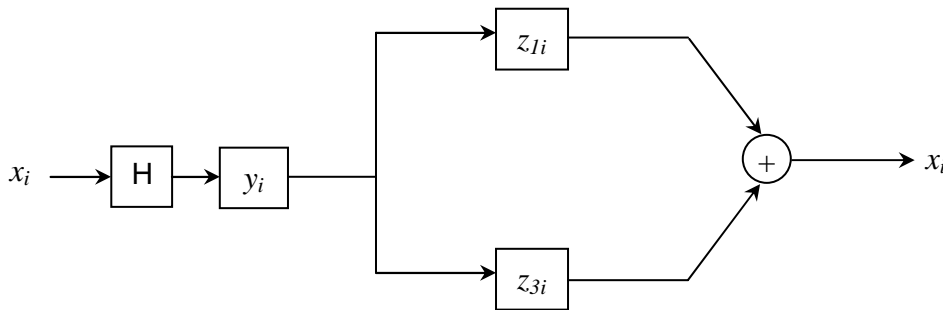


Figura B.2: Inversa de Tercer orden discreta. Fuente: Autor.