



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**



**CENTRO INTERDISCIPLINARIO DE  
INVESTIGACIÓN PARA EL DESARROLLO  
REGIONAL INTEGRAL**

**UNIDAD OAXACA**

**Maestría en ciencias en conservación y aprovechamiento de recursos  
naturales**

Especialidad en Ingeniería

**“INCREMENTO DEL ANCHO DE BANDA Y RANGO DE MEDICIÓN DE UN  
ACELERÓMETRO PIEZOELECTROSTICTIVO”**

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestro en ciencias

Presenta: Vladimir Cortés Lerín

Directores de tesis:

Dr. Vazquez Feijoo Juan Alejandro

Dr. Pech Pérez Andrés

Diciembre de 2012



# INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

## ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez siendo las 13:00 horas del día 27 del mes de noviembre del 2012 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del **Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca (CIIDIR-OAXACA)** para examinar la tesis de grado titulada: "Incremento del ancho de banda y rango de medición de un acelerómetro piezoelectrostictivo"

Presentada por el alumno:

**Cortés**

Apellido paterno

**Lerín**

materno

**Vladimir**

nombre(s)


Con registro: 


B	1	0	1	7	4	3
---	---	---	---	---	---	---


aspirante al grado de: **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES**


Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

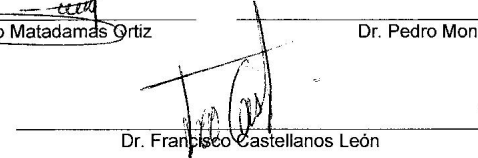
### LA COMISION REVISORA Directores de tesis:

  
Dr. Juan Alejandro Vazquez Feijoo


  
Dr. Andrés Pech Pérez

  
Dr. Pastor Teodoro Matadams Ortiz

  
Dr. Pedro Montes García

  
Dr. Francisco Castellanos León

### EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

  
Dr. Raquel Pérez Pacheco



CENTRO INTERDISCIPLINARIO  
DE INVESTIGACION PARA EL  
DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL  
CIIDIR  
UNIDAD OAXACA  
IPN





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESION DE DERECHOS*

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez el día 27 del mes noviembre del año 2011, el (la) que suscribe **Cortés Lerín Vladimir** alumno (a) del Programa de **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES** con número de registro **B101743**, adscrito al Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dres. Juan Alejandro Vazquez Feijoo y Andrés Pech Pérez y cedé los derechos del trabajo titulado: "Incremento del ancho de banda y rango de medición de un acelerómetro piezoelectrostictivo" al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **Calle Hornos 1003, Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca**, e-mail: [posgradoax@ipn.mx](mailto:posgradoax@ipn.mx) ó [vlclin@hotmail.com](mailto:vlclin@hotmail.com) Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

**Cortés Lerín Vladimir**



CENTRO INTERDISCIPLINARIO  
DE INVESTIGACION PARA EL  
DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL  
C.I.I.D.I.R.  
UNIDAD OAXACA  
I.P.N.

## Resumen

La exactitud y precisión de un sistema sensor, se ve afectada por las pérdidas energéticas de la señal de entrada y por la inercia propia del sistema. Por otro lado, al salir del rango en el que es sistema puede aproximarse a un sistema lineal, la salida empieza a presentar componentes que provocan la pérdida de proporcionalidad del sensor. Como ejemplo de estos componentes se puede mencionar la presencia en la salida de armónicos de las frecuencias de entrada. Esto dificulta la extracción del valor real a medir y por tanto se considera que el rango del sensor, está limitado al nivel energético de la entrada en la que el sensor puede aproximarse a un comportamiento lineal.

En recientes trabajos se presenta una forma de control de lazo abierto, en la cual se coloca en serie el sistema con su inversa de Volterra esto produce un nuevo sistema que es virtualmente un elemento de ganancia unitaria. Es decir la señal de entrada es igual a la señal de salida. Con lo que se espera lograr eliminar la generación de armónicos, compensar pérdidas y eliminar la inercia.

El presente trabajo aplica este control de lazo abierto a un acelerómetro con elemento piezoeléctrico. Este tipo de acelerómetros presenta histéresis en su intercambio energético mecánico-eléctrico. Aunque propiamente por no ser un sistema de Volterra, no se podría aplicar una inversa de Volterra, pero gracias a el uso de las Ecuaciones Lineales Asociadas (ELAs) esto sí puede ser posible. De hecho el acelerómetro es tratado como un sistema de Volterra tipo Wiener, para lo cual se ajusta el comportamiento histerético a un polinomio de tercer orden con coeficientes dependientes de la amplitud. Debido a que este tipo de sistema no se había tratado anteriormente, se generó la metodología apropiada para obtener su inversa de Volterra. Esta inversa de Volterra es materializada por versiones discretas de las ecuaciones lineales asociadas (modelos No-lineales Auto-Regresivos con entrada exógenas NARXs). Se encontró las ELAs tanto para el sistema como para su inversa.

El trabajo validó este control de lazo abierto sobre un modelo simulado de acelerómetro y sobre un acelerómetro piezoeléctrico real diseñado con la dinámica apropiada para poder identificarlo con las limitaciones del equipo de toma de datos disponibles. Para ambos casos, se demuestra que el sistema se comporta muy aproximadamente como un elemento de ganancia unitaria, para un rango mayor al nominal (rango lineal) y un ancho de banda mucho más grande, el cual está limitado solamente por la capacidad de los modelos NARXs asociada a la rapidez de la toma de datos.

## Abstract

The accuracy of a sensor system is affected by the energy losses and the system inertia. On the other hand, when the system is excited beyond the limit in which the system can be considered to be linear, there are output components that produce the loss of proportionality of the sensor response. For example, the output may contain harmonics of the input signal. These harmonics make difficult to extract the real measured value and therefore, this proportional range (linear range) is also considered the sensor range of measuring.

Recent Works presents a novel method of open loop control. This method consists in connect in tandem a system with its postinverse Volterra. This array produces a new system that is virtually an element of unitary gain. This implies that the system output is identical to the input. The meaning of this is that the losses are compensated; the system inertia disappears and the harmonics are eliminated.

This work applies this open loop control on an accelerometer with piezoelectric element. This kind of accelerometers exhibits hysteresis due the mechanical-electrical energy interchange. Even though, because of the hysteresis this system is not Volterra kind (therefore no inverse Volterra can be found), by means of the Associated Linear Equations is possible to find the inverse Volterra. In fact, the accelerometer is treated as a Volterra system of Wiener kind. To be able to do this, the hysteresis is modeled by a third degree polynomial with amplitude dependent coefficients. Because the Wiener systems never have been treated by ALEs, it was necessary to develop the appropriate methodology. The inverse Volterra is built by discrete versions of the ALEs (AutoRegressive with exogenous inputs ARX). The ALEs were found for both system and inverse.

This open loop strategy is validated by a simulated accelerometer and a real piezoelectric accelerometer. This accelerometer is design in order to be analyzed considering the data acquisition system limitations. For both cases it results that the system behaves very approximately to a unitary gain element for a bigger range than the normal measuring range and for a frequency higher than its band width. The bandwidth is now limited only for the ARX limitations related with the frequency of the data acquisition.

## Dedicatorias

*A Dios*

*A la niñita de preescolar a quien le platicaba  
sobre mis proyectos: Carmen*

*A mi hijo Diego*

*A mis padres y hermana.*

*A mi Kika.*

## **Agradecimientos**

Al **Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral y Regional (CIIDIR) Unidad Oaxaca del Instituto Politécnico Nacional** por la oportunidad que me otorgó al aceptarme como uno de sus alumnos.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)**, por el financiamiento otorgado a través de su sistema de becas, durante dos años de estudios de posgrado.

Al **Programa Institucional de Formación de Investigadores** por la beca durante dos semestres.

A los miembros de la comisión revisora y jurado de tesis: **Dr. Juan Alejandro Vázquez Feijoo, Dr. Andrés Pech Pérez, Dr. Francisco Castellanos León, Dr. Pedro Montes García, Dr. Pastor Teodoro Matadamas Ortiz**, por sus sugerencias y recomendaciones realizadas para el mejoramiento del presente estudio.

Un especial agradecimiento al **Dr. Juan Alejandro Vázquez Feijoo** que tuvo fe en mi persona, gracias por ser el mejor de los guías, por ser de gran apoyo en el ámbito académico y personal, por transmitir sus conocimientos y brindarme esta oportunidad.

A mi amigo de la carrera, maestría y vida (**Enrique Argeo García Aparicio**), con quien compartí grandes momentos en esta etapa de mi vida. Al **M.C. Carlos Inocencio Cortes Martínez**, por su gran apoyo brindado en este trabajo, a mis compañeros de Maestría: **“Chuy”, “Flori”, “Ray” y “Marco”** por su apoyo y amistad, a **Jensen, Estévez y Hugo** por los momentos de esparcimiento.

**Vladimir Cortés Lerín**

## Índice

Resumen	ii
Abstract	iii
Dedicatorias	iv
Agradecimientos	v
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b>	
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Justificación	2
1.3 Delimitación del estudio	2
1.4 Antecedentes	2
1.5 Objetivo general	3
1.6 Objetivos específicos	3
1.7 Hipótesis	3
1.8 Marco teórico	4
1.9 Metodología	12
<b>CAPÍTULO 2. Simulación de un acelerómetro con elemento piezoeléctrico</b>	
2.1 Introducción	14
2.2 Simulación de una señal sometida al ciclo de histéresis	15
2.3 La solución exacta de la señal lineal en la frecuencia	21
2.4 Respuesta exacta del acelerómetro con histéresis	23
2.5 Conclusiones	26
<b>CAPÍTULO 3. Construcción de la post-inversa de un acelerómetro</b>	
3.1 Introducción	28
3.2 Identificación del acelerómetro por modelos discretos NARX	28
3.3 Análisis y desarrollo teórico de la inversa de Volterra para sistemas Wiener	30
3.4 Construcción del modelo NARX para la inversa de Volterra	35
3.5 Conclusiones	36
<b>CAPÍTULO 4. Trabajo experimental sobre un acelerómetro básico con elemento piezoeléctrico</b>	
4.1 Diseño del acelerómetro básico	38
4.2 Identificación del modelo discreto a partir de los datos experimentales comparación	56
4.3 Implementación de la inversa de Volterra	59
4.4 Conclusiones	59
<b>CAPÍTULO 5. Conclusiones generales</b>	
5.1 Conclusiones generales	61
Referencias	62
Anexos	63

# CAPÍTULO 1

## Introducción

## **1.1 Planteamiento del problema**

Se pretende aplicar el control de lazo abierto usando la inversa de Volterra a un acelerómetro piezoeléctrico para poder eliminar las armónicas generadas en la salida del sensor por la histéresis generada por el elemento piezoeléctrico y verificar si el sistema se transforma en un elemento de ganancia unitaria

## **1.2 Justificación**

Incrementar el ancho de banda y rango de medición en un instrumento de censado supone una mayor eficiencia en su uso. La reducción de la no-linealidad, causada por el efecto de histéresis, mediante la inversa de Volterra no requiere modificación alguna en el diseño y/o construcción del acelerómetro, al ser un sistema ecualizador previo a la visualización de los datos censados y posterior a la salida del sensor. Este mecanismo acciona en los principios básicos que rigen al acelerómetro y por lo tanto es adaptable a cualquier modelo comercial, los resultados obtenidos en esta investigación servirían como referencia en el diseño y construcción de filtros electrónicos para acelerómetros. El uso del acelerómetro es muy vasto y abarca muchos campos de la ciencia, algunos íntimamente relacionados con los recursos naturales; como instrumento altamente sensible a las vibraciones se ocupa para caracterizar crecimientos en plantas [1], también es utilizado en la exploración de recursos minerales en los subsuelos terrestres y marinos [2].

## **1.3 Delimitación del estudio**

Este estudio pertenece a una investigación de tipo experimental, está delimitado en tiempo a la duración del programa de maestría que consta de 5 semestres, se realizó en su totalidad en las instalaciones del CIIDIR unidad Oaxaca, para este estudio se contó con información obtenida a través de investigación bibliográfica y experimental. Se abordó la adquisición y el tratamiento de señales, diseño y fabricación de un prototipo y aplicación de la herramienta denominada post-inversa de Volterra.

## **1.4 Antecedentes**

El uso de series de Volterra para el análisis de sistemas se originó a partir de un informe de 1942 de Norbert Wiener [3], entonces profesor de matemáticas en el MIT. Se utiliza la serie para hacer un análisis aproximado del efecto del ruido de radar en un circuito receptor no lineal. El informe se hizo público después de la segunda guerra mundial [4]. Como método general de análisis de sistemas no lineales, las series de Volterra se empezaron a usar después de 1957; como el resultado de una serie de informes que en un primer momento circuló en el MIT y en otros lugares. El nombre de *series de Volterra* se empezó a usar unos años más tarde.



En mejoras de los acelerómetros piezoeléctricos se encuentran trabajos enfocados en la parte de su diseño y construcción, como el desarrollado por : Zhang Zhong-cai, llamado "*Design of a large Measurement range piezoelectric Accelerometer*"[5] en el cual se puede leer como se desarrolla un acelerómetro piezoeléctrico el cual puede medir la aceleración de un objeto con alta velocidad, el trabajo está basado en el modelo físico del acelerómetro y los factores principales que tienen influencia sobre la frecuencia natural. Otro estudio encaminado hacia la mejora del acelerómetro, en específico a su ancho de banda lo tenemos con: C.C. Hindrichsen en su trabajo: "*Circular piezoelectric Acelerometer for High Band Width Application*"[6] en el que se demuestra como el correcto dimensionamiento del elemento piezoeléctrico influye en el ancho de banda de un caso particular, y es referencia directa de su mejora en el ancho de banda.

Existen estudios relacionados que nos sirven como antecedentes del comportamiento de la respuesta del sistema y su análisis con modelos matemáticos, tal es el caso del trabajo realizado por: David M Storer, denominado: "*Dynamic Analysis of non-linear structures using Higher order frequency response functions*"[7], en donde utiliza las HFRFs definidas desde las series de Volterra como una base firme para el análisis de la dinámica de una amplia clase de sistemas no lineales. Este último trabajo es un antecedente importante en el uso de las series de Volterra para sistemas no lineales.

Siguiendo en la línea de nuestra investigación en el trabajo realizado por: P.W.J.M Nuij, llamado: "*Experimental characterization of the stick/sliding transition in a precision mechanical system using the third Order sinusoidal input describing function*"[8], se analiza cómo se comporta un sistema de precisión en la fase de atasco/deslizamiento por esfuerzo mecánico ante una entrada armónica, muy relacionado con la histéresis y la inercia mecánica que sufre nuestro sistema.

En los trabajos realizados por J.A. Vazquez Feijoo, denominados: "*Transformation of a sensor or actuator system into a unitary gain element*"[9] y "*Associated Linear Equations for Volterra operators*"[10] es de donde se obtiene la mayor información para el desarrollo del modelo a través de las series e inversa de Volterra.

### **1.5 Objetivo general:**

- Aplicar una estrategia de control de lazo abierto por ecualización, haciendo uso de las ecuaciones lineales asociadas, para generar los operadores de la inversa de Volterra y verificar que se logra aumentar el rango de medición y ancho de banda, eliminar la inercia, compensar las pérdidas y eliminar los armónicos generados por la histéresis.

### **1.6 Objetivos específicos:**

- Modelar el comportamiento de un ciclo histerético.
- Desarrollar un modelo apropiado para simular un acelerómetro

- piezoeléctrico.
- Obtener las Ecuaciones Lineales Asociadas para la serie de Volterra directa e inversa de un sistema tipo Wiener.
  - Verificar por simulación que el acelerómetro piezoeléctrico puede ser apropiadamente modelado por un sistema tipo Wiener.
  - Modelar la respuesta del sistema simulado por medio de modelos discretos No-Lineales Autorregresivos con entradas eXogenas y verificar que el modelo es correcto.
  - Generar la inversa de Volterra con el uso de las Ecuaciones Lineales Asociadas y verificar el control de lazo abierto por ecualización.
  - Desarrollar un prototipo de acelerómetro piezoeléctrico básico cuya respuesta pueda ser caracterizada a través de un equipo de adquisición de datos cuya frecuencia de medición es de un milisegundo.
  - Verificar experimentalmente sobre el acelerómetro diseñado la estrategia de control de lazo abierto por ecualización.

## 1.7 Hipótesis

El control de lazo abierto por ecualización usando la inversa de Volterra es aplicable a un sistema sensor que presenta histéresis en su salida. Por lo que se podrá eliminar la inercia del sistema, compensar las pérdidas de energía y eliminar los armónicos producidos por la histéresis, aumentando así su ancho de banda y rango de medición.

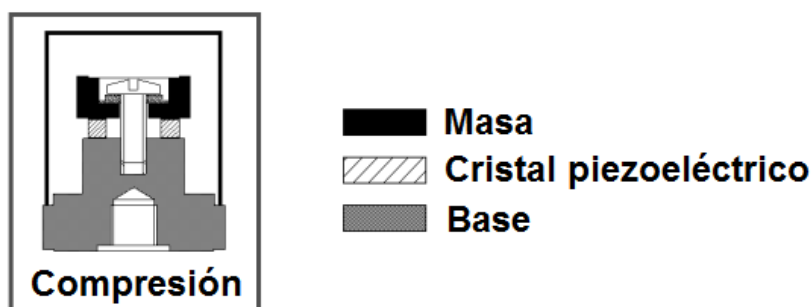
## 1.8 Marco teórico

### *Piezolectricidad*

La piezolectricidad es la carga (eléctrica) que se acumula en ciertos materiales sólidos en respuesta a una tensión mecánica aplicada [11]. Es un fenómeno presentado por determinados cristales, naturales o sintéticos, que al ser sometidos a tensiones mecánicas adquieren una polarización eléctrica en su masa, apareciendo una diferencia de potencial y cargas eléctricas en su superficie. El efecto de una compresión o de un cizallamiento consiste en disociar los centros de gravedad de las cargas positivas y de las cargas negativas. Aparecen de este modo dipolos elementales en la masa y, por influencia, cargas de signo opuesto en las superficies enfrentadas.

### *Acelerómetro piezoeléctrico*

Un acelerómetro es un sensor que mide la aceleración basado en la segunda ley del movimiento de Newton, la cual nos dice que la aceleración de un objeto producida por una fuerza neta es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta en la misma dirección que esta e inversamente proporcional a la masa del objeto[12].



*Figura 1.8.1: Acelerómetro piezoeléctrico a compresión*

Un acelerómetro piezoeléctrico se produce en varias configuraciones, pero la ilustración del tipo a compresión sirve para describir el principio de la operación. La masa sísmica está sujeta a la base con un perno axial, que se apoya en un resorte circular. El elemento piezoeléctrico está ajustado entre la base y la masa. Cuando una materia está sujeta a una fuerza, se genera una carga eléctrica entre sus superficies. Hay muchas materias de este tipo. Cuarzo se usa más. También hay materiales piezoeléctricos sintéticos que funcionan bien y en algunos casos son capaces de funcionar a temperaturas más altas comparado con el cuarzo. Si se incrementa la temperatura de un material piezoeléctrico, se va llegar al llamado "punto curie" o "temperatura curie" y se pierde la propiedad piezoeléctrica. Una vez que esto pasa, el transductor está defectuoso y no se puede reparar.

Cuando se mueve el acelerómetro en la dirección arriba abajo, la fuerza que se requiere para mover la masa sísmica está soportada por el elemento activo. Según la segunda ley de Newton, esa fuerza es proporcional a la aceleración de la masa. La deformación sobre el cristal produce la señal de salida, que resulta ser proporcional a la aceleración del transductor. Los acelerómetros son considerados sistemas lineales aunque su limitación en su uso está en la histéresis que se produce en el intercambio de energía mecánica eléctrica en el elemento piezoeléctrico. El discriminante de un acelerómetro, está determinado por los niveles de ruido electrónico.

El acelerómetro piezoeléctrico está muy estable sobre largos periodos. Mantendrá su calibración si no se le maltrata. Las dos maneras en las que se puede dañar un acelerómetro son: la exposición a un calor excesivo y la caída en una superficie dura. Si se cae de una altura de más de un par de pies en un piso de concreto, o en una cubierta de acero, se debe volver a calibrar el acelerómetro para asegurarse que el cristal no se cuarteó. Una pequeña cuarteadura causará una reducción en la sensibilidad y también afectará de manera importante a la resonancia y a la respuesta de frecuencia. Es una buena idea calibrar los acelerómetros una vez al año, si están en servicio con colectores de datos portátiles.

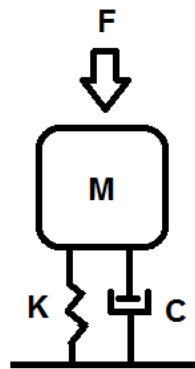
El rango de frecuencias del acelerómetro es muy ancho y se extiende desde frecuencias muy bajas en algunas unidades hasta varias decenas de kilohertzios. La respuesta de alta frecuencia está limitada por la resonancia de la masa sísmica, junto con la elasticidad del piezo elemento. Esa resonancia

produce un pico importante en la respuesta de la frecuencia natural del transductor, y eso se sitúa normalmente alrededor de 30 kHz para los acelerómetros que se usan normalmente. Una regla general es que los acelerómetros se deben utilizar únicamente sobre aproximadamente 1/3 de su frecuencia natural, datos arriba de esta frecuencia se acentuarán debido a la resonancia, limitando el uso de estos dispositivos.

### *Sistema masa-resorte-amortiguador*

El principio de funcionamiento del acelerómetro se puede modelar a través de un sistema masa-resorte-amortiguador de un solo grado de libertad, en donde se identifica al resorte como el elemento piezoeléctrico.

En un elemento mecánico en paralelo, la fuerza aplicada  $f(t)$  es igual a la suma de las fuerzas actuantes en cada elemento y todos los elementos tienen el mismo desplazamiento.



*Figura 1.8.2: Sistema masa-resorte-amortiguador.*

Como puede verse en la figura 1.8.2, el modelo básico del acelerómetro es de un solo grado de libertad. Esto es porque como se mencionó previamente, los acelerómetros se diseñan para su uso en frecuencias inferiores a su primer armónico. El modelo para describir el comportamiento del acelerómetro es a partir de las ecuaciones de equilibrio de cuerpo puntual. La ecuación diferencial resultante representa un sistema bajo vibraciones forzadas con excitación en la base.

El modelo de excitación en la base es un prototipo que es útil para el diseño de acelerómetros, el sistema físico de interés está representado por un solo grado de libertad del sistema, cuya base es sometida a un desplazamiento o perturbación  $x(t)$  y una ecuación que gobierna el movimiento de este sistema que trate de determinar la respuesta del sistema  $y(t)$ .

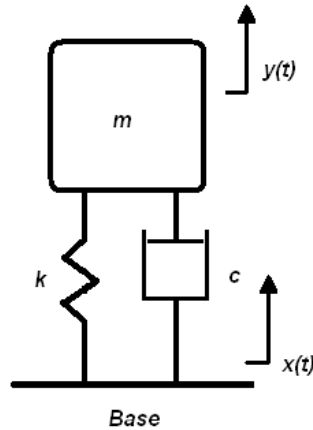


Figura 1.8.3: Sistema masa-resorte-amortiguador sometido a excitación en la base.

En el sistema mostrado en la figura 1.8.3, se supone que ninguna fuerza externa es aplicada directamente a la masa, es decir,  $f(t)=0$ .

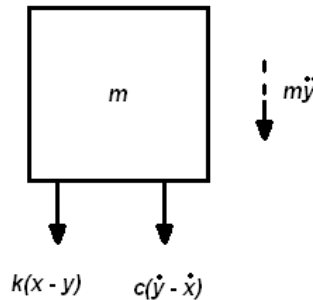


Figura 1.8.4: Diagrama de cuerpo libre.

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la Figura 1.8.4, se utiliza la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$F - ma = 0 \quad [1.8.1]$$

Obtenemos la siguiente ecuación rectora del movimiento:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = c \frac{dx}{dt} + kx \quad [1.8.2]$$

Para oscilaciones de translación de un solo grado de libertad del sistema, la frecuencia natural del sistema se define como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [1.8.3]$$

Para oscilaciones de translación de un solo grado de libertad del sistema el factor de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento se define como:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad [1.8.4]$$

Sustituyendo [1.8.3] y [1.8.4] en [1.8.2] obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x \quad [1.8.5]$$

Los desplazamientos  $y(t)$  y  $x(t)$  se miden desde un punto fijo situado en un sistema de referencia inercial y un punto fijo situado en el equilibrio estático de la posición del sistema, respectivamente. Si el desplazamiento relativo es deseado, entonces tenemos:

$$z(t) = y(t) - x(t) \quad [1.8.6]$$

Por lo tanto [1.8.5] se reescribe como:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dz}{dt} + \omega_n^2 z = -\frac{d^2x}{dt^2} \quad [1.8.7]$$

Donde  $\ddot{x}(t)$  es la aceleración de la base.

#### *Inversa de Volterra.*

Los procesos de sensado introducen por si mismos no-linealidades al sistema, un intento de linealizar estos subsistemas se debe hacer por el control a lazo abierto. La idea aquí es construir un sistema de ecualización mediante la post inversa de Volterra para sensores, convirtiendo a estos sistemas sensores en un elemento unitario de ganancia.

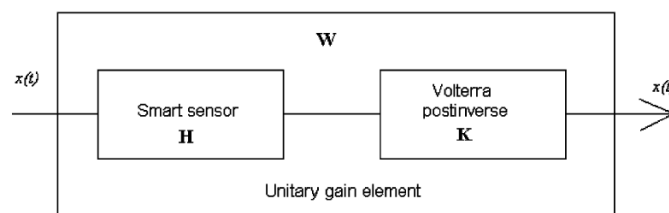


Figura 1.8.5: Elemento de ganancia unitario para sensores aplicando la post-inversa de Volterra.

Como se muestra en la figura 1.8.5 los operadores de la inversa de Volterra pueden ser considerados la salida de un sistema  $K$  conectado en serie con un sistema de control  $H$ , el sistema en general se identifica como  $W$ . Cuando el sistema  $H$  está funcionando solo, el proceso es  $(x(t) \rightarrow y(t))$  y se representa como:

$$y(t) = H[x(t)] \quad [1.8.8]$$

Los corchetes son la forma convencional de representar un operador general  $H$  que actúan sobre la señal  $x(t)$ . Aquí  $x(t)$  es la propiedad física que se mide y

$y(t)$  es lo que el sensor del sistema mide.  $H[x(t)]$  es la respuesta deseada de un actuador y  $y(t)$  es la respuesta real. Cualquier sistema  $H$  debe ser considerado como:

$$H = \sum H_i \quad [1.8.9]$$

Cada operador de Volterra es un operador multi-lineal (se llama multi-lineal cuando el operador es lineal con respecto a cualquiera de sus argumentos, cuando todos los otros argumentos se mantienen constantes). Los subsistemas de Volterra considerados como operadores multi-lineales se denotan por:

$$H_n\{x_1(t), x_2(t) \dots, x_n(t)\} \text{ donde } n \text{ es el número de argumentos}$$

El sistema  $H$  se supone que tienen una representación convergente Volterra y por lo tanto, la salida del sistema es una suma (posiblemente infinita) de los operadores  $y_j(t) = H_j[x(t)]$ , o en forma ampliada  $y_j(t) = H_j\{x(t), x(t), \dots, x(t)\}$  con el argumento de que contiene un número  $j$  de elementos. El inverso de Volterra es una suma (posiblemente también infinita) de los operadores de la forma:  $Z_j(t) = K_j[y(t)]$ .

La inversa de Volterra para el proceso  $y(t) \rightarrow x(t)$  es obtenida en dos pasos. El primer paso es tratar de extraer la señal de entrada  $x(t)$  directamente producida por el operador inverso de primer orden  $K_1$ , desde el primer operador de Volterra  $H_1$ , entonces  $K_1 = H_1^{-1}$ .

Para el segundo paso es necesario considerar lo siguiente:

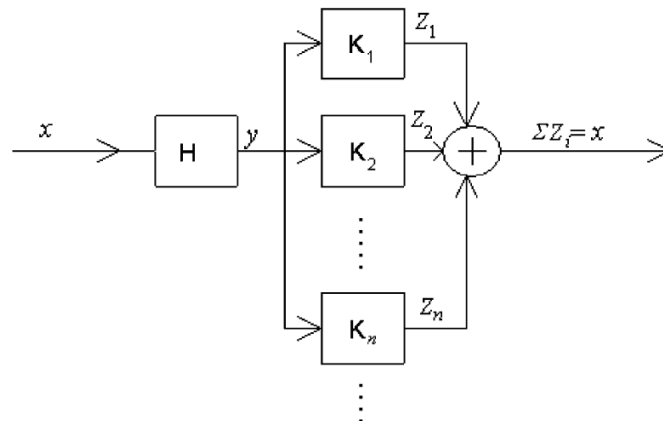


Figura 1.8.6: Las series inversas de Volterra pueden ser consideradas para producir un subsistema de series infinitas cada uno produciendo un operador de Volterra.

De la figura. 1.8.6, la entrada en el primer operador de Volterra  $K_1$  es, por desgracia, no sólo  $y_1(t)$  sino la señal  $y$  y su conjunto  $y(t)$  con todos los operadores no lineales en el mismo. La salida real del primer operador inverso de Volterra es entonces:

$$Z_1(t) = K_1[y_1(t)] + \sum_{n=2}^{\infty} K_1[y_n(t)] \quad [1.8.10]$$

El primer término es la salida deseada, los demás términos tienen que ser eliminados por el resto de los operadores inversos de Volterra. Los

operadores  $K_n$  están construidas de tal manera que produzcan el  $Z_n$  salidas que cancelan aditivamente cada término de la suma en la ecuación.

Los siguientes operadores serán obtenidos de la fórmula general para  $K_n$  la cual es:

$$K_n[x(t)] = -\sum_{m=2}^n \sum_{i_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{i_{a-1}=1}^{n-m-\sum_{b=1}^{a-1} i_b+a} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{n-m-\sum_{b=1}^{m-2} i_b+(m-1)} K_1[H_m\{K_{i_1}[x(t)], \dots, K_{i_a}[x(t)], \dots, K_{i_{m-1}}[x(t)], K_{i_m}\}] \quad [1.8.11]$$

donde  $i_m = \sum_{b=1}^{a-1} i_b$

para el segundo operador:

$n=2, m=2, a=2$

$$K_2[x(t)] = -\sum_{m=2}^2 \sum_{i_1=1}^1 K_1[H_2\{K_{i_1}[x(t)], K_{i_2}[x(t)]\}] \quad [1.8.12]$$

La pre-inversa es:

$$K_2[x(t)] = -K_1[H_2\{K_1[x(t)], K_1[x(t)]\}] \quad [1.8.13]$$

La post-inversa es:

$$K_2[y(t)] = -K_1[H_2\{K_1[y(t)], K_1[y(t)]\}] \quad [1.8.14]$$

Para el tercer operador:

$n=3, m=2, i_1 = 1, 2, i_2 = 2, 1$

$$K_3[x(t)] = -K_1[H_2\{K_1[x(t)], K_2[x(t)]\}] + K_1[H_2\{K_2[x(t)], K_1[x(t)]\}] \quad [1.8.15]$$

$m=3, a=3, i_1 = 1, i_2 = 1, i_3 = 1$

$$K_1[H_3\{K_1[x(t)], K_1[x(t)], K_1[x(t)]\}] \quad [1.8.16]$$

Sumando [1.8.14] y [1.8.15] la pre-inversa es:

$$K_3[x(t)] = -2K_1[H_2\{K_1[x(t)], K_2[x(t)]\}] - K_1[H_3\{K_1[x(t)], K_1[x(t)], K_1[x(t)]\}] \quad [1.8.17]$$

la post inversa es:

$$K_3[y(t)] = -2K_1[H_2\{K_1[y(t)], K_2[y(t)]\}] - K_1[H_3\{K_1[y(t)], K_1[y(t)], K_1[y(t)]\}] \quad [1.8.18]$$

### *Ecuaciones lineales asociadas.*

La inversa de Volterra puede ser construida basada en las ecuaciones lineales asociadas (ELA's) desde los operadores directos en orden, con el fin de obtener un grupo de operadores inversos de Volterra [19]. Estas ELA's son modelos paramétricos de los operadores de Volterra. Esta teoría supone que todos los sistemas están conformados con elementos que responden proporcionalmente al nivel de excitación u órdenes y que pueden ser sumados para obtener la salida total, Figura 1.8.7. La teoría de Volterra permite la suposición de elementos que responden de acuerdo con una función



polinomial.

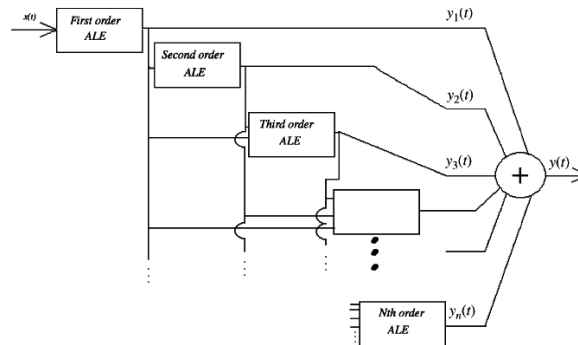


Figura 1.8.7: Sistema no lineal representado por un grupo de modelos lineales (ALEs) cada una produciendo un operador de Volterra.

Para dar un ejemplo de cómo estas ELA's funcionan consideremos un modelo oscilador Duffin:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + k_3y(t)^3 = x(t) \quad [1.8.19]$$

De acuerdo a la metodología presentada en [19] las ELA's serían las siguientes:

$$m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + ky_1(t) = x(t) \quad [1.8.20]$$

y :

$$m\ddot{y}_3(t) + c\dot{y}_3(t) + ky_3(t) = -k_3y(t)^3 \quad [1.8.21]$$

La primera ELA es de orden lineal y corresponde a la descripción lineal de la salida, la tercera ELA corresponde a la no-linealidad que es de orden 3.

Las ecuaciones lineales asociadas han sido utilizadas para identificación, análisis y control de los sistemas no-lineales con representación por medio de series de Volterra. A diferencia de la teoría de Volterra, las ecuaciones lineales asociadas pueden ser utilizadas en sistemas con respuesta no-lineal distinta de funciones polinomiales, así, es posible encontrarles aplicaciones tales como en sistemas que presentan histéresis, respuesta con valores absolutos, discontinuidades, etc.

### Histéresis.

La histéresis es la dependencia de un sistema, no sólo en su entorno actual sino también, en su entorno pasado, esta dependencia surge porque el sistema puede estar en más de un estado interno. Para predecir su desarrollo futuro, su estado interno y su historia debe ser conocida [13]. Esta histéresis se presenta en el material piezoeléctrico cuando al sufrir una deformación genera un

voltaje, pero en ausencia de esa deformación no regresa a su estado original en forma lineal sino siguiendo una curva (curva de histéresis). La descripción detallada se hará en el próximo capítulo.

### *Modelos NARX.*

En el modelado de series en el tiempo, un modelo auto-regresivo lineal exógeno (NARX) es un modelo no lineal auto-regresivo que tiene entradas exógenas[14]. Esto significa que el modelo relaciona el valor actual de una serie de tiempo tanto a:

- los valores anteriores de la misma serie, y
- valores actuales y pasados de la serie que influye en la serie de interés (exógena)

Además, el modelo contiene:

- Un término de "error"

Este modelo se puede afirmar algebraicamente como:

$$y_t = F(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \dots, u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}, \dots) + \varepsilon_t \quad [1.8.22]$$

Aquí  $y$  es la variable de interés, y  $u$  es la variable externa determinada. En este régimen, la información acerca de  $u$  ayuda a predecir  $y$ , al igual que los anteriores valores de  $y$  en sí. Aquí  $\varepsilon$  es el error (a veces llamado ruido).

Por ejemplo:  $y$  puede ser la temperatura del aire al mediodía, y la  $u$  puede ser el día del año (día-número dentro de un año). La función  $F$  es una función no lineal, tal como un polinomio.

## **1.9 Metodología**

Para lograr los objetivos planteados, en primera instancia se simuló el sistema que describe a un acelerómetro con elemento piezoeléctrico y el ciclo de histéresis al que es sometido, el cual se tratará en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se desarrollaron modelos que describen al sistema del acelerómetro y se calcularon los operadores de Volterra para un sistema Wiener, el cual presenta un modelo adecuado del acelerómetro. Además se creó un modelo para dichos operadores.

Por último se realizó un trabajo experimental, con un prototipo de acelerómetro básico, que se diseñó y construyó en base a los requerimientos del equipo de toma de datos. Las señales obtenidas fueron tratadas con el primer operador de Volterra y fue identificada la parte lineal de la señal de salida, todo esto se relata en el capítulo 4.

# CAPÍTULO 2

Simulación de un acelerómetro con elemento piezoeléctrico

## 2.1 Introducción

El intercambio energético mecánico-eléctrico, que se da en el elemento piezoeléctrico de un acelerómetro, se produce a través de una relación de histéresis, que es la principal fuente de no linealidad del sistema, en este capítulo se desarrolla un modelo histerético para un sistema de Volterra tipo Wiener. La modelación de la histéresis propiamente es a partir de puntos localizados en elipses y el ajuste de una curva de forma cúbica a estos puntos, con parámetros ajustables en la construcción de la elipse. Contrario a otras simulaciones específicas para un fenómeno (*Modelo de Preisach*), este modelo se basa solo en la señal de entrada, de la cual se extraen los parámetros que regirán la curva de histéresis, dando como resultado una simulación aplicable a cualquier entrada y de un comportamiento característico para un ciclo histerético.

Un ciclo de histéresis puede construirse a partir de un fenómeno en específico, como la histéresis de un material ferromagnético, con los parámetros y fórmulas destinadas para tal fenómeno, como es el caso del modelo de *Preisach*[15]. En el presente trabajo se tomó solo una señal de entrada con su respectiva duración en el tiempo y un punto de saturación y a partir de ésta información se construyó una señal de salida, que simula el comportamiento de la señal de entrada sometido al fenómeno de histéresis, ésta simulación tuvo como base la construcción de elipses, de acuerdo a la señal de entrada y los cambios que en ella se presentan (*ascendiente o descendiente*), se calcularon puntos sobre la elipse y se añadieron a un vector con puntos adicionales para construir el polinomio de tercer grado que pasará por esos puntos, dando así forma a la sección creciente o decreciente (llamados semi-ciclos) del ciclo total de histéresis.

Si la señal de entrada aumenta y disminuye a través del tiempo, la salida tiende a formar un bucle llamado ciclo histerético o ciclo de histéresis, tiene la forma característica mostrada en la figura 2.1.1. Éste ciclo presenta tal forma debido a las características de ciertas propiedades, que presenta el fenómeno, en los cuales tiende a conservar su estado anterior en ausencia de la fuerza que produjo dicho estado.

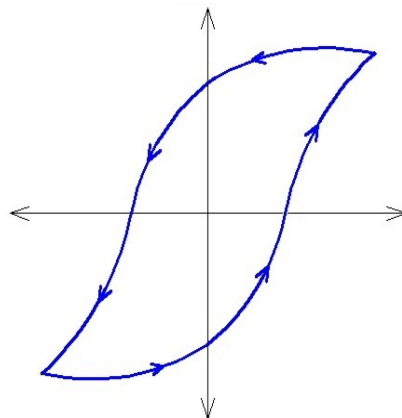


Figura 2.1.1: Representación gráfica de un ciclo de histéresis.

## 2.2 Simulación de una señal sometida al ciclo de histéresis

A continuación se presentan los pasos que se siguieron para la programación de la simulación.

### *Analizando la señal de entrada*

Para el proceso de construcción de esta simulación se comienza con una señal de entrada, la cual se va adquiriendo dato a dato de forma discreta, como ejemplo usaremos la función,

$$ent = 10\text{sen}(50t) \quad [2.2.1]$$

la cual su gráfica es la figura 2.2.1

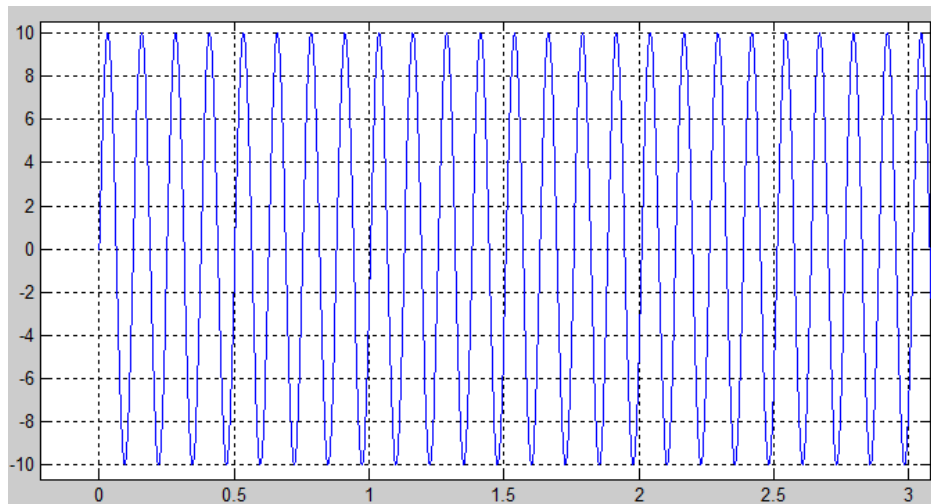


Figura 2.2.1: Señal de entrada.

Para la construcción del ciclo se comienza asignando un punto crítico inicial ( $pc$ ), que es el primer punto de la entrada, el cual es un punto que sirve de referencia para saber si los próximos semi-ciclos son, en amplitud absoluta, mayores o no a  $pc$  anterior. Se recorre la señal de entrada para construir el vector de *salida* que en un principio se rige por:

$$salida[i] = ent[i] \quad [2.2.2]$$

Para cualquier estado inicial, esta asignación se mantendrá válida y así seguirá hasta que el punto crítico sea superado en valor, al localizar un mayor valor para  $pc$  el comportamiento cambia de modelo.

### *Construcción de la elipse*

En Geometría analítica, la elipse se define como el conjunto de puntos del plano cartesiano que satisfacen la ecuación implícita [15][16], utilizando este concepto se calculan puntos sobre la elipse que ayudan a dar forma a la curva

de histéresis, en primera instancia con ayuda del  $pc$  se calcula el valor de  $a$  que se define como el eje mayor de la elipse, el valor de  $a$  será el 90% del valor de  $pc$ .

A continuación se define  $b$  que es el eje menor e la elipse, el valor de  $b$  es un porcentaje del valor de  $a$ , este porcentaje está determinado por el punto de saturación que se introduce por el usuario junto con la entrada, la variación de  $b$  es la variación directa del ancho del ciclo de histéresis, entre más cerca se encuentre del punto de saturación más ancho será el ciclo histerético, tomando en cuenta esto se calcula una función de tercer grado que presenta el siguiente comportamiento, figura 2.2.2.

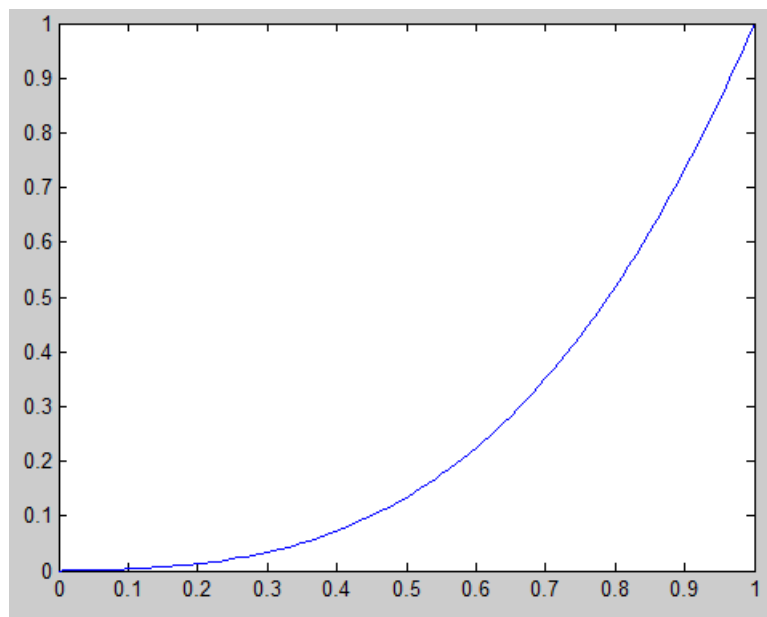


Figura 2.2.2: Comportamiento del crecimiento de “b” en función de la proximidad al punto de saturación.

Calculando los coeficientes del polinomio se obtiene una ecuación en la cual se sustituye el valor de la  $n$ -ésima entrada y se obtiene un valor de  $b$  en función al punto de saturación.

También se calcula el ángulo de inclinación de la elipse, el cual estará dado por  $\varphi$ , este también variará de acuerdo al punto de saturación (entre  $45^\circ$  y  $90^\circ$ ), entre más cerca esté del punto de saturación más se acercará  $\varphi$  al valor de  $90^\circ$ .

Con todos los datos anteriores, para valores de  $t$  entre 0 a  $2\pi$  se sustituye en las siguientes ecuaciones de la forma paramétrica general de la elipse:

$$X(t) = a \cos(t) \cos(\varphi) - b \sin(t) \sin(\varphi) \quad [2.2.3]$$

$$Y(t) = a \cos(t) \sin(\varphi) + b \sin(t) \cos(\varphi) \quad [2.2.4]$$

Dando como resultado la Figura 2.2.3:

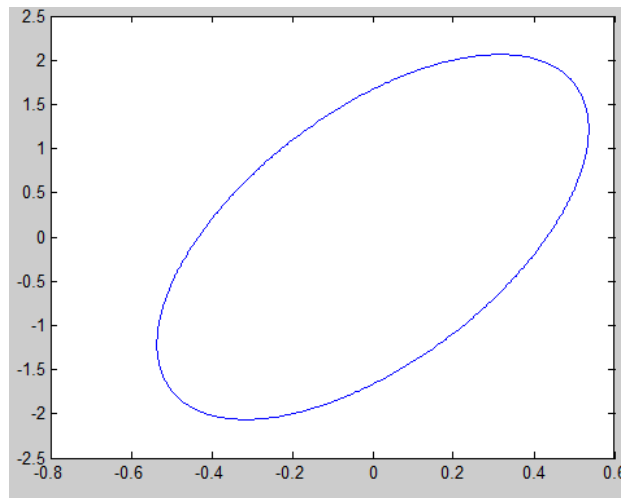


Figura 2.2.3: Gráfica de una elipse.

### Los puntos a interpolar

Una vez calculados los puntos de la elipse, se elijen los puntos que se interpolarán para formar el semi-ciclo histerético. En el presente trabajo se determinó una cantidad de 6 puntos para formarlo, el primer punto está dado por el  $pc$ , que es igual al valor de la entrada en el momento en que esté fue calculado, los tres puntos siguientes son calculados sobre la elipse, estos variarán de acuerdo a la tendencia de la entrada, si la tendencia es decreciente los puntos sobre la elipse corresponderán a los ubicados en la parte inferior al eje mayor, si la tendencia es creciente corresponderán a los localizados en la superior de la elipse, se distribuyen de la siguiente forma:

1. Si el comportamiento es creciente: se calcula el máximo punto sobre la elipse en  $y$  y su correspondiente en el eje  $x$ , el mínimo valor de  $x$  sobre la elipse y su correspondiente en  $y$  y el punto intermedio en  $x$ , de entre los valores de  $x$  de las dos coordenadas anteriores, con su correspondiente en  $y$ .
2. Si el comportamiento es decreciente: se calcula el mínimo sobre la elipse en  $y$  con su correspondiente en  $x$ , el máximo valor de  $x$  y su correspondiente en  $y$  y el punto intermedio en  $x$  de los valores de  $x$ , de entre las dos coordenadas anteriores, con su correspondiente en  $y$ .
3. El siguiente punto corresponde al valor en negativo del primer punto en sus dos coordenadas, esto sería la extensión del eje mayor hasta el valor negativo de  $pc$ .

Por último se estableció un punto extra, alejado del último punto el cual sirve para dar forma a la curva de tercer grado, pues esta tiende a su forma natural,

causando oscilaciones entre los puntos.

### *Construyendo y condicionando los semi-ciclos*

Una función de tercer grado está dado por la siguiente ecuación:

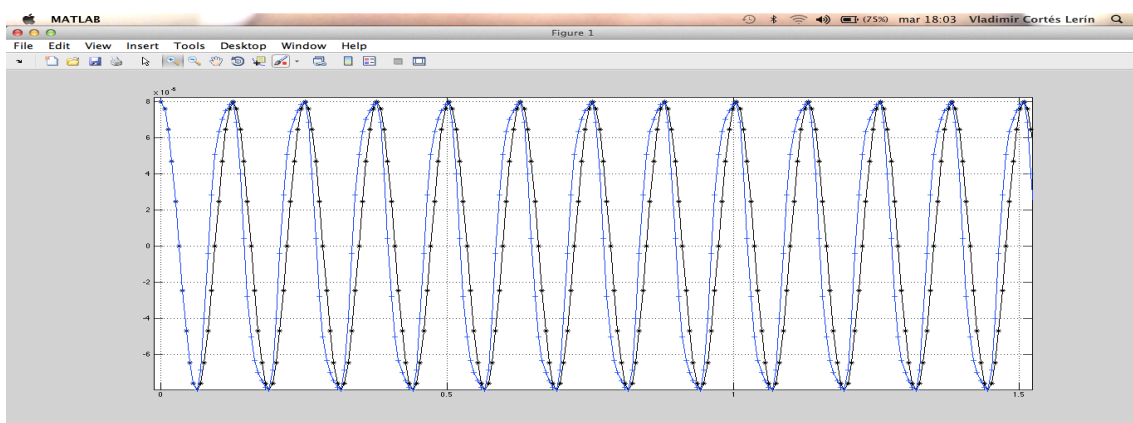
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad [2.2.5]$$

Se debe encontrar la función que se ajuste a los puntos que se seleccionaron, de esta manera se resuelve el sistema de ecuaciones (usando los puntos obtenidos con anterioridad) para localizar los coeficientes de esta función, esta resolución da como resultado una función de tercer grado que satisface todos los valores de la entrada para este semi-ciclo.

Existen dos condicionantes mas para el programa:

1. Si la salida ha alcanzado en su curva de tercer grado un valor superior al valor de  $pc$  actual ese valor de salida será igual al  $pc$  actual, esto evita que existan valores mayores a los de  $pc$  dentro de un semi-ciclo.
2. Si cualquier valor de la salida ha alcanzado o sobrepasado el punto de saturación, el valor de la salida será el propio valor del punto de saturación, esto evita que exista un valor mayor al del punto de saturación.

Los semi-ciclos contruidos corresponden a la forma creciente o decreciente del ciclo de histéresis, para la formación de un nuevo semi-ciclo se debe cumplir una condición: que el valor en la entrada sea mayor al  $pc$  (punto crítico) actual y de este modo se analiza toda la señal de entrada, generando la señal de salida. El proceso en general se puede observar en las figuras 2.2.4 y 2.2.5. En la primera se muestra la señal sinusoidal de entrada (en negro) y la salida distorsionada por la histéresis (en azul) y en la segunda figura se muestra el ciclo histerético generado.



*Figura 2.2.4: Señal de entrada(negro) contra señal de salida(azul).*



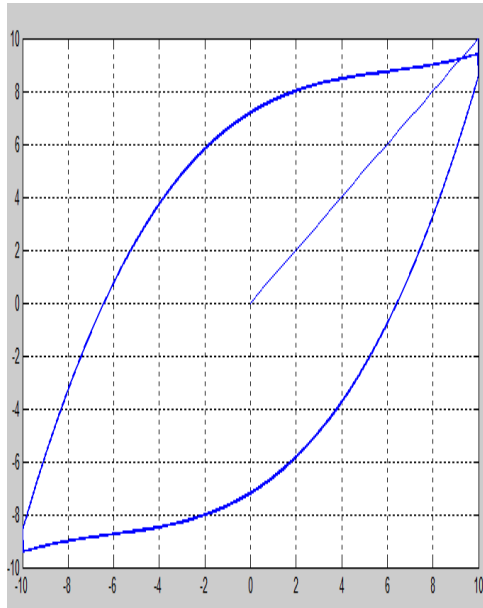


Figura 2.2.5: Un ciclo de histéresis con sus semi-ciclos (entrada contra salida)

### Análisis de resultados

La señal obtenida presenta el comportamiento histérico adecuado como se puede observar en la siguiente figura 2.2.6:

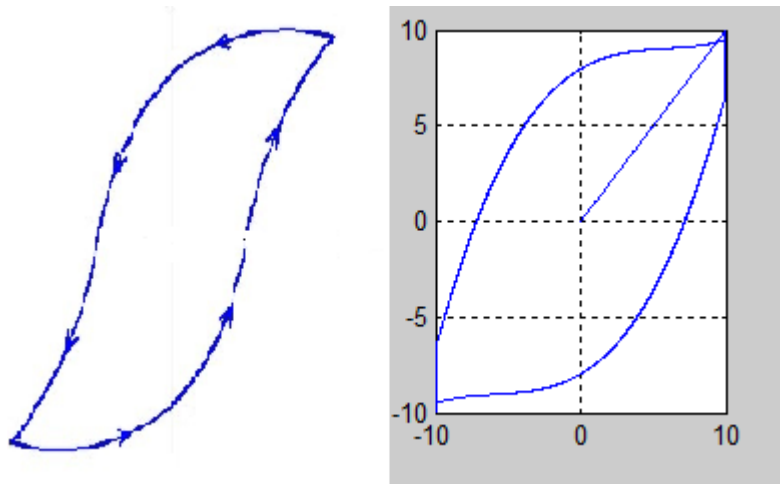


Figura 2.2.6: Ciclos completos de histéresis.

En la tabla siguiente se puede observar la variación del ancho de la elipse y del ángulo de inclinación  $\phi$  en función del punto de saturación (Tabla 2.2.1).

Variabilidad del valor de $b$ y el ángulo $\phi$ en función del punto de saturación		
Entrada: $10 \text{ sen}(t)$		
Punto de saturación	Valor de $b$	Valor de $\phi$
1	1.2703	4.7461
2	2.0919	4.2108
3	2.857	3.9791
4	3.8555	4.0079
5	4.6717	3.9339
6	5.6048	3.9334
7	6.4306	3.8943
8	7.2653	3.8678
9	8.1039	3.8482
10	8.9838	3.8429

Tabla 2.2.1: Variación de  $b$  y  $\phi$  en función de  $ps$ .

Para garantizar el óptimo comportamiento de la histéresis se realizaron pruebas a distintos puntos de saturación, graficadas en la figura 2.2.7 :

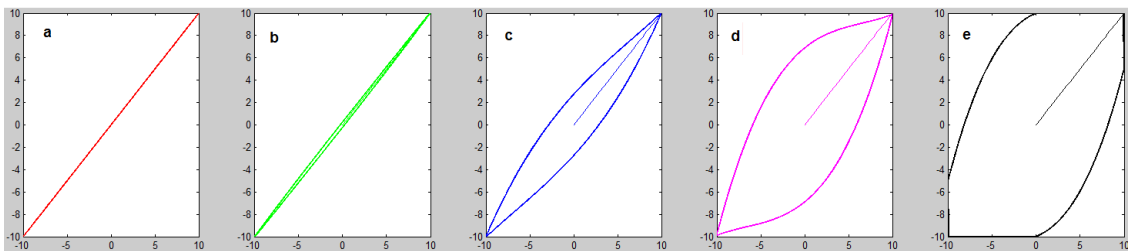


Figura 2.2.7: Resultado de la gráfica de histéresis a diferentes puntos de saturación introducidos.

En la Imagen anterior (Figura 2.2.7) Podemos observar como para la misma entrada a diferentes puntos de saturación la gráfica de histéresis varía en su valor de  $b$  que es la que determina el ancho del ciclo histerético.

En la tabla 2.2.2 se muestra los valores del punto de saturación para cada ciclo.

<b>ent=10*sin(50*t)</b>	
Punto de saturación 1 = 50	Fig. 1.9 a
Punto de saturación 2 = 18	Fig. 1.9 b
Punto de saturación 3 = 15	Fig. 1.9 c
Punto de saturación 4 = 12	Fig. 1.9 d
Punto de saturación 5 = 10	Fig. 1.9 e

Tabla 2.2.2: Valores del punto de saturación introducidos y su correspondiente referencia a la gráfica de histéresis.

La implementación de este programa en el presente trabajo permite simular el efecto de la histéresis sobre una señal de entrada, la cual puede presentar muchas frecuencias. Su flexibilidad permite el ajuste de los valores de los parámetros para representar casi cualquier caso de histéresis.

### 2.3 La solución exacta de la señal lineal en la frecuencia

El modelo de acelerómetro que en el presente trabajo se busca simular es un acelerómetro con amortiguamiento estructural. Por lo general el análisis estructural de elementos finitos incluye amortiguamiento utilizando un factor de amortiguamiento estructural (rigidez compleja) que se aplica al modelo complejo después de la obtención de sus ecuaciones. La ecuación de nuestro sistema (ecuación [2.3.1]) con amortiguamiento estructural (independiente de la frecuencia), es:

$$m\ddot{y} + ky + k_0iy = \ddot{x} \quad [2.3.1]$$

Dividiendo todo entre la masa  $m$

$$\ddot{y} + wn^2y + \frac{k_0}{m}iy = \frac{1}{m}\ddot{x} \quad [2.3.2]$$

Aplicando la prueba armónica:

$$H(w)(-w^2 + wn^2 + \frac{k_0}{m}i) = \frac{1}{m} \quad [2.3.3]$$

Nuestra función de respuesta en la frecuencia será:

$$H(w) = \frac{a}{wn^2 - w^2 \pm iqwn} \quad [2.3.4]$$

Donde  $a$  es  $\frac{1}{m}$  y  $q$  es  $\frac{k_0}{m}$ .

Para fines de simulación se consideró  $a=100$  y  $q = 1$ .

Para este trabajo se programó un algoritmo con dos opciones, la primera donde se genera ruido blanco con un número definido de frecuencias que el usuario ingrese y la segunda opción donde el usuario determina cuantas frecuencias y de que amplitud quiere tratar como señal de entrada.

#### *Generando el ruido blanco*

De acuerdo al número de frecuencias que el usuario desee se crea un vector que va desde el negativo de la frecuencia máxima hasta el positivo de la frecuencia máxima, la frecuencia máxima está definida por:

$$w_{max} = \frac{\pi}{dt} \quad [2.3.5]$$

Se genera un vector con frecuencias aleatorias y se determina la respuesta en frecuencia para cada frecuencia utilizando [1.8.3], se regresa al tiempo y obtenemos la señal de ruido blanco y la respuesta del sistema,

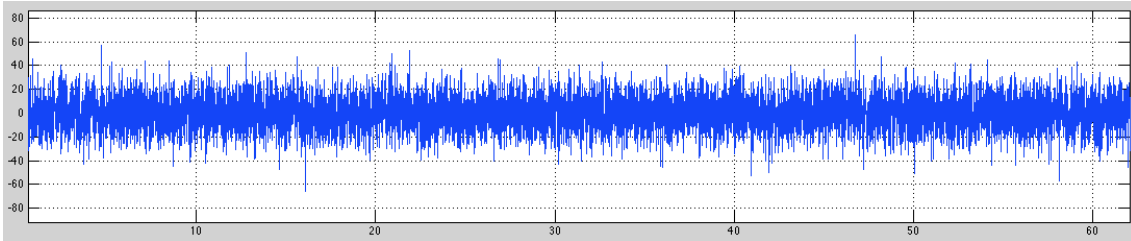


Figura 2.3.1: Señal Exacta de entrada para ruido blanco.

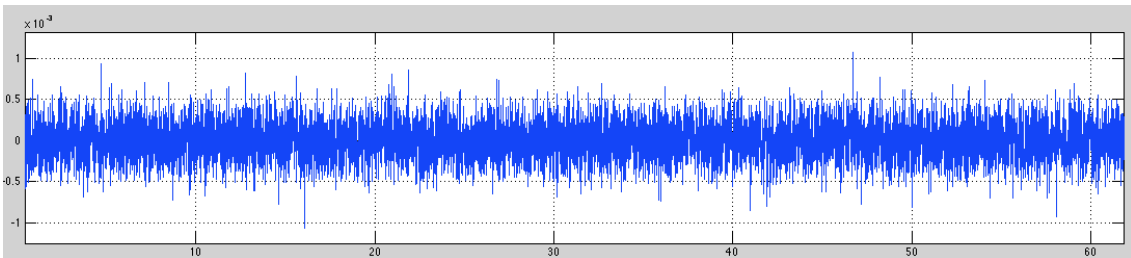


Figura 2.3.2: Señal Exacta de salida para ruido blanco.

### Generando frecuencias definidas

Para esta opción se introduce el número de frecuencias con sus amplitudes, se generan entonces los negativos correspondientes y se obtienen sus respuestas en frecuencia utilizando [2.3.4]:

Para una frecuencia  $w = 50$  con una amplitud de 10 tenemos:

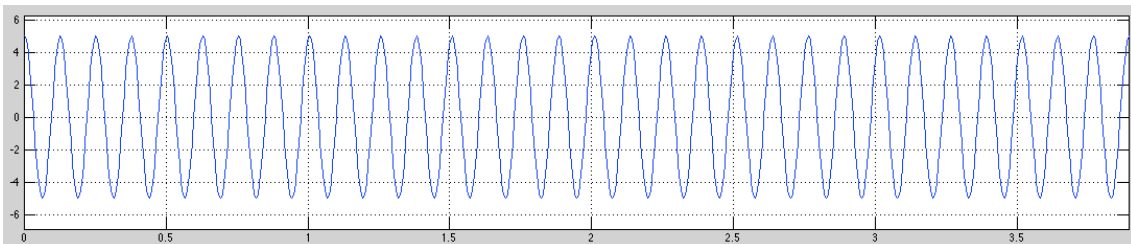


Figura 2.3.3: Señal Exacta de entrada para una frecuencia.

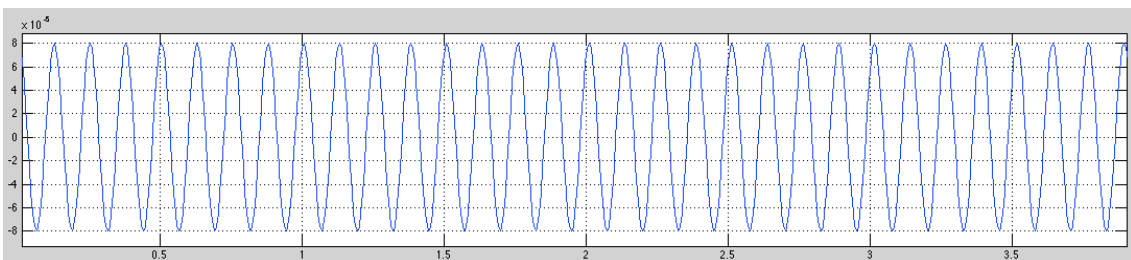


Figura 2.3.4: Señal Exacta de salida para una frecuencia.

Para tres frecuencia  $w_1 = 10$  con amplitud de 10,  $w_2 = 30$  con una amplitud de 5 y  $w_3 = 50$  con una amplitud de 50, obtenemos la siguientes gráficas:

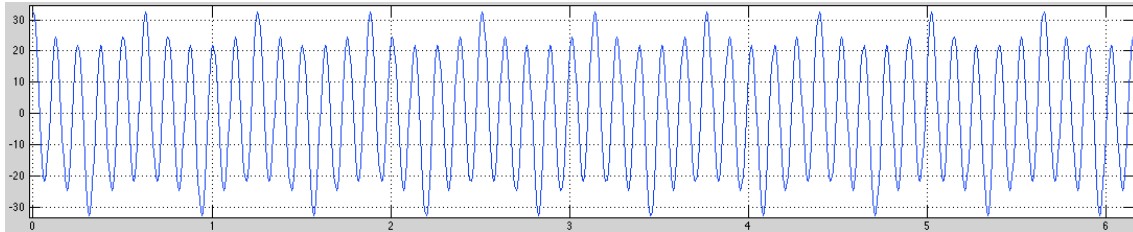


Figura 2.3.5: Señal Exacta de entrada para la suma de tres frecuencias frecuencia.

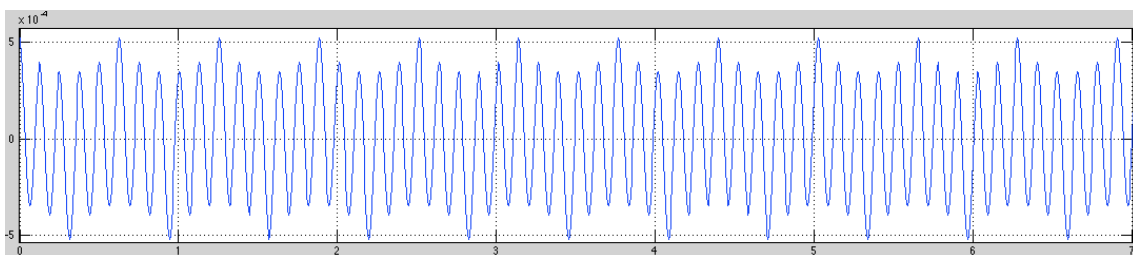


Figura 2.3.6: Señal Exacta de salida para la suma de tres frecuencias.

## 2.4 Respuesta exacta del acelerómetro con histéresis

Una vez obtenida la simulación la respuesta lineal de un acelerómetro con elemento piezoeléctrico la señal de salida es sometida al ciclo de histéresis que se construyó.

Las entradas para la simulación del ciclo de histéresis son el vector  $t$ , la entrada  $y$ , la cual es la salida de la simulación lineal, y el punto de saturación  $ps$ , el cual definiremos a un 80% del máximo punto de saturación de la señal de entrada, para fines de observar el ciclo.

*Para una sola frecuencia*

Sometida la respuesta lineal de una sola frecuencia de entrada,  $w = 50$  con una amplitud de 10, al ciclo de histéresis se obtiene:

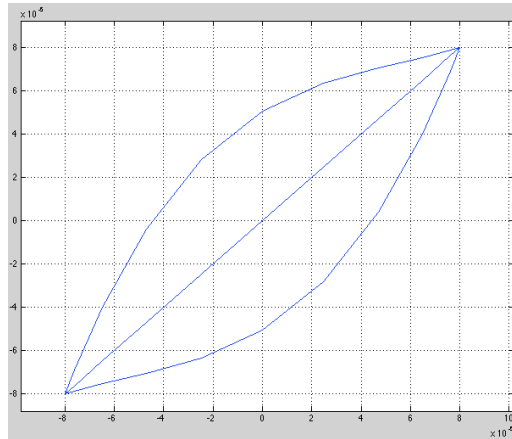


Figura 2.4.1: Señal Exacta del acelerometro con histéresis para una sola frecuencia.

Existen dos pares de coeficientes para describir este ciclo de histéresis, unos coeficientes describen el comportamiento ascendente del ciclo y los otros coeficientes describen el comportamiento descendente del ciclo, ambos son tomados en cuenta más adelante.

Los coeficientes de la ecuación de tercer orden polinomial para este ciclo de histéresis son los siguientes:

	C1	C2	C3	C4
Comportamiento ascendente	4.9538e+07	-7.9084e+03	0.6803	5.0682e-05
Comportamiento descendente	4.9454e+07	7.8967e+03	0.6810	-5.0605e-05

Tabla 2.4.1: Coeficientes para describir el ciclo de histéresis para una sola frecuencia de entrada.

La señal de entrada (rojo) sometida al ciclo de histéresis comparada con la señal de salida (negro) se muestra en la imagen 2.4.3:

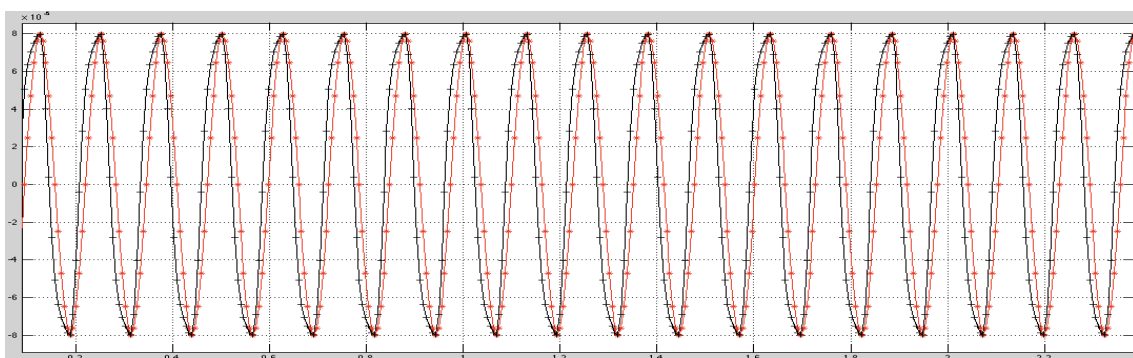


Figura 2.4.2: entrada (rojo) contra salida (negro) para una sola frecuencia.

### Para tres frecuencias

Sometida la respuesta lineal para tres frecuencia  $w_1 = 10$  con amplitud de 10,  $w_2 = 30$  con una amplitud de 5 y  $w_3 = 50$  con una amplitud de 50, al ciclo de histéresis obtenemos:

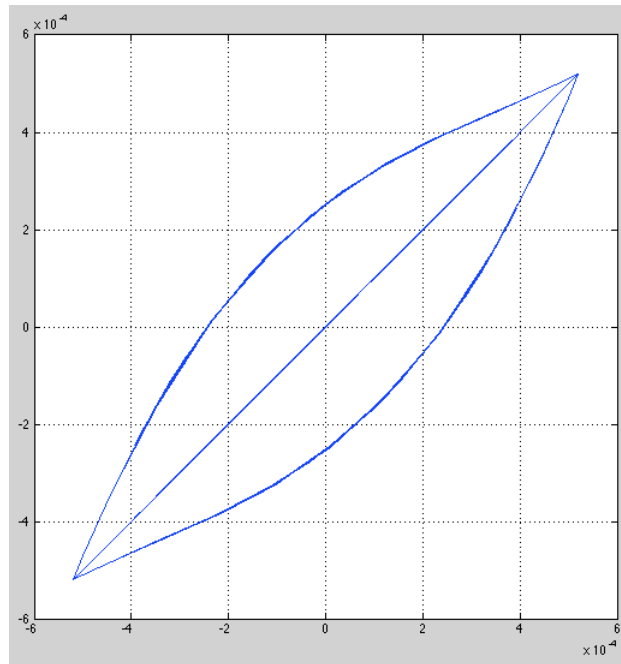


Figura 2.4.3: Señal Exacta del acelerómetro con histéresis para una tres frecuencias.

Debido a la lógica de programación usada para la simulación del ciclo de histéresis solo se obtienen los coeficientes del ciclo mayor, los semiciclos menores se grafican sobre el semiciclo mayor, los coeficiente para este caso se muestran en la tabla 2.4.2.

	C1	C2	C3	C4
Comportamiento ascendente	8.9893e+05	-937.2546	0.7581	2.5369e-04
Comportamiento descendente	8.9960e+05	937.9389	0.7580	-2.5387e-04

Tabla 2.4.2: Coeficientes para describir el ciclo de histéresis para tres frecuencias de entrada.

La señal de entrada (rojo) sometida al ciclo de histéresis comparada con la señal de salida (negro) se muestra en la figura 2.4.4:

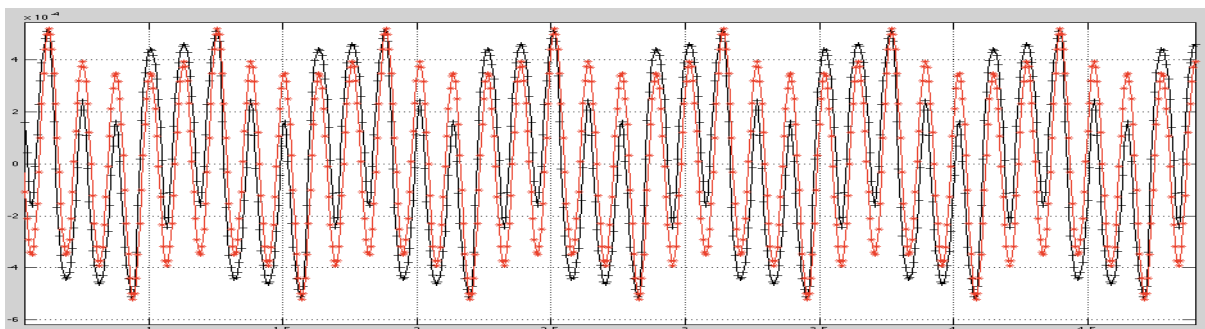


Figura 2.4.4: entrada (rojo) contra salida (negro) para tres frecuencias.

## 2.5 Conclusiones

Al analizar la respuesta del acelerómetro simulado se observa un comportamiento lineal, al ser sometido a la simulación del ciclo de histéresis podemos observar como la señal de salida de esta simulación ya no tiene una correspondencia lineal con la entrada, lo cual confirma un correcto funcionamiento de la simulación. Cabe mencionar que la obtención de los coeficientes del polinomio de tercer grado que describe la forma ascendente y descendente del ciclo de histéresis son de suma importancia para la construcción de la inversa de Volterra en el capítulo 4.



# CAPÍTULO 3

Construcción de la post-inversa para un  
acelerómetro

### 3.1 Introducción

Un modelo No-lineal AutoRegresivo con entradas eXogenas (NARX), es un modelo discreto de sistemas No-lineales en los cuales la variable de salida  $y_i$  depende de valores anteriores de sí misma (AutoRegresivo) y de valores anteriores de la entrada  $x_i$  (entradas eXogenas). El número de regresiones es función de la naturaleza del sistema, i. e., el máximo orden de que depende la respuesta de la entrada y la salida. Para el caso del acelerómetro  $y_i$  es la aceleración y  $x_i$  es el desplazamiento a describir.

### 3.2 Identificación del sistema por modelos discretos NARX

Aprovechando que se conoce la ecuación diferencial que domina la parte lineal del acelerómetro

$$\ddot{y} + \omega n^2 y + \frac{k_0}{m} i y = \frac{1}{m} \ddot{x} \quad [3.2.1]$$

Una propuesta de modelo NARX puede obtenerse a partir de discretizar las diferenciales presentes en la ecuación anterior.

Para calcular la derivada segunda en un punto  $i$  calculamos la derivada en un punto posterior,  $i+1/2$ , y la derivada en otro anterior,  $i-1/2$ , la diferencia entre ambas dividida por el intervalo será la derivada segunda, esto lo podemos escribir:

$$\ddot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} \approx \frac{\frac{dy_{i+1/2}}{dt} - \frac{dy_{i-1/2}}{dt}}{\Delta t} \quad [3.2.2]$$

Sustituimos las derivadas por sus fracciones incrementales.

$$\ddot{y}_i \approx \frac{\frac{y(i+1)-y(i)}{\Delta t} - \frac{y(i)-y(i-1)}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{y(i+1) + y(i-1) - 2 * y(i)}{\Delta t^2} \quad [3.2.3]$$

Al sustituirlo en la ecuación diferencial con un  $\Delta t = 1$  se obtiene,

$$y_{(i+1)} + y_{(i-1)} - 2y_i + \omega n^2 y_i + \frac{k_0}{m} i y_i = x_{(i+1)} + x_{(i-1)} - 2x_i \quad [3.2.4]$$

Por lo que se propone el siguiente modelo NARX,

$$y_{li} = A_1 y_{li-1} + A_2 y_{li-2} + A_3 X_i + A_4 X_{i-1} + A_5 y_{li-1} y_{li-1} + A_6 y_{li-1} y_{li-2} + A_7 y_{li-1} X_i + A_8 y_{li-1} X_{i-1} \quad [3.2.5]$$

Donde  $y_{li}$  representa la salida lineal. Esta salida debe pasar por un modelo que represente la histéresis. La histéresis es modelada por una ecuación cúbica cuyos coeficientes son dependientes de la amplitud.

$$f(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad [3.2.6]$$

A partir de la ecuación [3.2.5] y el modelo se calcula el error al cuadrado, el cual debe ser cero:

$$e^2 = (y_{l_i} - u_i)^2 = 0 \quad [3.2.7]$$

Derivando con respecto a los coeficientes:

$$\frac{de^2}{dcoef} = 2(y_{l_i} - u_i) \frac{dy_{l_i}}{dcoef} = 0 \quad [3.2.8]$$

Del desarrollo de esta ecuación, a través del método de mínimos cuadrados, se obtiene un vector que contiene los retrasos de  $y$  y  $x$  para cada  $i$ . Una matriz con las derivadas para cada coeficiente y un vector con los coeficientes a encontrar, de tal forma que el sistema a resolver es el siguiente:

$$\{\Sigma\} = M\{C\} \quad [3.2.9]$$

Multiplicando por la matriz de vectores propios, y su inversa para no alterar la ecuación, de la matriz  $M$  se obtiene:

$$\{\Sigma\} = M\Phi\Phi^{-1}\{C\} \quad [3.2.10]$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $\Phi^{-1}$  se obtiene:

$$\Phi^{-1}\{\Sigma\} = \Phi^{-1}M\Phi\Phi^{-1}\{C\} \quad [3.2.11]$$

De aquí se puede observar que los primeros tres términos del lado derecho de la igualdad corresponden a la Matriz diagonal de  $M$ :

$$\Phi^{-1}\{\Sigma\} = M_d\Phi^{-1}\{C\} \quad [3.2.12]$$

A la vez, la diagonal de  $M$  son los valores propios, por lo tanto:

$$\Phi^{-1}\{\Sigma\} = eV\Phi^{-1}\{C\} \quad [3.2.13]$$

Despejando  $\Phi^{-1}\{C\}$ :

$$\Phi^{-1}\{C\} = \frac{\Phi^{-1}\{\Sigma\}}{eV} \quad [3.2.14]$$

De esta última ecuación podemos obtener los valores de  $C$ .

Se diseñó un algoritmo y se programó para encontrar los coeficientes y construir el modelo del acelerómetro. Como ejemplo se prueba para una frecuencia  $w = 100$  con una amplitud de 10, se genera su modelo y se compara con la respuesta exacta.

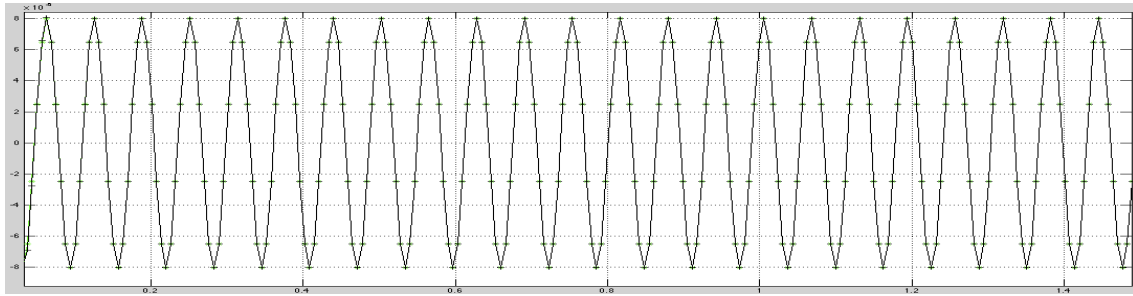


Figura 3.2.1: Señal Exacta del acelerómetro comparada con la señal modelada.

Como se puede observar en la figura 3.2.1. la señal exacta y la señal generada con el modelo NARX son muy similares, su MSE (error cuadrático medio) es de: 0.0351%.

### 3.3 Análisis y desarrollo teórico de la inversa de Volterra para sistemas Wiener

Debido a que el acelerómetro es un modelo tipo Wiener [17], los operadores de Volterra se pueden obtener desglosando en términos la ecuación [3.2.6]. Esto se puede mostrar esquemáticamente en la Figura 3.3.1.

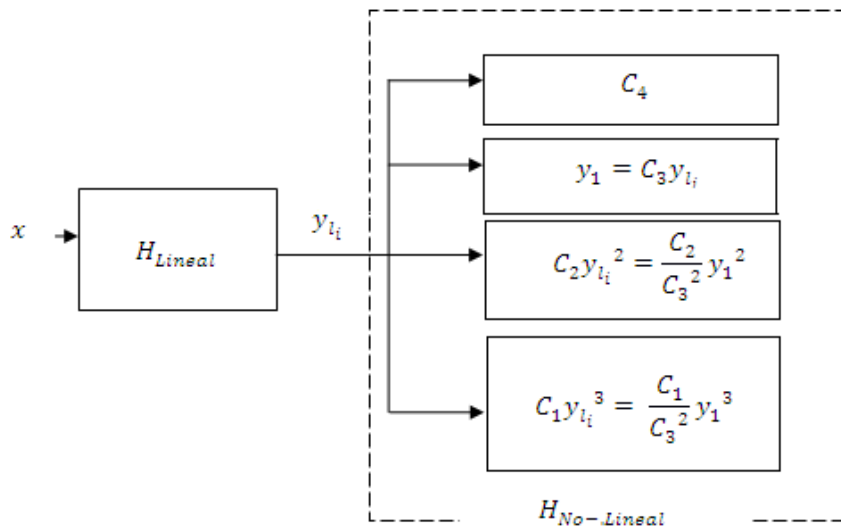


Figura 3.3.1: Representación en bloques del proceso.

De este esquema se tiene que las ALEs (Ecuaciones Lineales Asociadas), son las siguientes:

$$y_0 = C_4 \quad [3.3.1]$$

$$y_{1i} = C_3 y_{li} \quad [3.3.2]$$

$$y_{2i} = C_2 y_{li}^2 \quad [3.3.3]$$

$$y_{3i} = C_1 y_{li}^3 \quad [3.3.4]$$

$y_2, y_3$  pueden fácilmente ser puestas en función de  $y_1$ . Considerando un MSE del 5% entre la salida lineal del sistema con histéresis y la  $y_1$  se obtiene la siguiente imagen:

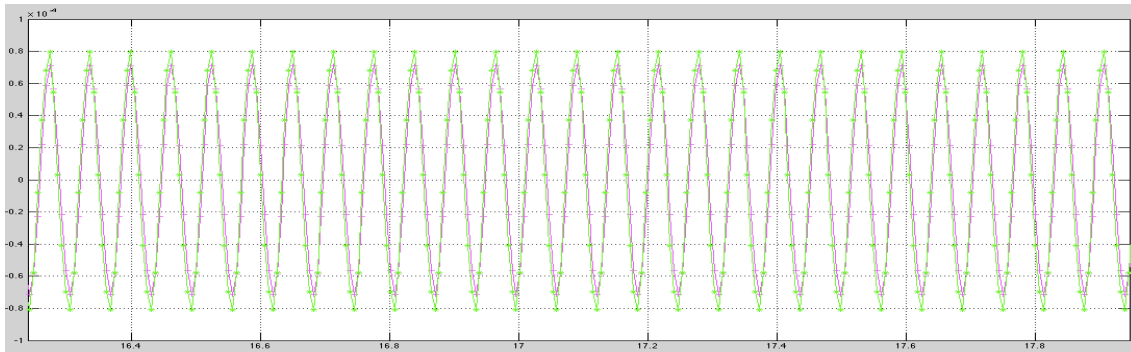


Figura 3.3.2: Salida de la histéresis contra  $y_1$ .

Si se suma a  $y_1$ ,  $y_2 + y_3 + y_4$ , el MSE da un valor de 0.0257%, lo cual indica que la descomposición y su correspondiente suma describen la entrada lineal del sistema.

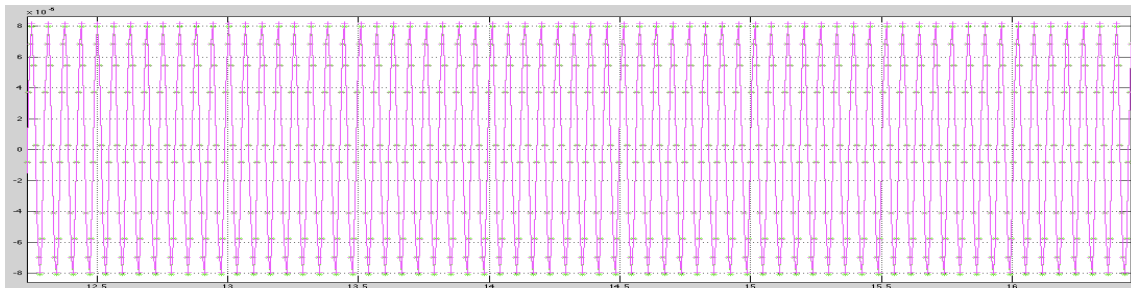


Figura 3.3.3: Salida de la histéresis contra todas las  $y$ 's sumadas.

Para este trabajo se calcularon los primeros tres operadores de Volterra, teniendo que:

$$z_1 = H^{-1} \quad [3.3.5]$$

$$z_2 = -z_1[y_2[z_1]] \quad [3.3.6]$$

$$z_3 = -z_1[y_3[Zz_1]] + 2z_1[y_2\{z_2\}\{z_1\}] \quad [3.3.7]$$

Despejando  $y_{li}$  de [3.3.2], se tiene:

$$y_{li} = \frac{y_{1i}}{C_3} \quad [3.3.8]$$

Sustituyendo [3.3.8] en [3.2.5]:

$$y_{1i} = A_1 y_{1i-1} + A_2 y_{1i-2} + A_3 C_3 x_i + A_4 C_3 x_{i-1} \quad [3.3.9]$$

Se realiza la prueba del armónico a [3.3.9], para lo cual consideramos que:

$$X = X_0 e^{i\omega t} \quad [3.3.10]$$

Discretizando:

$$t = (n - 1)\Delta t \quad [3.3.11]$$

$$T = (m - 1)\Delta t \quad [3.3.12]$$

Donde  $m$  es el número total de puntos. Se tiene entonces que:

$$X = X_0 e^{\frac{i2\pi(n-1)}{m-1}} \quad [3.3.13]$$

Reduciendo:

$$X = X_0 e^{\frac{i2\pi n}{m}} \quad [3.3.14]$$

Y por lo tanto:

$$Y = H(n)X_0 e^{\frac{i2\pi n}{m}} \quad [3.3.15]$$

Sustituyendo [3.3.14] y [3.3.15] en [3.3.9]:

$$H(n)X_0 e^{\frac{i2\pi n}{m}} = A_1 H(n)X_0 e^{\frac{i2\pi(n-1)}{m}} + A_2 H(n)X_0 e^{\frac{i2\pi(n-2)}{m}} + A_3 C_3 X_0 e^{\frac{i2\pi n}{m}} + A_4 C_3 X_0 e^{\frac{i2\pi(n-1)}{m}} \quad [3.3.16]$$

Reduciendo:

$$H(n) = A_1 H(n) e^{\frac{-i2\pi}{m}} + A_2 H(n) e^{\frac{-i4\pi}{m}} + A_3 C_3 + A_4 C_3 e^{\frac{-i2\pi}{m}} \quad [3.3.17]$$

Agrupando:

$$H(n) \left[ 1 - A_1 e^{\frac{-i2\pi}{m}} - A_2 e^{\frac{-i4\pi}{m}} \right] = A_3 C_3 + A_4 C_3 e^{\frac{-i2\pi}{m}} \quad [3.3.18]$$

Despejando  $H(n)$ :

$$H(n) = \frac{A_3 C_3 + A_4 C_3 e^{\frac{-i2\pi}{m}}}{1 - A_1 e^{\frac{-i2\pi}{m}} - A_2 e^{\frac{-i4\pi}{m}}} \quad [3.3.19]$$

Se simplifica:

$$\Delta^j = e^{\frac{i2\pi}{m}} \quad [3.3.20]$$

Con lo cual sustituyendo [3.3.20] en [3.3.19] se obtiene:

$$H(n) = \frac{A_3 C_3 + A_4 C_3 \Delta^{-1}}{1 - A_1 \Delta^{-1} - A_2 \Delta^{-2}} \quad [3.3.21]$$

Calculamos  $K_1(n)$ :

$$K_1(n) = H(n)^{-1} = \frac{1 - A_1 \Delta^{-1} - A_2 \Delta^{-2}}{A_3 C_3 + A_4 C_3 \Delta^{-1}} \quad [3.3.22]$$

Despejando y regresando al dominio del tiempo:

$$\left( (A_3 C_3 + A_4 C_3 \Delta^{-1}) K_1(n) = 1 - A_1 \Delta^{-1} - A_2 \Delta^{-2} \right) X_0 e^{\frac{i2\pi n}{m}} \quad [3.3.23]$$

Por lo tanto:

$$A_3 C_3 z_{1i} + A_4 C_3 z_{1i-1} = x_i - A_1 x_{i-1} - A_2 x_{i-2} \quad [3.3.24]$$

Despejando  $z_{1i}$ :

$$z_{1i} = -\frac{A_4}{A_3} z_{1i-1} + \frac{1}{A_3 C_3} x_i - \frac{A_1}{A_3 C_3} x_{i-1} - \frac{A_2}{A_3 C_3} x_{i-2} \quad [3.3.25]$$

En este caso nuestra entrada es  $y_i$  por lo tanto:

$$z_{1i} = -\frac{A_4}{A_3} z_{1i-1} + \frac{1}{A_3 C_3} y_i - \frac{A_1}{A_3 C_3} y_{i-1} - \frac{A_2}{A_3 C_3} y_{i-2} \quad [3.3.26]$$

Se procede con el análisis de  $Z_{2i}$  para lo cual construimos el diagrama de bloques basados en [3.3.6]

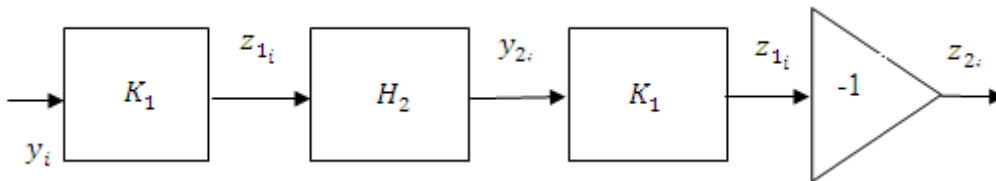


Figura 3.3.4: Representación en diagrama de bloques para  $z_{2i}$ .

Se tiene que:

$$y_{2i} = \frac{C_2}{C_3^2} y_{1i} \{z_1\} y_{1i} \{z_1\} \quad [3.3.27]$$

Pero:

$$y_{1i} \{z_1\} = y_i \quad [3.3.28]$$

Por lo tanto:

$$y_{2i} = \frac{C_2}{C_3^2} y_i \quad [3.3.29]$$

Sustituyendo en [3.3.26] la entrada [3.3.27] multiplicada por -1:

$$z_{2i} = -\frac{A_4}{A_3} z_{2i-1} - \frac{C_2}{A_3 C_3^3} y_i^2 + \frac{A_1 C_2}{A_3 C_3^3} y_{i-1}^2 + \frac{A_2 C_2}{A_3 C_3^3} y_{i-2}^2 \quad [3.3.3]$$

Para  $Z_{3i}$  dividimos en dos secciones:  $Z_{3ia}$  y  $Z_{3ib}$ , para  $Z_{3ib}$  tenemos el siguiente diagrama de bloques:

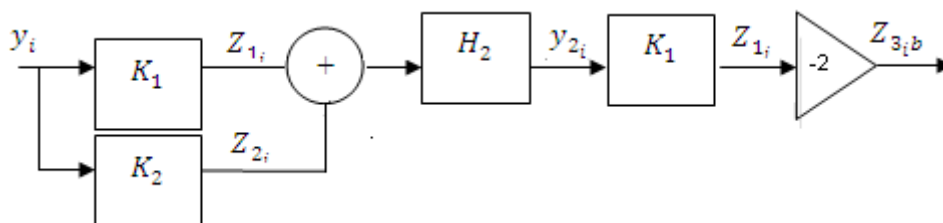


Figura 3.3.5: Representación en diagrama de bloques para  $Z_{3ib}$ .

Reduciendo los bloques obtenemos:

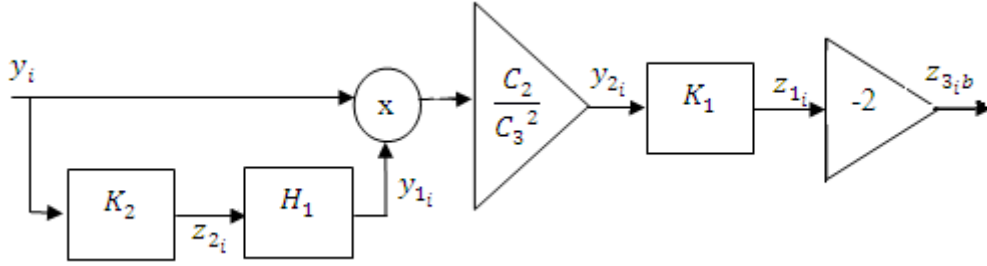


Figura 3.3.6: Reducción del diagrama de bloques para  $Z_{3ib}$ .

Calculamos  $Y_{1i}$  para la entrada  $Z_{2i}$ , obtenemos:

$$y_{1i} = A_1 y_{1i-1} + A_2 y_{1i-2} + A_3 C_3 z_{2i} + A_4 C_3 z_{2i-1} \quad [3.3.31]$$

De [3.3.30] tenemos que:

$$z_{2i} + \frac{A_4}{A_3} z_{2i-1} = -\frac{C_2}{A_3 C_3} y_i^2 + \frac{A_1 C_2}{A_3 C_3} y_{i-1}^2 + \frac{A_2 C_2}{A_3 C_3} y_{i-2}^2 \quad [3.3.32]$$

Completando [3.3.32] para sustituir en [3.3.31] se obtiene que:

$$y_{1i} = A_1 y_{1i-1} + A_2 y_{1i-2} - \frac{C_2}{C_3} y_i^2 + \frac{A_1 C_2}{C_3} y_{i-1}^2 + \frac{A_2 C_2}{C_3} y_{i-2}^2 \quad [3.3.33]$$

Multiplicando por  $y_i$ :

$$y_{1i} y_i = A_1 y_{1i-1} y_i + A_2 y_{1i-2} y_i - \frac{C_2}{C_3} y_i^3 + \frac{A_1 C_2}{C_3} y_{i-1}^2 y_i + \frac{A_2 C_2}{C_3} y_{i-2}^2 y_i \quad [3.3.34]$$

Multiplicando por  $\frac{C_2}{C_3^2}$ :

$$\frac{C_2}{C_3^2} y_{1i} y_i = \frac{A_1 C_2}{C_3^2} y_{1i-1} y_i + \frac{A_2 C_2}{C_3^2} y_{1i-2} y_i - \frac{C_2^2}{C_3^4} y_i^3 + \frac{A_1 C_2^2}{C_3^4} y_{i-1}^2 y_i + \frac{A_2 C_2^2}{C_3^4} y_{i-2}^2 y_i \quad [3.3.35]$$

Completando [3.3.35] y sustituyendo en [3.3.26]:

$$z_{1i} = \frac{A_4}{A_3} z_{1i-1} + \left[ -\frac{C_2^2}{A_3 C_3^5} y_i^3 + \frac{A_1 C_2^2}{A_3 C_3^5} y_{i-1}^2 y_i + \frac{A_2 C_2^2}{A_3 C_3^5} y_{i-2}^2 y_i \right] \quad [3.3.36]$$

Como:

$$z_{3ib} = -2 * z_{1i} \quad [3.3.37]$$

Obtenemos que:



$$z_{3ib} = \frac{A_4}{A_3} z_{1i-1} - 2 \left[ -\frac{C_2^2}{A_3 C_3^5} y_i^3 + \frac{A_1 C_2^2}{A_3 C_3^5} y_{i-1}^2 y_i + \frac{A_2 C_2^2}{A_3 C_3^5} y_{i-2}^2 y_i \right] \quad [3.3.38]$$

### 3.4. Construcción del modelo NARX para la inversa de Volterra

Debido a la facilidad que proporciona el conocer todos los coeficientes que construyen cada uno de los operadores de Volterra, el modelo resultó sencillo de programar, solo se tiene una consideración importante, los coeficientes que arroja la simulación de histéresis son 8, 4 coeficientes que se usan para describir la parte ascendente y 4 para describir la parte descendente, teniendo en cuenta esta consideración se programó cada uno de los operadores de Volterra. Siguiendo con la frecuencia  $\omega = 100$  con una amplitud de 10, de nuestros ejemplos anteriores y considerando el 5% de MSE entre la salida lineal del sistema con histéresis y la  $y_1$  obtenemos los siguientes operadores de Volterra:

Para el primer operador de Volterra  $z_1$  contra la entrada  $x$ , obtenemos la siguiente figura:

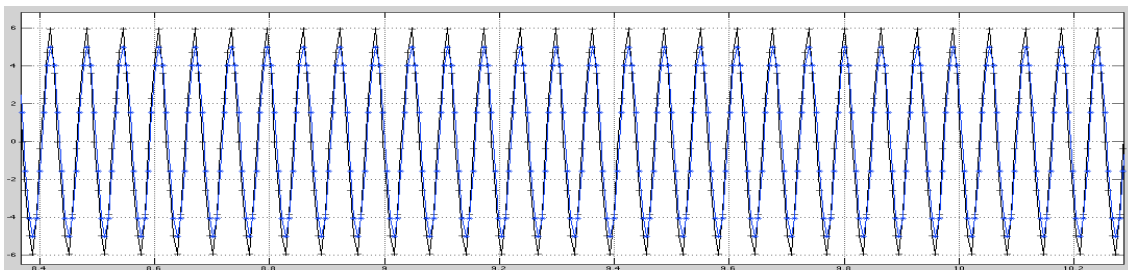


Figura 3.4.1: El primer operador de Volterra (azul) contra la entrada  $x$  (negro).

Probando una señal a un 5% fuera del rango lineal se puede observar que el primer operador de volterra recupera la entrada al sistema, comparada esta señal de salida, contra una dentro del rango lineal y la cual se puede expresar como un múltiplo de ella obtenemos la siguiente figura.

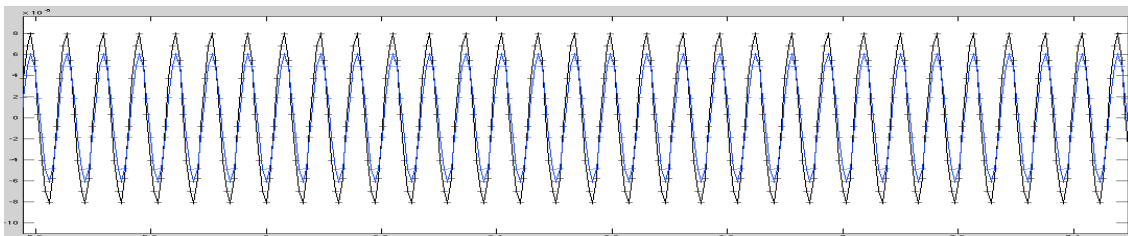


Figura 3.4.2: señal de salida fuera del rango lineal (azul) contra señal de salida en el rango lineal (negro).

Se puede observar que ya no existe un comportamiento proporcional entre las salidas y sin embargo aún se puede recuperar la señal de entrada de la señal fuera del rango lineal figura(3.4.1).

Si se introduce una frecuencia  $w=5000$ , mayor a la frecuencia natural ( $wn=2500$ ), y observamos que las respuestas exactas del sistema difieren en amplitud. Figura 3.4.3.

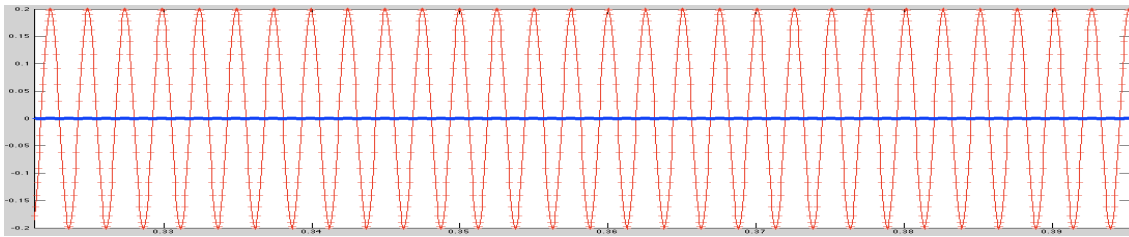


Figura 3.4.2: señal de salida para una  $w=2500$  (rojo) contra señal de salida para una  $w=5000$ (azul).

Tratando la salida cuya frecuencia de entrada es  $w=5000$ , vemos que se puede recuperar la entrada, como si se estuviera tratando dentro del ancho de banda. Lo cual sugiere un incremento en el ancho de banda.

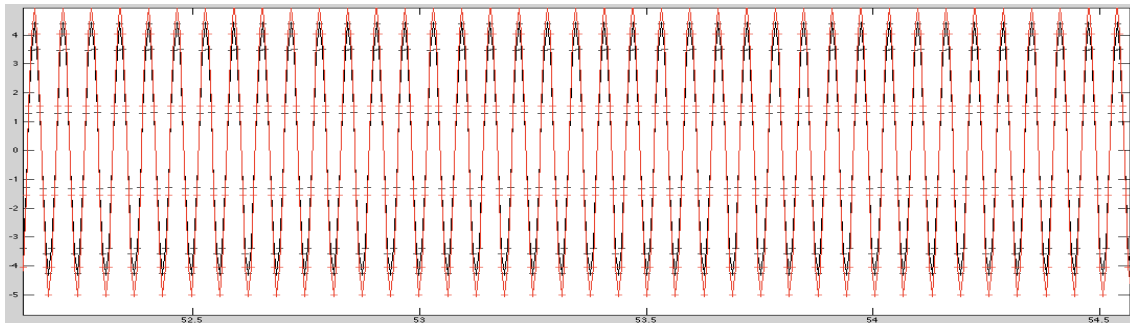


Figura 3.4.3: señal de entrada para un  $w=2500$  (rojo) contra el primer operador de Volterra(negro).

### 3.5. Conclusiones

Se constató el correcto funcionamiento de los modelos NARX para la parte lineal, la simulación del ciclo de histéresis y la construcción del primer operador de Volterra. El error entre entrada simulada y el primer operador de Volterra es mínimo, por lo cual se ha identifica la parte lineal correctamente. Fuera del rango lineal aún podemos recuperar la señal de entrada, con lo cual aumentamos el rango de medición. Se pueden tratar frecuencias mayores a la frecuencia natural y obtener su señal de entrada con lo cual se incrementa el ancho de banda.

# CAPÍTULO 4

## Trabajo experimental sobre un acelerómetro básico con elemento piezoeléctrico

### **4.1 Diseño del acelerómetro básico**

El primer desarrollo de acelerómetro que se comercializó, se le atribuye a McCollum y Peters [18], pesaba alrededor de una libra. Se componía de un marco en forma de E que contenía 20 a 55 anillos de carbono en tensión-compresión. Para 1923 se había aplicado en puentes, dinamómetros y en aviones. En 1925, su tecnología asociada se había trasladado a Alemania y en

1927 se comercializó en los EE.UU. No mucho después de 1930, la invención se comercializó de manera intensiva en los Estados Unidos de América, así como en Europa. Fue en este punto que los ingenieros y los científicos empezaron a pensar en nuevas aplicaciones y usos de esta máquina, lo que provocó avances en muchos campos tecnológicos.

### *Resultado del diseño*

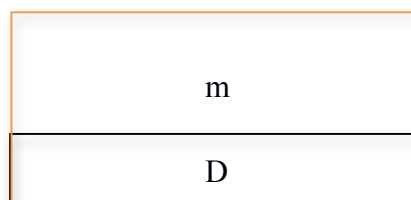
Para establecer el modelo matemático del sistema masa-resorte-amortiguamiento estructural que se presenta en la ecuación [2.3.4] del capítulo 2, debemos tener en consideración el único grado de libertad al desplazamiento de la masa. El mecanismo de respuesta se puede escribir de acuerdo a la segunda ley de Newton que liga las fuerzas actuando sobre el sistema a las aceleraciones resultantes. Por lo tanto la más alta de las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial o modelo será la aceleración.

En un elemento mecánico en serie, la fuerza aplicada  $f(t)$  es igual a la suma de las fuerzas actuantes en cada elemento y todos los elementos tienen el mismo desplazamiento.

### *Selección de la propuesta de diseño*

Se propusieron diversas alternativas de solución centrándose en las siguientes dos.

PROPUESTA 1. Un cilindro sometido al efecto de la masa (Figura 4.1.1). Este cilindro debía responder por sí solo a movimientos de tensión, realizados los cálculos necesarios el cilindro resultante era de una altura muy pequeña, inferior a los 20mm necesarios para colocar el parque piezoeléctrico, al incrementar su altura incrementaba su área transversal, dando como resultado un disco de dimensiones entre los 140mm y 160mm para una altura de 20mm, tomando en cuenta que toda el área transversal el disco debe estar sometido a la fuerza de la masa colocada sobre él, la masa resultaba de dimensiones aún más grandes.



*Figura 4.1.1: Cilindro sometido al efecto de la masa.*

Este diseño presentaba dimensiones poco prácticas, pues resultaban en un disco de un diámetro excesivamente superior a su altura, esto aunado a una masa que cubriese el área transversal y la altura que debía tener para colocar el equipo de censado lo hizo descartable.

PROPUESTA 2: La propuesta base incluye una probeta (R en Fig. 4.1.2) empotrada en una base (B en Fig. 4.1.2) con una masa insertada en su extremo superior (M en Fig. 4.1.2) y retenida por una estructura (S en Fig. 4.1.2).

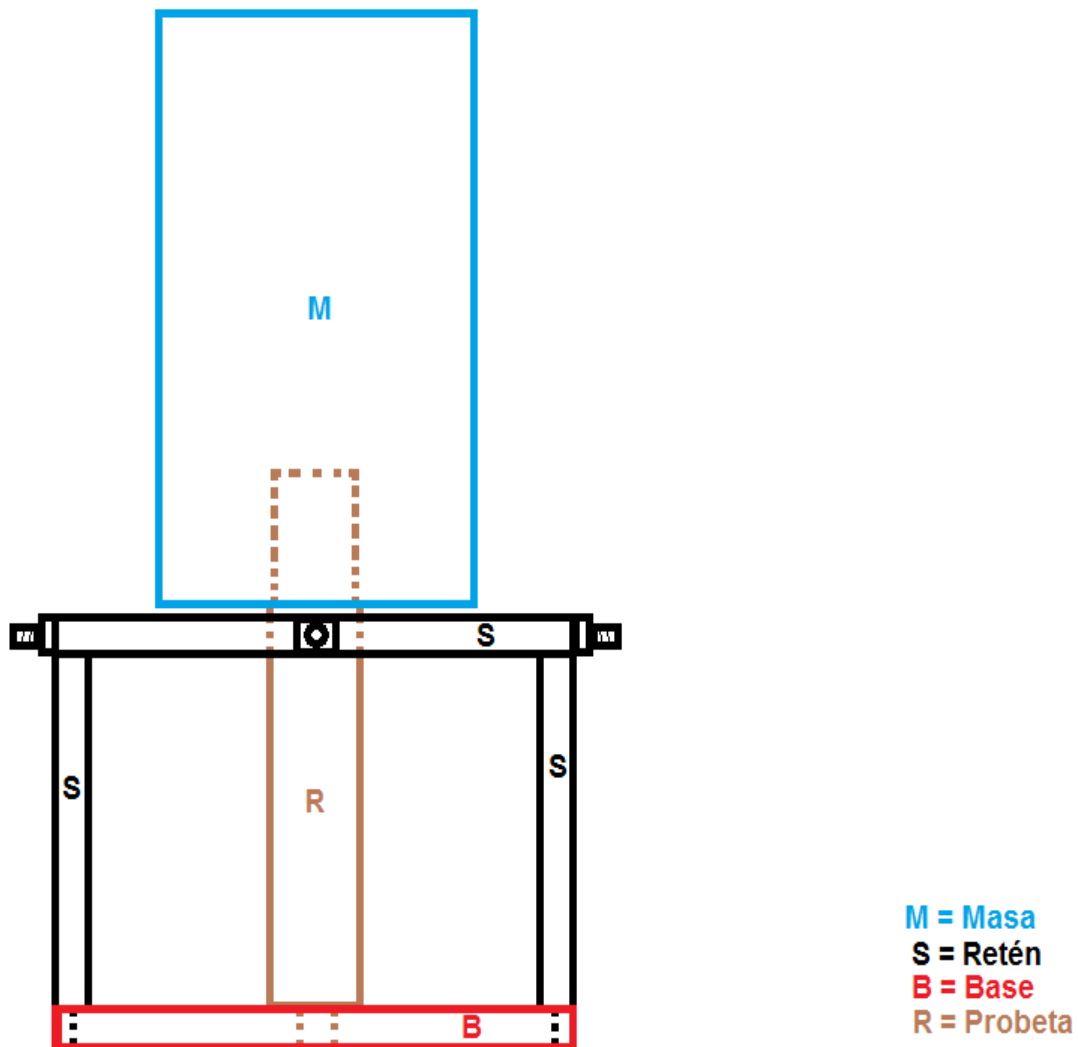


Figura 4.1.2: Propuesta base del prototipo de acelerómetro piezoeléctrico.

Esta propuesta fue la adecuada debido a su practicidad,

#### Probeta

##### Cálculos de diseño

Un cuerpo cuando vibra presenta 3 principales modos de vibración, uno como barra sometida a tensión y otro como viga sometida a flexión y como barra sometida a torsión [19]. Para los intereses de este prototipo solo se consideraran los primeros dos casos (Fig. 4.1.3 y 4.1.4).

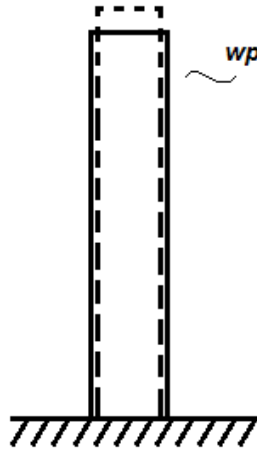


Figura 4.1.3: Prisma sometido a tensión

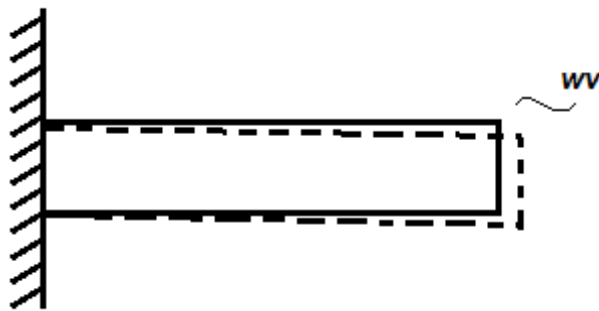


Figura 4.1.4: Viga sometida a flexión.

Debido a que se pretende fabricar un acelerómetro unidireccional, el objetivo es que nuestro elemento vibre a tensión preferentemente. Sea  $\omega_p$  la frecuencia principal para la barra sometida a tensión y  $\omega_v$  para la viga sometida a flexión. Para que el elemento vibre a tensión, se debe cumplir con que  $\omega_p \ll \omega_v$

Se establece entonces la condición de que  $\omega_v = N\omega_p$ , donde  $N$  es un número entero,

Por definición de frecuencia natural,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [4.1.1]$$

El siguiente paso es encontrar la expresión que determina la rigidez del elemento cuando es sometido a tensión y cuando es sometido a flexión. La definición general del coeficiente de resorte o rigidez es,

$$k = \frac{F}{u} \quad [4.1.2]$$

Donde  $F$  tiene la dirección de la fuerza de respuesta del material y no la de la fuerza aplicada sobre la barra (En cuyo caso debería añadirse un signo negativo).

- Considerando el caso de barra a tensión:

La fuerza de inercia es:

$$F = m\ddot{u} \quad [4.1.3]$$

Donde  $\ddot{u}$  es el desplazamiento en  $x$  y  $m$  es la masa concentrada colocada en el extremo no empotrado (Fig. 4.1.5).

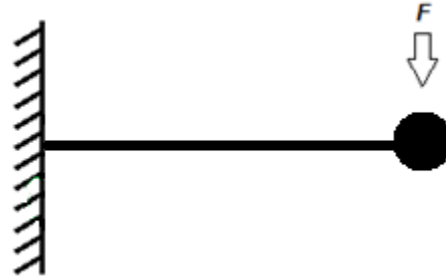


Figura 4.1.5: Viga sometida a flexión.

El esfuerzo producido por una fuerza normal  $F$  en una barra es,

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{m\ddot{u}}{A} \quad [4.1.4]$$

De acuerdo a la ley de Hooke:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\epsilon \quad [4.1.5]$$

Por la definición de deformación,

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \frac{du}{dx} \quad [4.1.6]$$

Considerando una deformación proporcional a  $x$ ,

$$\frac{F}{A} = E \frac{u}{L} \quad [4.1.7]$$

Sustituyendo la ecuación [4.1.7] en la [4.1.2], se tiene,

$$k = \frac{F}{u} = \frac{EA}{L} \quad [4.1.8]$$

Por lo que la constante equivalente es:

$$k = \frac{m\ddot{u}}{u} = \frac{EA}{L} \quad [4.1.9]$$

Al dividir la ecuación [4.1.9] entre la masa:

$$\omega_n^2 = \frac{\ddot{u}}{u} = \frac{EA}{mL} \quad [4.1.10]$$

Despejando  $\omega_n$  obtenemos:

$$\omega_v = \sqrt{\frac{EA}{mL}} \quad [4.1.11]$$

- Considerando la viga a flexión (Fig. 4.1.6):

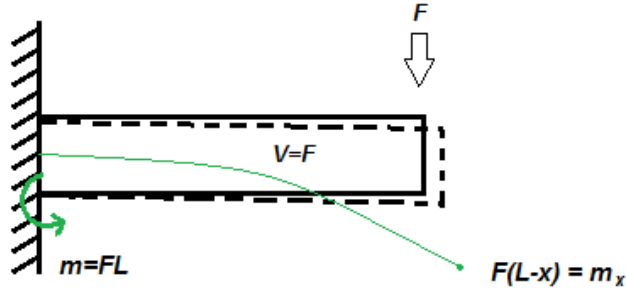


Figura 4.1.6: Momentos de la viga.

El cortante de una viga cargada con una fuerza  $F=-mg$  se muestra en la Fig. 4.1.7.

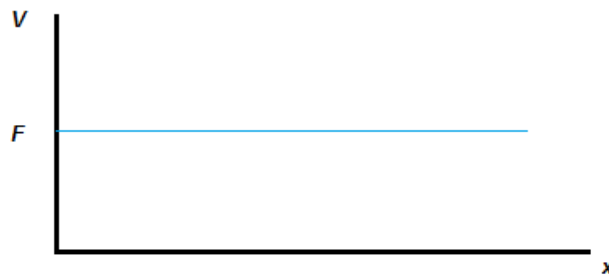


Figura 4.1.7: Esfuerzo cortante.

$$V = mg \quad [4.1.12]$$

Su integral respecto a  $x$  es el momento a lo largo de la viga se observa en la Fig. 4.1.8.

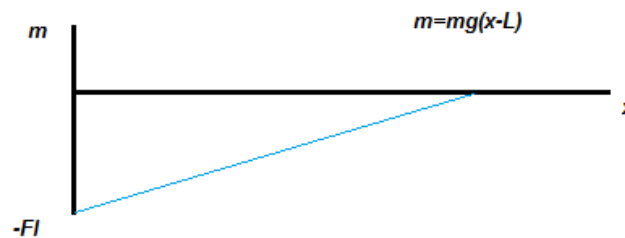


Figura 4.1.8: Momentos a lo largo de la viga.

A partir de ésta se tiene que:

$$M = mg(x - L) \quad [4.1.13]$$



A su vez, su integral es proporcional al ángulo de flexión de la viga a lo largo de  $x$ , como se ve en la Fig. 4.1.9.

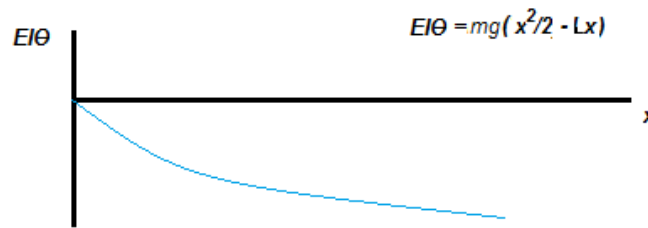


Figura 4.1.9: Ángulo de flexión de la viga a lo largo de  $x$ .

Por lo que:

$$EI\theta = mg \left( \frac{x^2}{2} - Lx \right) \quad [4.1.14]$$

Finalmente la integral del ángulo da la posición de la viga a lo largo de  $x$  se expresa gráficamente en la figura 4.1.10.

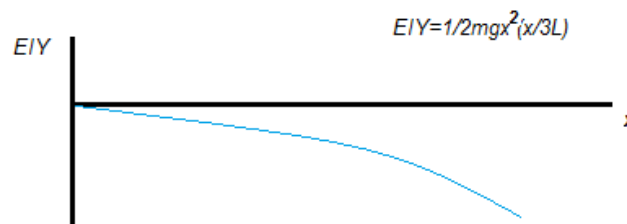


Figura 4.1.10: Posición de la viga a lo largo del eje  $x$ .

De donde:

$$EIy = \frac{1}{2} \square gx^2 \left( \frac{x}{3} - L \right) \quad [4.1.15]$$

Dado que la  $x$  que interesa es en el extremo de la viga,  $x=L$  por lo tanto:

$$y = - \frac{mgL^3}{3EI} \quad [4.1.16]$$

Despejando de la anterior ecuación  $F/y=-k$  da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \quad [4.1.17]$$

Dado que el objetivo es que la frecuencia natural en flexión sea mucho mayor a la frecuencia natural en tensión,

$$\sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} > \sqrt{\frac{EA}{mL}} \quad [4.1.18]$$

Al final se llega a que el momento de inercia debe ser lo mas pequeño posible y

el área lo mayor posible.

$$\frac{I}{A} \gg \frac{L^2}{3} \quad [4.1.19]$$

Nombramos k como factor de amplificación,

$$\frac{I}{A} > k^2 \frac{L^2}{3} \quad [4.1.20]$$

En la literatura, el segundo momento de área o inercia, se define como:

$$I = \int x^2 dA \quad [4.1.21]$$

Se definen los ejes de coordenadas del prisma y se selecciona el área transversal, acorde con la figura 4.1.11.

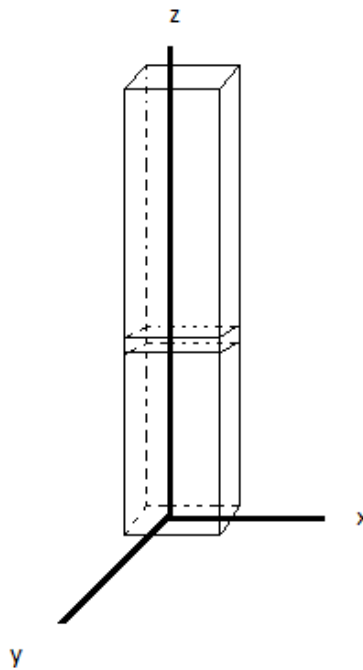


Figura 4.1.11: Localización de los ejes en el prisma cuadrangular.

Analizando el área transversal (Figura 4.1.12) y determinando el momento de inercia en el eje, obtenemos (Figuras 4.1.12 y 4.1.13):

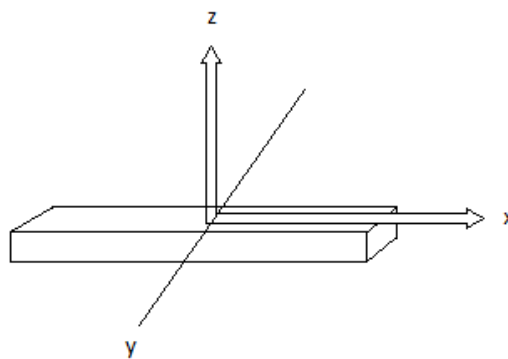


Figura 4.1.12: Área transversal del prisma.

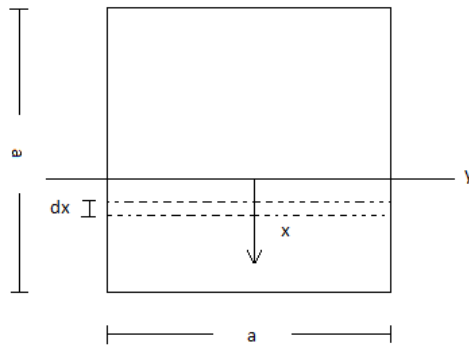


Figura 4.1.13: Vista superior del área transversal.

Una sección transversal cuadrangular tiene como geometría  $a^2$ , pero como la inercia se calcula en el centro, solo se considera la parte superior o inferior del cuadrado  $a/2$  y se multiplica por 2.

$$I = 2 \int_0^{a/2} x^2 dx \quad [4.1.22]$$

Se tiene al final:

$$I = \frac{a^4}{12} \quad [4.1.23]$$

Se considera un diseño de prisma cuadrangular de longitud  $L$ , con un retén que impida el movimiento de flexión, colocado a  $0.88L$

Se define  $L_v$  como  $0.12L$ , que es la parte que queda por encima del retén

$$L_v = 0.12L \quad [4.1.24]$$

Por lo tanto la ecuación [4.1.16] que da de la siguiente forma

$$\omega_v = \sqrt{\frac{3EI}{mL_v^3}} \quad [4.1.25]$$

Sustituyendo [4.1.24] obtenemos:

$$\omega_v = \sqrt{\frac{3EI}{m1.7 \times 10^{-3} L^3}} \quad [4.1.26]$$

Tomando en cuenta que [4.1.26] debe ser mayor que  $(10)k$  veces:

$$\sqrt{\frac{3EI}{m1.7 \times 10^{-3} L^3}} > k \sqrt{\frac{EA}{mL}} \quad [4.1.27]$$

Reduciendo términos:

$$\frac{I}{A} > k^2 5.66 \times 10^{-4} L^2 \quad [4.1.28]$$

Sustituyendo [4.1.23] y el área transversal:

$$a > k\sqrt{6.8 \times 10^{-3}L} \quad [4.1.29]$$

Si  $a=19\text{mm}$  y  $L=70\text{mm}$ :

$$1.9 > 0.5772k \quad [4.1.30]$$

Por lo tanto  $k$ :

$$3.29 > k$$

Este resultado es apropiado dado que la medida del diámetro del parche piezoeléctrico es de 20mm. y el valor de  $k$  resulta 3.29, esto garantiza su comportamiento como prisma a tensión por la dimensión de  $k$ .

### Selección del material

Para el material de la probeta se eligió el acrílico por ser un material con bajo módulo de Young, lo que nos permite tener deformaciones en el material con una masa relativamente pequeña, tal como se muestra en la Tabla 4.1.1.

MATERIAL	E (GPa)
Aleaciones de aluminio	68 – 73
Asbesto-cemento	24
Bronce	78 – 110
Fierro fundido	80 – 170
Concreto	14 – 30
Cobre	107 – 131
Vidrio	46 – 73
Plomo	4,8 – 17
Acero	200 – 212
Plásticos	
ABS	1,7
Nylon	1,4 – 2,75
Acrílico	6,0
Polietileno	0,8
Polistireno	5,0
PVC rígido	2,4 – 2,75
Rocas	
Granito	50
Limestone	55
Cuarzita	24,0 – 44,8
Arenisca	2,75 – 4,8
Schist	6,5 – 18,6

Tabla 4.1.1: Módulo de Young para diferentes materiales.

### Consideraciones de forma

Como se estableció en los cálculos de diseño la probeta será de sección transversal cuadrangular, se elaboró una barra de acrílico de forma rectangular cuyas medidas son las siguientes: 70 mm de alto por 19 mm de ancho y 20 mm de profundidad, una saliente superior de forma cilíndrica de 33 mm de alto por

un diámetro de 18 mm y una saliente inferior de forma cilíndrica de 10 mm de alto por 10mm de diámetro (Fig. 4.1.14).

La probeta debe presentar en sus dos extremos salientes que permitan el empotramiento en la base y de la masa que ejerce la fuerza, en la base la altura de la saliente está dada por el ancho de la placa base y el diámetro fue considerado de 10 mm para obtener un área de apoyo suficiente entre la probeta y la parte superior de la base esto da como resultado la siguiente forma y sus medidas correspondientes:

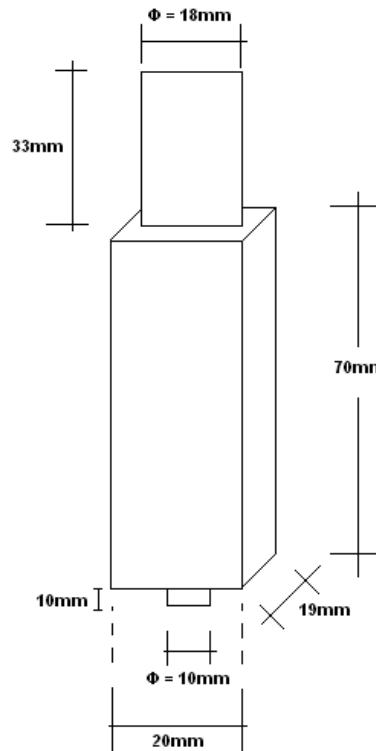


Figura 4.1.14: Forma y medidas de la probeta.

### Retén

#### Cálculos de diseño

La estructura de retén no presenta un diseño basado en cálculos, la única condición que debe cumplir es que los puntos de apoyo que impedirán el movimiento a flexión se encuentren aun 88% es decir que:

$$h = 62 \text{ mm} \quad [4.1.31]$$

#### Selección del material

El material que se utiliza no influye en la respuesta de nuestro sistema, sin embargo se eligió el acero Cold Rolled por su resistencia y dureza, lo cual mantendrá firme y en su lugar a la estructura y ésta a su vez a la probeta.

#### Consideraciones de forma

La estructura debe retener el movimiento a flexión que pudiera llegar a tener la probeta en sus cuatro caras, por lo tanto se idearon cuatro puntos de apoyo que los dan 4 roscas ciegas de acero inoxidable rosca estándar de ¼ de pulgada, enroscadas en el extremo de unos prisioneros de acero inoxidable cuerda estándar de ¼ de pulgada por 2 pulgadas de largo, los prisioneros se

ajustan a su posición a través de roscas de acero inoxidable de  $\frac{1}{4}$  de pulgada, estos cuatro puntos de apoyo se encuentran centrados en cada lado de un cuadrado formado por cuatro piezas de hierro, soldadas, cuyas dimensiones individuales son: dos piezas de 72mm de largo por 12.8mm de ancho y 12.8mm de alto, y dos piezas de 102.2mm de largo por 12.8mm de ancho y 12.8mm de alto. Dos lados de este cuadrado están soldados a dos postes en cuyo extremo inferior se localiza un corte para que embone con la base y se sujete con tornillos, la dimensión de los postes es de: 57mm de alto por 12.8 mm de ancho y 12.8mm de profundidad (Figuras 4.1.15 y 4.1.16).

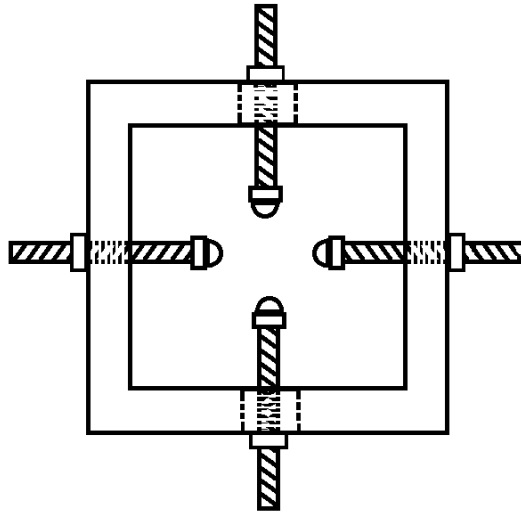


Figura 4.1.15: Vista superior de la estructura de retén.

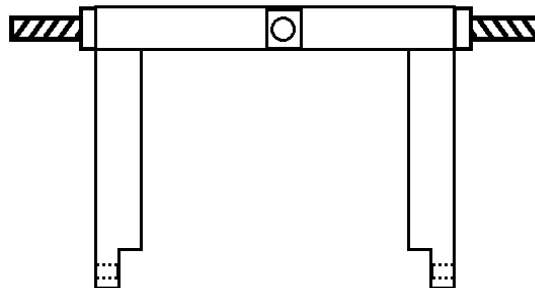


Figura 4.1.16: Vista frontal de la estructura de retén

#### Base

##### Cálculos de diseño

La base no se diseñó con cálculos específicos, sin embargo se optó por una sección rectangular de 97mm por 101mm de altura 12mm.

##### Selección del material

Se seleccionó acero AISI 10 40 por su disponibilidad en los materiales del taller y por su dureza y su resistencia.

##### Consideraciones de forma

La forma se determinó en sección rectangular de 97 mm por 101 mm y altura 12 mm en el centro una perforación de 10 mm de diámetro, en donde se empotrará la probeta y en dos de sus costados unas muescas para los postes de apoyo de la estructura de reten de las siguientes dimensiones: 12.5 mm de

ancho, 8 mm de profundidad y 10 mm de alto (Figuras 4.1.17 y 4.1.18).

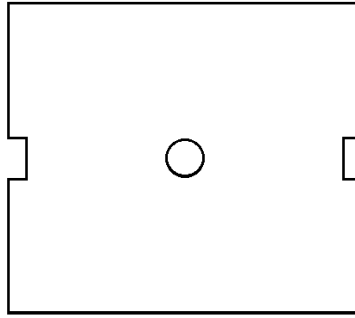


Figura 4.1.17: Vista superior de la base

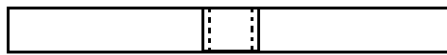


Figura 4.1.18: Vista frontal de la base

### Masa

#### Cálculos de diseño

Sabemos que la frecuencia natural de nuestro prototipo está dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EA}{mL}} \quad [4.1.32]$$

Sustituyendo  $E = 6 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $A = 380 \times 10^{-6}$ ,  $L = 7 \times 10^{-2}$  y  $\omega_n = 2500$  obtenemos la masa:

$$m = \frac{EA}{\omega_n^2 L} = 5.21 \text{ Kg} \quad [4.1.33]$$

#### Selección del material

Se seleccionó acero por su disponibilidad en el taller y por ser un metal, el material no resulta influyente pues solo se considera la masa, sin embargo un metal proporciona una masa con menores dimensiones.

#### Consideraciones de forma

Se optó por una forma cilíndrica que insertará en la parte superior de la probeta mediante un barreno localizado en el centro geométrico de la base del cilindro. Las dimensiones del cilindro son: 156.8 mm de alto y un diámetro de 72 mm, el peso total fue de 5.009 kg, el diámetro del barreno es de 18 mm y su profundidad es de 34 mm (Fig. 4.1.19).

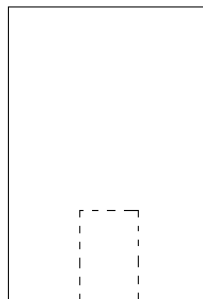


Figura 4.1.19: Vista frontal de la masa

## CONSTRUCCIÓN

### *Probeta*

#### *Materiales*

- Viga de acrílico de 19 mm de ancho, 20 mm de profundidad y 600 mm de longitud
- Lija TENAZIT P3210

#### *Máquinas y herramientas*

- Torno paralelo
- Segueta
- Buril de cobalto de  $\frac{1}{4}$

#### *Instrumentos de medición*

- Vernier

### *Procedimiento*

Se montó la viga de acrílico en el cabezal de torno, asegurando que estuviese centrado usando el contrapunto del torno. Se montó un buril para realizar el torneado de la probeta, cuidando su alineación tomando como referencia el contrapunto del torno. Se procedió a rebajar la parte saliente superior de la probeta hasta dejarla en un diámetro de 18 mm que fue medido con el vernier (Figura 4.1.20).



*Figura 4.1.20: Torneado de la probeta de acrílico.*

Enseguida se torneó la parte inferior de la probeta hasta dejarla en un diámetro de 10 mm verificados con el equipo de medición. Se cortó con la segueta la



probeta torneada y se procedió a refrentar su extremos, alineando nuevamente la probeta para que las caras resultasen totalmente planas y sin ángulo de inclinación. Como último paso se lijó las salientes de la probeta para que pudiesen empotrar en su parte inferior con la base y embonar con su parte superior con la masa.

### *Retén*

#### *Materiales*

- Barras de acero Cold Rolled de 12.8 de ancho y 12.8 de profundidad.

#### *Máquinas y herramientas*

- Taladro de columna
- Segueta
- Brocas de  $\frac{1}{4}$
- Machuelos de  $\frac{1}{4}$
- Torno paralelo
- Buril de cobalto de  $\frac{1}{4}$

#### *Instrumentos de medición*

- Vernier

#### *Procedimiento*

Se cortaron con segueta 4 secciones de las barras de acero de las siguientes dimensiones: 2 de 72 mm, 2 de 102.2 mm y 2 de 57 mm, estas dimensiones fueron adquiridas después de carear en el torno los extremos cortados. A cada barra se le localizó en centro geométrico y se perforó con el taladro y broca un orificio por donde pasará el prisionero, posteriormente a los tramos de 457 mm se le socavo en la parte inferior una sección rectangular de 12.5 mm por 8 mm y 10 mm de alto para ajustar a la base. A estos dos postes también se les localizó el centro geométrico y se les perforó con broca de  $\frac{1}{4}$ . A todas las piezas se les formó la cuerda, con los machuelos de  $\frac{1}{4}$ , por donde pasarán los tornillos, se les dio un acabado en esmeril y se soldaron para formar un cuadrado. Los dos postes se soldaron a la parte central de dos lados opuestos del cuadrado, los lados con los segmentos cortos (Figura 4.1.21).



*Figura 4.1.21: Taladro de columna utilizado en la elaboración de la estructura de retén.*

### **Base**

#### ***Materiales***

- Placa de acero AISI 10 40.

#### ***Maquinas y herramientas***

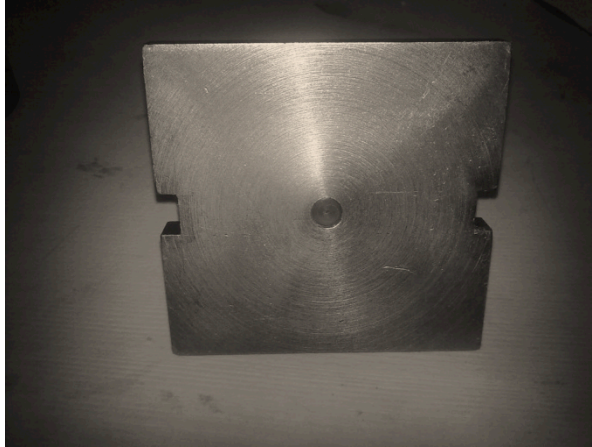
- Taladro de columna
- Brocas
- Torno paralelo
- Buril de cobalto de  $\frac{1}{4}$

#### ***Instrumentos de medición***

- Vernier

#### ***Procedimiento:***

Se cortó la placa de acero y se rectificaron los lados cortados hasta llegar a una dimensión de 97 mm por 101 mm. Se rectificaron ambos lados de la placa hasta que esta obtuvo un alto de 12 mm. Se procedió a perforar en el centro geométrico de la placa un orificio, para la inserción a presión de la probeta, de un diámetro de 10 mm. Se realizó una entrada para los postes con una dimensión de 12.5 mm de ancho y 8 mm de profundidad, a 12 mm de altura. Se perforó en el centro geométrico de la sección socavaba un agujero de  $\frac{1}{4}$  de pulgada con el taladro de columna y brocas de  $\frac{1}{4}$ " y se machueleó a  $\frac{1}{4}$ " para formar la cuerda del tornillo de sujeción (Figura 4.1.22).



*Figura 4.1.22. Placa base.*

**Masa**

**Materiales**

- Barra cilíndrica de acero de 75mm de diámetro.

**Máquinas y herramientas**

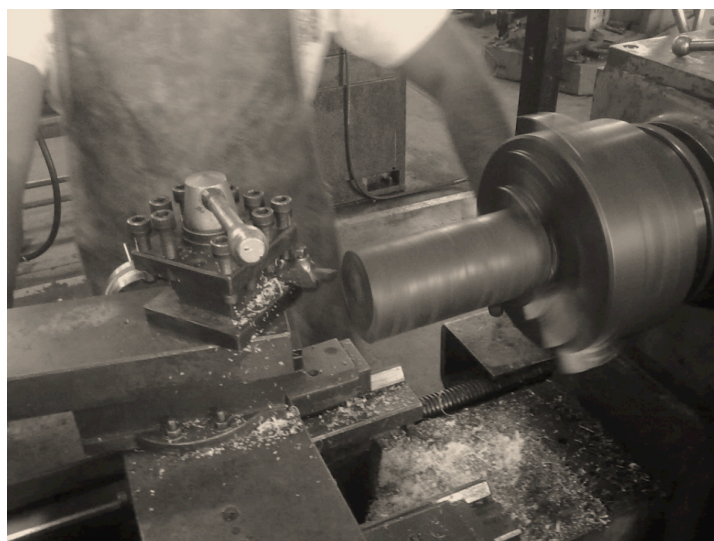
- Torno paralelo
- Buril de cobalto de  $\frac{1}{4}$

**Equipos de medición**

- Vernier

**Procedimiento**

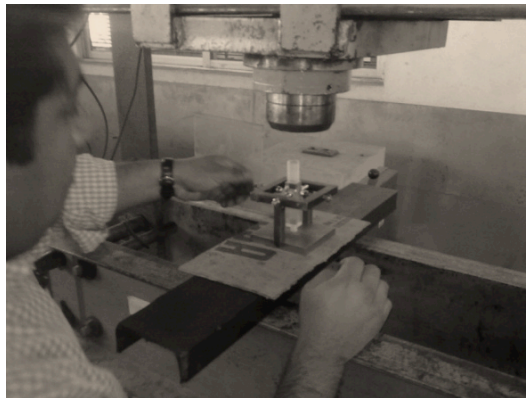
Se cortó una sección de la barra cilíndrica y se montó en el torno paralelo, verificando su alineamiento y se careó la cara cortada, posteriormente se torneó el cilindro hasta dejarlo en un diámetro de 72 mm, se desmontó y se volvió a montar para carear la cara opuesta. Utilizando el contrapunto del torno paralelo se localizó el centro geométrico del cilindro en una de sus bases y se perforó una cavidad cilíndrica de 18 mm de diámetro y 33 mm de profundidad, constatado con el vernier de profundidad (Figura 4.1.23)



*Figura 4.1.23: Torneado del cilindro.*

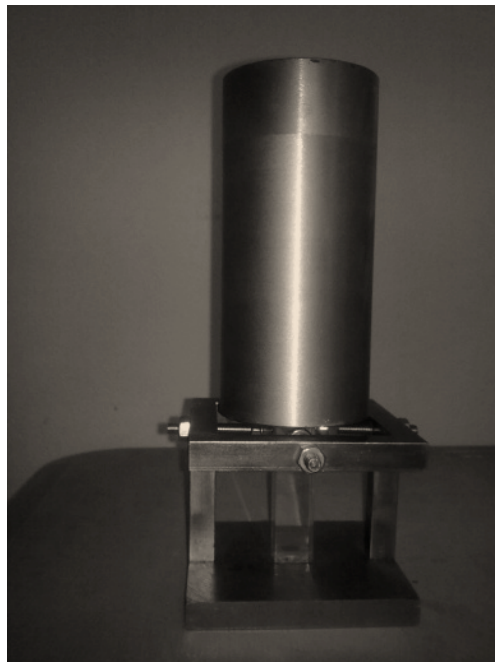
### *Ensamble y presentación del prototipo*

Se atornilló la estructura retén a la base mediante tornillos de cabeza cónica de  $\frac{1}{4}$  por  $\frac{3}{16}$  pulgadas de longitud. Se introdujeron los prisioneros en los orificios de la estructura de retén y se les colocaron las tuercas ciegas en los extremos que harán contacto con la probeta, para impedir su retroceso se colocaron tuercas en el extremo opuesto después se procedió a embonar la probeta a la base, esto utilizando una prensa hidráulica, como se puede apreciar en la Imagen 4.1.24



*Figura 4.1.24: Empotrado de la probeta a la base mediante una prensa hidráulica.*

La presentación final del prototipo con la masa montada está en la figura 4.1.25:



*Figura 4.1.25: Presentación final del prototipo.*

Al realizar las pruebas con el prototipo y analizar los datos, se sacó su gráfica de función de respuesta a la frecuencia y se localizó su frecuencia natural, que corresponde en cercanía a la calculada antes de la elaboración del prototipo. (Figura 4.1.26)

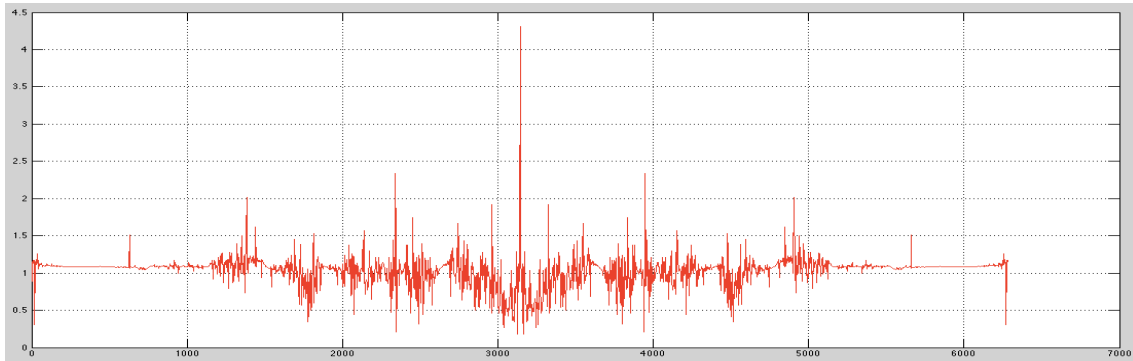


Figura 4.1.26: Gráfica de FRF para los datos obtenidos con el prototipo.

## 4.2 Identificación del modelo discreto a partir de los datos experimentales

La toma de datos fue a través del módulo NI9205 de National Instruments por medio del hardware cDAQ-9172, conectado a un computador con plataforma Windows XP.

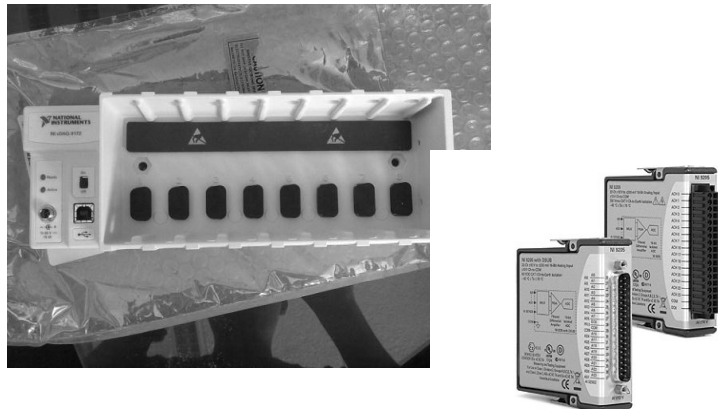


Figura 4.2.1. Módulo de adquisición de datos NI9205 c-DAQ-9172 de National Instruments.

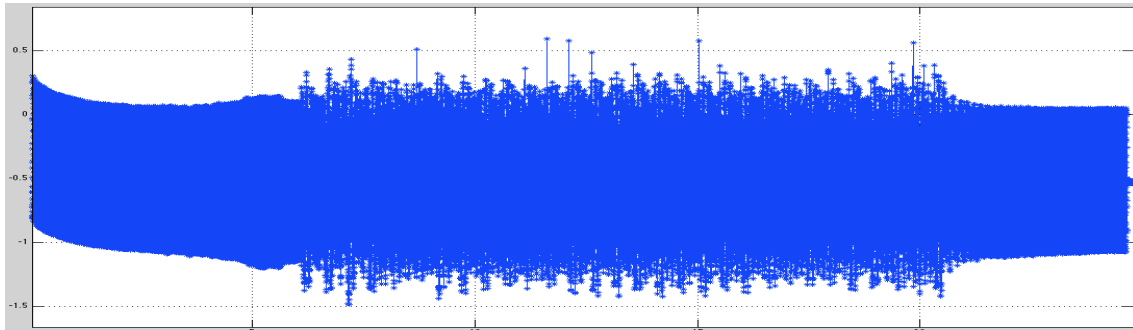
Se utilizaron parches piezoeléctricos del rango de  $-5V$  a  $5V$  para poder ser capturado con el módulo de NI9205, estos parches tienen como diámetro  $2cm$ .



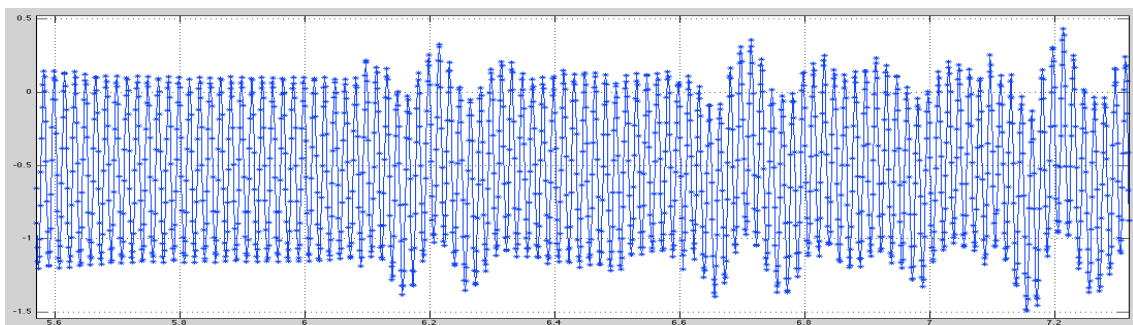
Figura 4.2.2. Parches piezoeléctricos  $+5V$   $-5V$

Los paquetes para computadora que se usaron fueron de National Instrument: el paquete LabVIEW con su complemento Signal Express versión 3.0. y el software Matlab en su versión número 10.

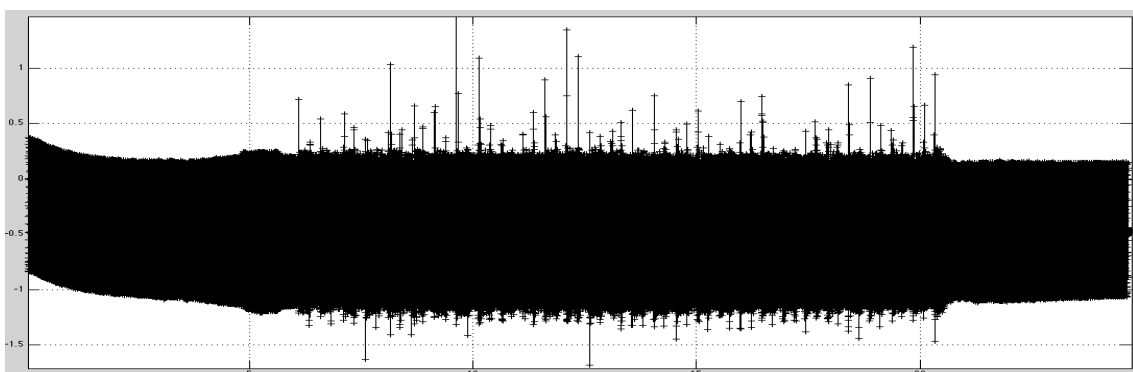
Se realizaron pruebas, tomando dos puntos de referencia, uno situado en la base del acelerómetro y el otro colocado en la probeta del prototipo. Importando los datos de la prueba llamada: "prueba4.xls" a matlab obtenemos las siguientes señales:



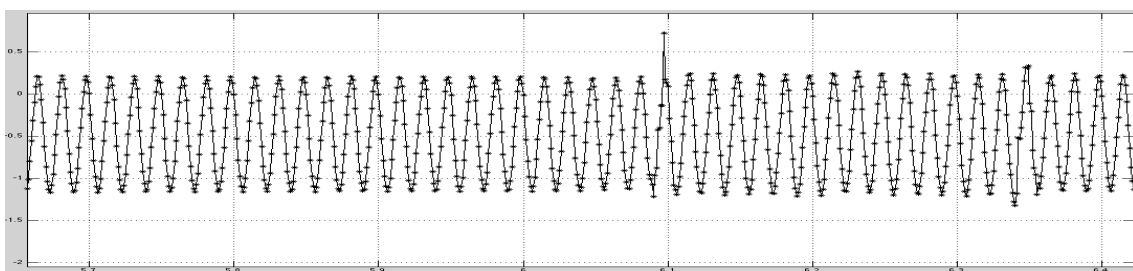
*Figura 4.2.3. Señal de entrada, sensor colocado en la base del acelerómetro.*



*Figura 4.2.4. Acercamiento a la señal de entrada, sensor colocado en la base del acelerómetro.*



*Figura 4.2.5. Señal de salida, sensor colocado en la probeta del acelerómetro.*



*Figura 4.2.6. Acercamiento a la señal de salida, sensor colocado en la probeta del acelerómetro.*



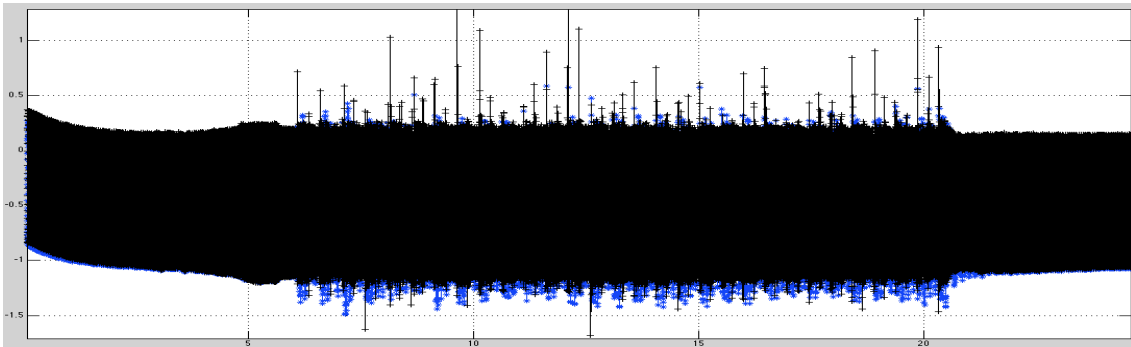


Figura 4.2.7. Señal de salida(negro) contra señal de entrada (azul) del acelerómetro.

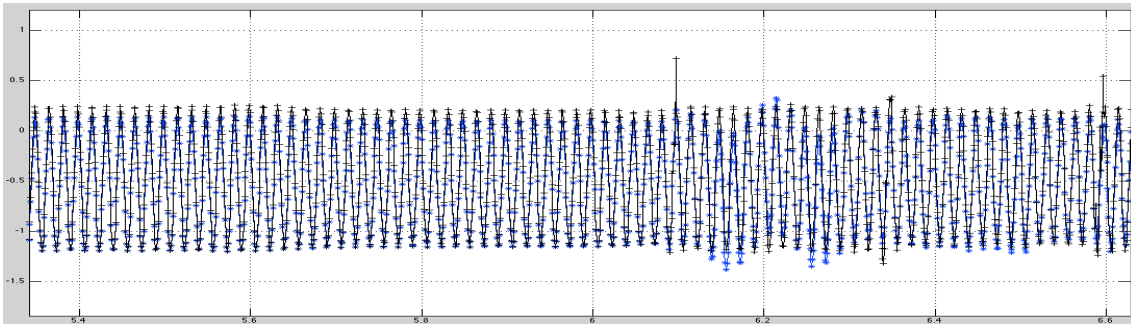


Figura 4.2.5. Acercamiento de la señal de salida(negro) contra señal de entrada (azul) del acelerómetro.

Tomando la señal de salida y obteniendo su modelo discreto, utilizando el modelo teórico, se obtiene:

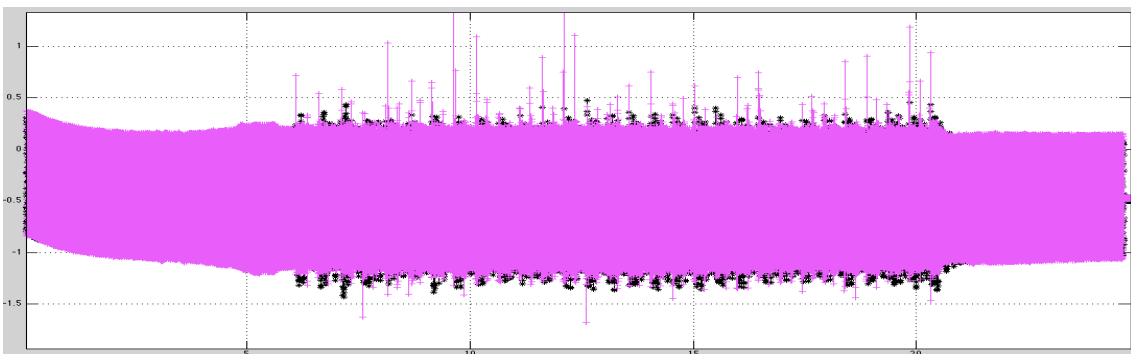


Figura 4.2.6. Señal de salida modelada(negro) contra señal de salida experimental (magenta) del acelerómetro.

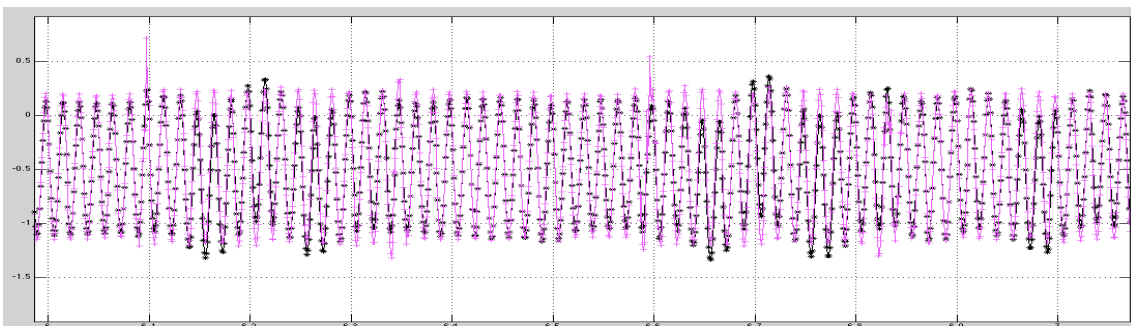


Figura 4.2.7. Acercamiento a la señal de salida modelada (negro) contra señal de salida experimental (magenta) del acelerómetro.

El MSE entre el modelo y los datos experimentales es de: 3.0703%.

### 4.3 Implementación de la inversa de Volterra

Se obtiene el primer operador de Volterra para los datos experimentales y se gráfica:

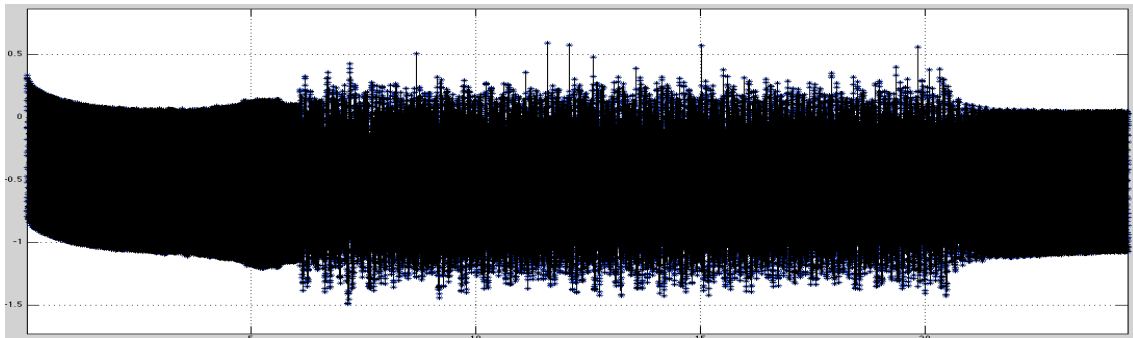


Figura 4.3.1. La señal de entrada experimental del acelerómetro (azul) contra el primer operador de Volterra (negro).

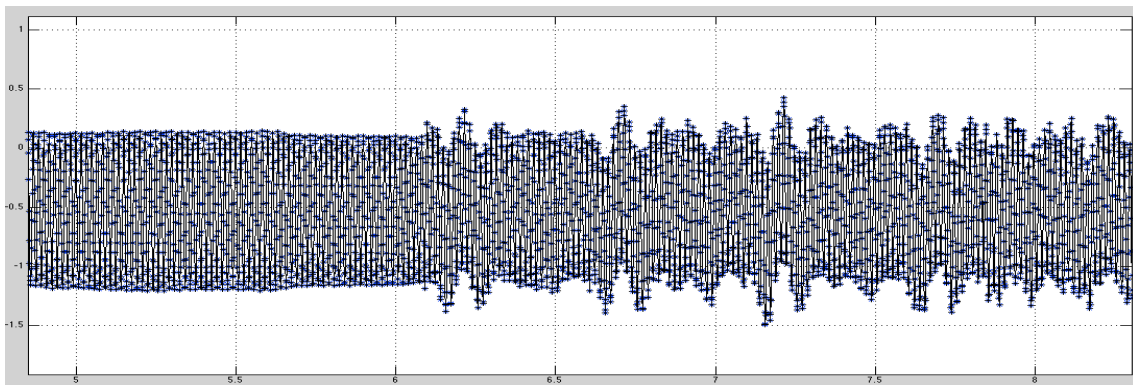


Figura 4.3.2. Acercamiento a la señal de entrada experimental del acelerómetro (azul) contra el primer operador de Volterra (negro).

El MSE entre las dos señales es de: 0.9046%.

### 4.4 Conclusiones

Al aplicar el primer operador de la Inversa de Volterra a la salida obtenida de manera experimental, podemos ver que en comparación con la entrada experimental el error es mínimo, por lo tanto los modelos creados para la parte lineal y el primer operador de Volterra describen el sistema de manera adecuada.



# CAPÍTULO 5

## Conclusiones generales

## 5.1 Conclusiones generales

El sistema simulado del acelerómetro mediante el modelo NARX reprodujo con un error mínimo del 0.0351% la señal exacta simulada y con un 3.07% de error la señal obtenida de forma experimental. La simulación del ciclo de histéresis introduce una no-linealidad a la señal exacta simulada como se aprecia en la figura 2.4.2, esta no-linealidad es de tipo polinomial de tercer grado y adherida a la salida exacta, por lo que corresponde a un sistema Wiener, que depende de los coeficientes del polinomio histerético (figura 3.3.1).

Analizando el sistema Wiener mediante las ecuaciones lineales asociadas se obtuvieron los operadores de la inversa de Volterra, la primera ecuación lineal asociada es una ecuación diferencial, mientras que las restantes son cada uno de los términos polinomiales de la histéresis y por tanto el número de operadores es finito. Los datos simulados, de la respuesta exacta y el ciclo histerético, sirvieron para aplicar la inversa de Volterra y obtener resultados teóricos, como se observa en la figura 3.4.1 el primer operador de Volterra describe con un error mínimo la entrada exacta, también se comprobó que podemos tratar señales de salida fuera del rango lineal y del ancho de banda y obtener sus entradas mediante la inversa de Volterra.

El diseño y construcción de un prototipo de acelerómetro básico con elemento piezoeléctrico a una primera frecuencia natural de  $\omega_n=2500$  que fuera visible para el intervalo de tiempo mínimo de  $dt = 1 \times 10^{-3}$ , se concluyó de manera adecuada, como se muestra en la imagen 4.1.27, la frecuencia esperada es muy cercana a la frecuencia obtenida experimentalmente, con lo cual se valida el proceso de diseño y construcción. A la salida de los datos experimentales se le aplicó la Inversa de Volterra con su primer operador y se comparó con la señal de entrada y el error fue de 0.9046, con lo cual se comprueba que se describe la parte lineal de manera adecuada.

Se demostró que usando la inversa de Volterra aplicada al acelerómetro con un control de lazo abierto, por ecualización, se elimina la inercia, se compensa las pérdidas y se eliminan armónicos, esto basado en que se puede recuperar en un alto porcentaje la señal de entrada al sistema, acercándolo ampliamente a un elemento de ganancia unitaria, aumentando así su ancho de banda y rango de medición, por lo anterior, se acepta la hipótesis inicial.

## Referencias

- [1] Andrés Felipe Duque Herrera, Adolfo Lara Castro. “Medición indirecta de la madurez del culmo de guadua por medio de las vibraciones mecánicas”, La Julita, Pereira.
- [2] Beeby, S., Ensell, G., Kraft, M., y White, N., “MEMS Mechanical Sensors”. 2004. Artech House Inc. Nueva York
- [3] Wiener N. “Respuesta de un sistema no lineal para la radiación de ruido”. 1942. Informe de V-16, n° 129. E.U.A.
- [4] Ikehara S. “Un método de Wiener en un circuito no lineal del MIT” 10.1951. rep. n° 217. E.U.A.
- [5] Zhang Zhong-cai, Yang Li-ming, Cheng Yong-sheng. “Design of a large Measurement range piezoelectric Accelerometer”. 2009. Reino Unido.
- [6] C.C. Hindrichsen, E.V. Thomsen, k. Hansen, E. Lou-moller. “Circular piezoelectric Accelerometer for High Band Width Application”. 2009. Denmark
- [7] David M Storer. “Dynamic Analysis of non-linear structures using Higher order frequency response functions”. 1991. Reino Unido.
- [8] M. Steinbuch, O.H. Bosgra. “Experimental characterization of the stick/sliding transition in a precision mechanical system using the third Order sinusoidal input describing function”. 2006. Países Bajos.
- [9] J.A. Vazquez Feijoo et al. (). “Transformation of a sensor or actuator system into a unitary gain element”. 2007. Mechanical Systems and Signal Processing 21(2007)3088–3107. Reino Unido.
- [10] J.A. Vazquez Feijoo, K. Worden, R. Stanway. “Associated Linear Equations for Volterra operators”. 2004. Mechanical Systems and Signal Processing 19 (2005) 57–69. Reino Unido.
- [11] Holler, F. James; Skoog, Douglas A; Crouch, Stanley R. “Principles of Instrumental Analysis” (6th ed.). 2007. Cengage Learning.
- [12] Wilcoxon Research. “Piezoelectric accelerometer design”. 2009. Wilcoxon Research. E.U.A.
- [13] Mielke, A.; Roubicek, T. “A Rate-Independent Model for Inelastic Behavior of Shape-Memory Alloys”. Multiscale Model. Simul. 1 (4): 571–597. 2003.
- [14] I.J. Leontaritis and S.A. Billings. “Input-output parametric models for non-linear systems. Part I: deterministic non-linear systems”. J of Control 41:303-328. 1985.
- [15] De Blas Del Hoyo, Alfredo. “Modelización de la histéresis magnética y su aplicación al cálculo numérico en máquinas eléctricas”. 2005.
- [15] Larson, Ron. “Precalculus with limits”. 2006. ISBN 0-618-66089-5.
- [16] Young, Cynthia Y. “Precalculus”. 2010. ISBN 0-471-75684-9.
- [17] Fen Guo. “A new identification method for Wiener and Hammerstein systems”. Alemania.
- [18] Stein, P. K., “The Early Strain Gage Accelerometers: The Inventors and Their Times”. 1996. The shock and vibration bulletin – Part II. E.U.A.
- [19] Balakumar Balachandra, Edward B. Magrab. “Vibrations”. 2009. Cengage Learning. Toronto Canada.

## Anexos

### Planos de construcción del prototipo

