



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional
Unidad Oaxaca
Maestría en Ciencias en Conservación y Aprovechamiento de Recursos Naturales
(Ingeniería de procesos)

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN MEDIOS ANISÓTROPOS Y HETEROGÉNEOS

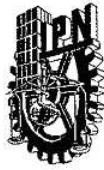
TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
PRESENTA:

Carlos Orlando Jiménez González

Director de tesis: Dr. Andrés Pech Pérez

Santa Cruz Xoxocotlan, Oaxaca.

Marzo de 2008



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez siendo las 13:00 horas del día 10 del mes de marzo del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del **Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca (CIIDIR-OAXACA)** para examinar la tesis de grado titulada:

Modelación matemática de la propagación de ondas sísmicas en medios anisótropos y heterogéneos

Presentada por el alumno:

Jiménez
Apellido paterno

González
materno

Carlos Orlando
nombre(s)

Con registro:

4	0	6	0	1	6	8
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de: **MAESTRO EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA
Director de tesis

Dr. Andrés Pech Pérez

Dr. Juan Rodríguez Ramírez

Dr. Juan Alejandro Vázquez Feijoo

Dr. Pedro Montes García

Dr. Salvador Isidro Belmonte Jiménez

LA PRESIDENTA DEL COLEGIO

Dra. María del Rosario Arnaud Viñas





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez el día 10 del mes marzo del año 2008, el (la) que suscribe **JIMÉNEZ GONZÁLEZ CARLOS ORLANDO** alumno (a) del Programa de **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES** con número de registro **A060168**, adscrito al Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Andrés Pech Pérez y cede los derechos del trabajo titulado: **“Modelación matemática de la propagación de ondas sísmicas en medios anisótropos y heterogéneos”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **Calle Hornos 1003, Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca**, e-mail: posgradoax@ipn.mx ó orlando684@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL
CIDIR-UNIDAD-OAXACA

JIMÉNEZ GONZÁLEZ CARLOS ORLANDO

Resumen

Una de las líneas de mayor interés en la sismología corresponde al estudio de la respuesta sísmica de medios heterogéneos, anisótropos y dispersivos; este tipo de medios tiene estrecha correspondencia con depósitos sedimentarios de interés económico, y también son representativos del tipo de terreno en el que se encuentran desplantadas obras civiles importantes. Se han utilizado modelos en los que se considera al subsuelo como homogéneo, isótropo y no dispersivo; sin embargo, estas consideraciones poco realistas pueden dar lugar, entre otras cosas, a predicciones erróneas del impacto provocado por eventos sísmicos en estructuras y a estimaciones poco robustas de las velocidades de propagación de las ondas sísmicas.

En este trabajo, se usaron modelos matemáticos para estimar la respuesta sísmica de medios heterogéneos, anisótropos y dispersivos. Se validó la metodología usada para obtener la función de Green aproximada para un medio acústico tridimensional con un gradiente de la velocidad constante; dicha validación, se realizó comparando la solución aproximada con la solución analítica de Pekeris.

Se utilizó un modelo de un medio estratificado sobre un semiespacio para estudiar y analizar la naturaleza de campos deconvolucionados. Este modelo estratificado, también, se usó para interpretar datos reales. Los registros utilizados corresponden a las estaciones Chapultepec y Kennedy; las cuales están ubicadas en el valle de México, en la zona de terreno duro y en la zona lacustre, respectivamente; donde se estimaron velocidades de propagación para ondas de corte y compresionales; para este propósito se usaron seis eventos registrados en el pozo Chapultepec y once eventos detectados en el pozo Kennedy. Para el pozo Chapultepec se estimaron velocidades efectivas (β) de 441 y 595 m/s a 22 y 52 m de profundidad, respectivamente. En el pozo de la Unidad Kennedy, se estimaron velocidades efectivas (β) de 44 y 167 m/s a 30 y 83 m de profundidad, respectivamente. Con las velocidades estimadas fue posible caracterizar el subsuelo donde se ubica la estación Kennedy estimando un módulo de Young efectivo de 98937689 N/m² a 83 metros de profundidad; además, módulos de elasticidad de cortante (μ), de 2381250 y 39417745 N/m² a 30 y 83 metros de profundidad.

Palabras clave: Deconvolución, Función de Green, Interferometría sísmica.

Abstract

One of the most important areas of research in seismology corresponds to the study of the seismic response of anisotropic, dispersive and heterogeneous media; these media are associated with sedimentary formations of economic interest; in addition, extremely complex soils can be represented by these media. To model the seismic response of soils, in most of the cases, it is assumed that the soil behaves like a homogenous and purely isotropic medium; nevertheless, these poorly developed assumptions can give rise, among other things, to erroneous predictions of the damage caused by seismic events on structures and to poor estimates of the wave propagation velocities. In this work, mathematical models are introduced to simulate the seismic response of anisotropic, heterogeneous and dispersive media. An approximated Green's function for a heterogeneous acoustic medium, where the wave velocity varies linearly with depth, was obtained. The procedure followed to get this function was endorsed by comparing the approximated solution with Pekeris solution. In addition, a model composed of stratified layers overlying a halfspace was employed to study the nature of deconvolved wavefields. Furthermore, this stratified model was utilized to interpret real data; these data correspond to seismic events recorded in boreholes. The data were registered at Chapultepec and Kennedy stations, which are located in the valley of Mexico, in hard rock and soft soil, respectively. From the deconvolved traces, P and SH wave velocities were obtained. To estimate these velocities, six seismic events recorded at the Chapultepec well and eleven events registered at the Kennedy station were used. At the Chapultepec site, I estimated effective SH wave velocities (β) at two different depths, 22 and 52 m, the velocities obtained at these locations were 441 and 595 m/s, respectively. In addition, at the Kennedy station, I got effective SH wave velocities (β) at 30 and 83 m depth, being the calculated velocities 44 and 167 m/s, respectively. Furthermore, at this site, I estimated an effective Young's modulus of 98937689 N/m² at 83 m depth and a shear modulus (μ) of 2381250 and 39417745 N/m² at 30 and 83 m depth, respectively. With these parameters, it was possible to characterize the soil at the Chapultepec and Kennedy stations.

Key words: Deconvolution, Green's function, Seismic interferometry.

Dedicatorias

A mis padres:

*Rosa González Santiago,
Carlos Jiménez Domínguez,*

y a mi hermana:

Luz Adriana Jiménez González.

*Por su gran amor y apoyo incondicional en cada momento de mi vida,
siendo fundamental en la realización de mis estudios.*

Agradecimientos

Al Instituto Politécnico Nacional por haberme brindado las facilidades para la realización de este trabajo.

A la COFAA (Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional) por otorgarme la beca PIFI (Programa Institucional de Formación de Investigadores) a través del proyecto de investigación “ **Modelación matemática de la propagación de ondas sísmicas en medios anisótropos y heterogéneos** ”, clave **SIP 20070374**.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el financiamiento otorgado durante los estudios de posgrado.

Al CONACyT por el apoyo recibido a través del proyecto de investigación “ **Modelación matemática de la propagación de ondas en medios anisótropos y heterogéneos** ”, con clave CONACyT **57100**.

Un agradecimiento especial para el Dr. Andrés Pech Pérez por sus enseñanzas, su paciencia, consejos y su gran apoyo brindado durante los estudios de posgrado.

Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por sus valiosos comentarios y la subrutina del método Thomson-Haskell facilitada para la comprobación de los modelos analíticos desarrollados.

A mis compañeros: Jacobo, Samuel, Roberto, Omar, Sildia, Ohmar, Jyl, Filiberto, por su amistad y apoyo.

Índice general

Nomenclatura	v
Índice de Figuras	viii
Índice de Tablas	xx
1. Introducción	1
1.1 Planteamiento del Problema	4
1.2 Justificación	6
1.3 Antecedentes	9
1.4 Objetivos	12
1.5 Hipótesis	13
2. Fundamentos del análisis de señales	15
2.1 Conceptos básicos sobre vibraciones mecánicas	16
2.2 Ondícula sísmica	16
2.3 Análisis de Fourier	19
2.3.1 Series de Fourier	19
2.3.1.1 Armónicos	23
2.3.1.2 Ángulo de fase	24
2.3.2 Serie de Fourier compleja	26
2.3.3 Espectros de frecuencia discreta	31
2.3.4 Transformada de Fourier	34

2.3.4.1	Propiedades de la Transformada de Fourier	40
2.3.4.2	Convolución	40
2.3.4.3	Deconvolución	43
2.3.5	Transformada discreta de Fourier	44
2.4	Teorema del muestreo	45
2.5	Aliasing	46
2.6	Filtrado de señales	47
2.6.1	Filtrado en frecuencia	48
2.6.2	Filtro Butterworth	51
2.6.3	Ventanas	51
3.	Ecuación de onda	52
3.1	Deformación	53
3.2	Tensor de esfuerzo	57
3.3	Ley de Hooke generalizada	58
3.3.1	Comportamiento Elástico	61
3.4	Ecuaciones de movimiento	63
3.5	Ondas P y ondas S	64
3.6	Solución de d'Alembert	66
3.7	Solución general de la ecuación de onda para el caso SH por separación de variables	69
3.8	Atenuación de ondas elásticas	72
3.9	Transmisión y reflexión de Ondas SH	74
4.	Fundamentos de la propagación de ondas en medios estratificados	80
4.1	Modelo de n-estratos sobre un semiespacio, caso unidimensional	82
4.2	Modelo de un estrato sobre un semiespacio, caso unidimensional	87
5.	Fundamentos de la propagación de ondas en medios heterogéneos	92
5.1	Teoría de rayos	96
5.2	Ecuación eikonal	99

5.3	Ecuación de transporte	102
5.4	Solución analítica de Pekeris	106
5.5	Función de Green para un medio acústico con un gradiente de la velocidad constante (3D) (caso heterogéneo)	109
6.	Metodología	113
6.1	Modelación matemática	114
6.2	Generación de sismogramas sintéticos	116
6.2.1	Del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo	117
6.2.2	Comparación de la solución aproximada con la solución de Pekeris	119
6.2.3	Deconvolución de acelerogramas	119
6.3	Análisis de casos reales	121
6.3.1	Selección de acelerogramas de pozo	121
7.	Análisis y discusión de resultados	125
7.1	Comparación de la solución aproximada con la solución de Pekeris . . .	125
7.1.1	Migración de datos sísmicos	128
7.2	Ondas deconvolucionadas	132
7.2.1	Relación entre registros sísmicos correspondientes a diferentes profundidades. Caso n-estratos	132
7.2.2	Relación entre registros sísmicos correspondientes a diferentes profundidades, caso un estrato	136
7.2.3	Propiedades de la deconvolución	139
7.3	Deconvolución de registros sísmicos sintéticos	142
7.4	Acelerogramas de pozo	162
7.4.1	Estación Chapultepec	164
7.4.2	Unidad Kennedy	165
7.4.3	Deconvolución de acelerogramas del pozo Chapultepec	167
7.4.4	Deconvolución de acelerogramas del pozo de la estación Unidad Kennedy	179
8.	Conclusiones y recomendaciones	192

8.1 Recomendaciones	193
Referencias	195
A. Registros pozo Chapultepec	201
B. Tablas pozo Chapultepec	208
C. Registros Unidad Kennedy	212
D. Tablas pozo Unidad Kennedy	224
E. Coeficientes de la serie de Fourier	229
F. Función delta de Dirac	243
F.1 Propiedades de la función delta de Dirac	244
G. Método de Thomson-Haskell	247
G.1 Caso <i>SH</i>	248
H. Programa desarrollado	255
H.1 Como abrir un archivo.	257
H.2 Selección de ventanas	259
H.3 Procesamiento de señales	262
H.4 Filtrado	264
H.5 Deconvolución de registros	266

Nomenclatura

α	Velocidad de onda P
β	Velocidad de onda S
Δ	Intervalo de muestreo, incremento
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ	Deformación
ϵ_{ij}	Tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy
ε	Parámetro para evitar la inestabilidad de la deconvolución
ϕ	Ángulo de fase, potencial
ϕ_n	n-ésimo ángulo de fase de la n-ésima armónica de una función periódica
φ	Ángulo entre la parte positiva del eje x y el punto $a + bi$ en el plano cartesiano
λ	Constante de Lamé
μ	Constante de Lamé, módulo de cortante
ν	Módulo de Poisson
π	3.1416
ρ	Densidad

ρ	Coefficiente de absorción
σ	Esfuerzo
τ	Tiempos de tránsito
ω	Frecuencia radial
ω_c	Frecuencia de corte
ω_{ij}	Tensor de rotación
$n\omega$	Enésima armónica de una función periódica
∇	Operador nabra
∇^2	Operador Laplaciano
∞	Infinito
A, B	Amplitudes de ondas o funciones del potencial de desplazamiento.
A_0	Amplitud de la onda incidente.
a_n	Coefficiente de la serie de Fourier que denota la amplitud de ondas seno.
b_0	Coefficiente de la serie de Fourier que denota la posición de la función en el eje y .
b_n	Coefficiente de la serie de Fourier que denota la amplitud de ondas coseno.
c	Velocidad de fase.
c_{ijkl}	Tensor de constantes elásticas.
C_n	n -ésima amplitud armónica de una función periódica.
d_r, ts	Retraso temporal.

dt	Diferencial de tiempo.
E	Módulo de Young.
\mathcal{E}	Energía asociada a un ciclo de oscilación.
e	Base de los logaritmos naturales.
E_{ij}	Tensor de deformación de Green.
$F(\omega)$	Transformada de Fourier de la función $f(t)$.
f_N	Frecuencia de Nyquist.
f_p	Frecuencia dominante.
H	Profundidad de la frontera entre el medio estratificado y el semiespacio.
h_n	Espesor del n-ésimo estrato.
i	Número complejo.
i, j, k	Vectores unitarios en las direcciones x, y, z .
K	Módulo volumétrico.
k	Número de onda.
km	Kilómetro.
L	Periodo.
m	Masa.
M_d	Retraso múltiple.
n	Valor entero positivo.
P	Onda compresional, Presión.

Q	Factor de calidad.
r	Módulo de un número complejo.
S	Superficie, función de dos variables, fuente explosiva.
S^{inc}	Onda plana incidente.
SH	Onda de cortante horizontal.
SV	Onda de cortante vertical.
t	Tiempo
tp	Periodo de la ondícula de Ricker.
u	Campo de desplazamientos.
V	Volumen.
FFT	Transformada rápida de Fourier.
IFFT	Transformada rápida inversa de Fourier.

Índice de figuras

1.1.	Tectónica de placas en México. Fuente: Autor.	8
1.2.	Relación idealizada entre la fuente de un terremoto, las trayectorias de las ondas y la estación de observación. Fuente: Tsai, 1969.	11
2.1.	Ondícula de Ricker con $tp = \pi/2$ y $ts = \pi$. Fuente: Autor.	18
2.2.	Función periódica. Fuente: Autor.	19
2.3.	Suma de sinusoidales sin corrimiento en fase, denominados armónicos de la señal denotada por el asterisco, las amplitudes disminuyen hacia la alta frecuencia. Fuente: Autor.	23
2.4.	Los mismos sinusoidales de la Figura 2.3, pero con un corrimiento en tiempo de 10 s. Cuando los componentes son sumados, la señal resultante es la mostrada en el lado derecho (denotada por el asterisco). La señal es la misma que la presentada en la Figura 2.3 pero con un corrimiento en tiempo. Fuente: Autor.	24
2.5.	Suma de sinusoidales correspondientes a la señal de la Figura 2.3, pero con un corrimiento constante en fase de $\pi/2$ radianes, la señal está alineada en $t = 0$. La suma de los sinusoidales genera una señal antisimétrica mostrada en el lado derecho de la gráfica (denotada por el asterisco).	26
2.6.	Espectro de amplitud de la función denotada por el asterisco en la Figura 2.3; el espectro muestra la amplitud de los armónicos que constituyen a la función periódica, se puede apreciar que el coeficiente b_0 es diferente de cero. Fuente: Autor.	32
2.7.	Ondícula de Ricker (ecuación (2.3)) representado por medio de series de Fourier, con la suma de 150 armónicos. Fuente: Autor.	32
2.8.	Espectro discreto de amplitud de la función periódica mostrada en la Figura 2.7. Fuente: Autor.	33

2.9. Espectro discreto de fase de la función periódica mostrada en la Figura 2.7. Es conocido que la ondícula de Ricker es de fase cero, con lo que el resultado obtenido es correcto. Fuente: Autor.	34
2.10. Ondícula de fase cero se presenta desplazamiento en tiempo, la pendiente del ángulo de fase está relacionada con el desplazamiento en tiempo. Fuente: Autor.	37
2.11. Ondícula de fase cero se observa desplazamiento en tiempo, la pendiente del ángulo de fase está relacionada con el desplazamiento en tiempo. Fuente: Autor.	38
2.12. La misma ondícula de la Figura 2.10 pero con un desplazamiento en fase de 90° que convierte a la ondícula en una señal antisimétrica, mientras en todos los casos analizados el espectro de amplitudes permanece invariante. Fuente: Autor.	38
2.13. Ondícula de fase cero creada con la función $\text{sinc}(x)$, la ondícula es desplazada en su ángulo de fase en 90° donde es deformada, en 180° es invertida en el eje horizontal, en 270° es deformada en sentido contrario desplazamiento de 90°, y en 360° la ondícula permanece invariante. Fuente: Autor.	39
2.14. Onda coseno con desplazamiento en frecuencia, se puede apreciar que cuando el periodo disminuye la frecuencia característica avanza hacia la alta frecuencia, mientras que el ángulo de fase no se modifica. Fuente: Autor.	39
2.15. Convolución de dos funciones caja. Fuente: Autor.	43
2.16. Serie de tiempo muestreada a intervalos de tiempo variados: a) $\Delta t=0.01$ s, b) $\Delta t=0.02$ s, c) $\Delta t=0.03$ s y d) $\Delta t=0.07$ s; siendo (a) el intervalo de muestreo original. Al lado izquierdo de cada señal se muestra su espectro de amplitudes, donde se aprecia que el muestreo incorrecto de la señal ocasiona la pérdida de información y la en el caso de (c) la presencia de aliasing. Fuente: Autor.	47
2.17. Espectro de amplitud de un típico filtro pasa bajas, donde q representa la frecuencia de corte y A es un valor definido por el filtro y representa el punto medio de la amplitud del filtro. Fuente: Autor.	49
2.18. Espectro de amplitud de un típico filtro pasa alta, donde p representa la frecuencia de corte y A es un valor definido por el filtro y representa el punto medio de la amplitud del filtro. Fuente: Autor.	49

2.19. Espectro de amplitud de un típico filtro pasa bandas, donde p y q representan las frecuencias de corte y A es un valor definido por el filtro y representa el punto medio de la amplitud del filtro. Fuente: Autor.	50
2.20. Espectro de amplitud de un filtro notch, donde m representa la frecuencia notch o la frecuencia de rechazo. Fuente: Autor.	50
3.1. Medio continuo deformable. Fuente: Autor.	53
3.2. Representación esquemática de los componentes de $u_i(Q)$. Las letras L y R indican las contribuciones de los cambios de longitud y la rotación, respectivamente. Fuente: Autor.	56
3.3. Cuerpo sometido a fuerzas externas. Fuente: Autor.	57
3.4. Cuerpo sometido a fuerzas externas. Fuente: Autor.	58
3.5. Estado general de esfuerzos en un elemento. Fuente: Autor.	59
3.6. (a) Compresión hidrostática, (b) cortante puro. Fuente: Autor.	61
3.7. Cuerpo sometido a fuerzas de tracción. Fuente: Autor.	63
3.8. Representación esquemática de las ondas p y q . Fuente: Autor.	69
3.9. Transmisión y reflexión de una onda al pasar de un medio a otro. A_0 es la amplitud de la onda incidente; ρ y β corresponden a la densidad y velocidad de propagación para ondas SH , respectivamente. Los subíndices 1 y 2 denotan al medio 1 y 2, respectivamente. Fuente: Autor.	75
3.10. Condiciones de frontera; μ es el módulo de cortante. Fuente: Autor.	77
4.1. Medio estratificado que contiene n -estratos con propiedades diferentes. Fuente: Autor.	83
4.2. Modelo unidimensional de un estrato elástico, homogéneo e isótropo de espesor H sobre un semiespacio elástico homogéneo e isótropo. Fuente: Autor.	88
4.3. Respuesta en superficie debido a la incidencia vertical de ondas SH para un medio compuesto de un estrato y un semiespacio. Se muestran cuatro casos: $\beta_1 = \beta_2$, siendo $\beta_1 = \pi$; $\beta_2 = 2\beta_1$, siendo $\beta_1 = \pi$; $\beta_2 = \frac{1}{2}\beta_1$, siendo $\beta_1 = 2\pi$; y $\beta_1 \rightarrow \infty$. Fuente: Autor.	91
5.1. Escalas de tiempo en la señal sísmica. Fuente: Autor.	97
5.2. Construcción de un nuevo frente de onda. Fuente: Autor.	99

5.3.	Rayos (líneas continuas) y frentes de onda (líneas segmentadas) en un medio heterogéneo. Fuente: Autor.	100
5.4.	Volumen cilíndrico V , alrededor de un segmento de un rayo con generatriz paralela al segmento. Fuente: Autor.	103
5.5.	Proyección de la superficie que interseca al rayo, sobre la dirección que define éste. Fuente: Autor.	103
5.6.	Fuente puntual, ubicada en $z = z_0$, dentro de un semiespacio líquido en el que la velocidad cambia linealmente con la profundidad $c(z) = az$. Fuente: Autor.	107
5.7.	Frentes de onda (líneas segmentadas) en un medio en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad. Fuente: Autor.	110
6.1.	Estaciones de la red de Observación Sísmica de la Ciudad de México. Fuente: Autor.	123
6.2.	Estaciones de la Red Acelerográfica de la Ciudad de México (CENAPRED, CIRES, Instituto de Ingeniería, UNAM), la Unidad Kennedy está dentro del círculo gris en la zona del lago y el pozo Chapultepec dentro del círculo negro en la zona de terreno firme. Fuente: Autor.	124
7.1.	a) arreglo horizontal y b) arreglo vertical. Fuente: Autor.	126
7.2.	Comparación de la solución aproximada y la solución de Pekeris, para a) receptores horizontales y b) receptores verticales. Fuente: Autor. . .	126
7.3.	Comparación de la solución aproximada con la solución de Pekeris, para a) receptores horizontales y b) receptores verticales. Fuente: Autor. . .	127
7.4.	Arreglo zero-offset o distancia cero. El medio es homogéneo e isótropo. Las fuentes están ubicadas en las posiciones de los receptores. Fuente: Autor.	128
7.5.	Sismogramas generados para un difractor inmerso en un medio homogéneo. Se utilizó un pulso de Ricker con una frecuencia dominante $f_p = 5$. Fuente: Autor.	129
7.6.	Migración de los datos ilustrados en la Figura 7.5. Se utilizó la migración de Kirchhoff. Fuente: Autor.	130
7.7.	Disposición de los difractores en el subsuelo; la disposición de los difractores genera estratos en el subsuelo. Se puede apreciar también, la presencia de una falla en el lado derecho de la imagen. Los difractores se muestran en color blanco. Fuente: Autor.	130

7.8. Sismogramas generados para el arreglo de la Figura 7.7. Para modelar estos datos, se utilizaron pulsos de Ricker con varias frecuencias dominantes; así como también, se utilizaron diversas amplitudes. Fuente: Autor.	131
7.9. Migración de los datos ilustrados en la Figura 7.8. Se utilizó la migración de Kirchhoff. Fuente: Autor.	131
7.10. Distribución de los detectores en el estrato; estos se denotan por los triángulos. Fuente: Autor.	143
7.11. Arreglo vertical de acelerogramas sintéticos registrados a diferentes profundidades en un estrato. Fuente: Autor.	144
7.12. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma del fondo. Fuente: Autor.	145
7.13. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma registrado en la superficie. Fuente: Autor.	146
7.14. Deconvolución de los acelerogramas de la Figura 7.11 con respecto al a) registro de superficie, b) registro 9, c) registro 8, d) registro 7, e) registro 6 y f) registro 5. Fuente: Autor.	148
7.15. Deconvolución de los acelerogramas de la Figura 7.11 con respecto al g) registro 4, h) registro 3, i) registro 2, j) registro 2 y k) registro del fondo. Fuente: Autor.	149
7.16. Análisis de los registros (Figura 7.11) deconvolucionados con respecto al acelerograma 6. La línea de deconvolución genera un par de ondas por cada reflexión sobre de ella. Fuente: Autor.	150
7.17. Registros sísmicos sintéticos mostrados en la Figura 7.11 deconvolucionados con respecto al registro 6. Las líneas gruesas indican la dirección de radiación de la onda generada por la fuente virtual, las líneas delgadas indican la trayectoria de la onda reflejada. Fuente: Autor.	151
7.18. Modelo de un medio estratificado sobre un semiespacio, el modelo consta de tres estratos con características diferentes entre sí. Fuente: Autor.	153
7.19. Comparación de la respuesta sísmica en superficie para un medio compuesto de tres estratos y un semiespacio, con las características mostradas en la Figura 7.18. La solución obtenida a partir de la ecuación (4.11) se ilustra en línea continua, y la solución generada usando el método de Thomson-Haskell se muestra en línea discontinua. Fuente: Autor.	154

7.20. Comparación de los espectros de amplitudes. En línea continua se ilustra el espectro obtenido con la ecuación (4.11), y en línea segmentada se muestra el espectro generado con la solución de Thomson-Haskell. Fuente: Autor.	155
7.21. Sismogramas sintéticos para un medio estratificado, sin atenuación. El medio corresponde al modelo ilustrado en la Figura 7.18. Fuente: Autor.	155
7.22. Deconvolución de los registros de la Figura 7.11 con respecto al a) registro de superficie, b) registro 9, c) registro 8, d) registro 7, e) registro 6 y f) registro 5. Fuente: Autor.	157
7.23. Deconvolución de los registros de la Figura 7.11 con respecto al g) registro 4, h) registro 3, i) registro 2, j) registro 2. Fuente: Autor.	158
7.24. Sismogramas sintéticos para un medio estratificado, con atenuación. Fuente: Autor.	159
7.25. Interpretación de las ondas deconvolucionadas. En el segundo estrato, las flechas continuas indican la primera reflexión, en línea discontinua se muestra la segunda reflexión y en línea punteada se presenta la tercera reflexión. Fuente: Autor.	160
7.26. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 60.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 15$ Hz. Fuente: Autor.	169
7.27. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 60.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 15$ Hz. Fuente: Autor.	171
7.28. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 14 de septiembre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 101.91 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 20$ Hz. Fuente: Autor.	171

7.29. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 13 de marzo de 1996. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 60 s a 100.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 10$ Hz. Fuente: Autor.	172
7.30. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 15 de julio de 1996. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 24 s a 64.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 15$ Hz. Fuente: Autor.	172
7.31. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 11 de enero de 1997. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 80 s a 120.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 10$ Hz. Fuente: Autor.	173
7.32. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 20 de abril de 1998. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 10 s a 50.95 s. Las ventanas seleccionadas se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 20$ Hz. Fuente: Autor.	173
7.33. Deconvolución de registros sísmicos con respecto al registro de la superficie del pozo Chapultepec, usando tres eventos sísmicos. Fuente: Autor.	174
7.34. Velocidades estimadas a 22 m de profundidad en la estación Chapultepec; los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.4). Fuente: Autor.	176
7.35. Velocidades estimadas a 52 m de profundidad en la estación Chapultepec; los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.4). Fuente: Autor.	176
7.36. Resultado de la deconvolución con respecto al registro de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994, usando las tres componentes: N-S (en línea segmentada), E-O (en línea continua) y vertical (en línea punteada). Fuente: Autor.	178

- 7.37. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 12 de febrero de 1992. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 1s a 21.47 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor. 180
- 7.38. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 15 de mayo de 1993. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 5 s a 45.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor. 180
- 7.39. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 24 de octubre de 1993. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 101.91 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor. . 181
- 7.40. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 23 de mayo de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 30 s a 111.91 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor. . 181
- 7.41. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 35 s a 75.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor. . 182
- 7.42. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 19 de julio de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 70 s a 233.83 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2,0$ Hz. Fuente: Autor. 182

7.43. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 14 de septiembre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 90 s a 253.83 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2,0$ Hz. Fuente: Autor. 183

7.44. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 6 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden ala componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 98 s a 138.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 1,5$ Hz. Fuente: Autor. 183

7.45. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 9 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 100 s a 140.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor. 184

7.46. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 12 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 83 s a 123.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor. 184

7.47. Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 21 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 90 s a 253.83 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor. 185

7.48. Velocidades estimadas a 30 m de profundidad en la estación Unidad Kennedy. Los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.7). Fuente: Autor. 187

7.49. Velocidades estimadas a 83 m de profundidad en la estación Unidad Kennedy. Los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.7). Fuente: Autor. 187

A.1. Acelerogramas del 10 de diciembre de 1994, la magnitud del sismo es $M_c = 6,3$. Fuente: Autor.	202
A.2. Acelerogramas del 14 de septiembre de 1995, la magnitud del sismo es $M_s = 6,4$. Fuente: Autor.	203
A.3. Acelerogramas del 13 de marzo de 1996, la magnitud del sismo es $M_s = 4,4$. Fuente: Autor.	204
A.4. Acelerogramas del 15 de julio de 1996, la magnitud del sismo es $M_s = 6,5$. Fuente: Autor.	205
A.5. Acelerogramas del 11 de enero de 1997, la magnitud del sismo es $M_s = 5,9$. Fuente: Autor.	206
A.6. Acelerogramas del 20 de abril de 1998, la magnitud del sismo es $M_c = 5,0$. Fuente: Autor.	207
C.1. Acelerogramas del 12 de febrero de 1992, la magnitud del sismo es $M_c = 5,26$. Fuente: Autor.	213
C.2. Acelerogramas del 15 de mayo de 1993, la magnitud del sismo es $M_c = 5,7$. Fuente: Autor.	214
C.3. Acelerogramas del 24 de octubre de 1993, la magnitud del sismo es $M_c = 6,7$. Fuente: Autor.	215
C.4. Acelerogramas del 23 de mayo de 1994, la magnitud del sismo es $M_c = 5,6$. Fuente: Autor.	216
C.5. Acelerogramas del 10 de diciembre de 1994, la magnitud del sismo es $M_c = 6,3$. Fuente: Autor.	217
C.6. Acelerogramas del 19 de julio de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 4,7$. Fuente: Autor.	218
C.7. Acelerogramas del 14 de septiembre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 7,3$. Fuente: Autor.	219
C.8. Acelerogramas del 6 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 5,2$. Fuente: Autor.	220
C.9. Acelerogramas del 9 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 7,5$. Fuente: Autor.	221
C.10. Acelerogramas del 12 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 6,1$. Fuente: Autor.	222
C.11. Acelerogramas del 21 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 6,5$. Fuente: Autor.	223

F.1. Función de un sólo impulso rectangular. Fuente: Autor.	244
F.2. Desplazamiento en tiempo de la función impulso rectangular. Fuente: Autor.	245
F.3. La nueva función $f(t)$. Fuente: Autor.	246
G.1. Diferencial de volumen ubicado en el espacio según el sistema de re- ferencia empleado en la formulación del método matricial de Thomson- Haskell, la unidad de volumen está sometida a un esfuerzo en la dirección paralela a eje y . Fuente: Autor.	249
H.1. Pantalla del programa desarrollado.	257
H.2. Apertura de acelerogramas.	259
H.3. Selección de ventanas.	261
H.4. Espectro de amplitudes.	262
H.5. Registros diezmados.	264
H.6. Puntos que definen el filtro trapecio.	265
H.7. Registros resultantes, después de ser diezmados y filtrados con un filtro Butterworth de orden 10 y una frecuencia de corte $\omega_c = 2$	266
H.8. Registros deconvolucionados.	268

Índice de tablas

2.1. Propiedades de la transformada de Fourier.	40
7.1. Sismos registrados en el pozo Chapultepec. Fuente: Autor.	165
7.2. Sismos registrados en el pozo de la Unidad Kennedy. Fuente: Autor. . .	166
7.3. Estratigrafía de la estación Unidad Kennedy. Fuente: Ordaz, 1991. . . .	167
7.4. Velocidades estimadas para la estación Chapultepec usando diferentes eventos, se seleccionó el intervalo correspondiente a la onda <i>SH</i> . Fuente: Autor.	174
7.5. Media y desviación estándar para las velocidades estimadas de eventos sísmicos diferentes, que corresponden a la estación Chapultepec. Fuente: Autor.	175
7.6. Velocidades estimadas usando las tres componentes sísmicas para la estación Chapultepec. Fuente: Autor.	179
7.7. Velocidades estimadas para la estación Unidad Kennedy utilizando ventanas que incluyen el movimiento por ondas <i>SH</i> . Fuente: Autor.	185
7.8. Media y desviación estándar correspondientes a velocidades estimadas de eventos sísmicos registrados en la estación Unidad Kennedy. Fuente: Autor.	186
7.9. Propiedades estimadas utilizando las velocidades calculadas de los registros deconvolucionados. Fuente: Autor.	189
7.10. Velocidades estimadas en las tres componentes sísmicas, utilizando los eventos indicados para la estación Unidad Kennedy. Fuente: Autor. . .	190
7.11. Propiedades estimadas utilizando las velocidades calculadas de los registros deconvolucionados.	191

B.1. Velocidades estimadas para el evento del 10 de diciembre de 1994. Fuente: Autor.	208
B.2. Velocidades estimadas para el evento del 14 de septiembre de 1995. Fuente: Autor.	209
B.3. Velocidades estimadas para el evento del 13 de marzo de 1996. Fuente: Autor.	209
B.4. Velocidades estimadas para el evento del 15 de julio de 1996. Fuente: Autor.	210
B.5. Velocidades estimadas para el evento del 11 de enero de 1997. Fuente: Autor.	210
B.6. Velocidades estimadas para el evento del 20 de abril de 1998. Fuente: Autor.	211
D.1. Velocidades estimadas para el evento del 12 de febrero de 1992. Fuente: Autor.	224
D.2. Velocidades estimadas para el evento del 15 de mayo de 1993. Fuente: Autor.	225
D.3. Velocidades estimadas para el evento del 24 de octubre de 1993. Fuente: Autor.	225
D.4. Velocidades estimadas para el evento del 23 de mayo de 1994. Fuente: Autor.	226
D.5. Velocidades estimadas para el evento del 10 de diciembre de 1994. Fuente: Autor.	226
D.6. Velocidades estimadas para el evento del 19 de julio de 1995. Fuente: Autor.	227
D.7. Velocidades estimadas para el evento del 14 de septiembre de 1995. Fuente: Autor.	227
D.8. Velocidades estimadas para el evento del 6 de octubre de 1995. Fuente: Autor.	227
D.9. Velocidades estimadas para el evento del 9 de octubre de 1995. Fuente: Autor.	228
D.10. Velocidades estimadas para el evento del 12 de octubre de 1995. Fuente: Autor.	228
D.11. Velocidades estimadas para el evento del 21 de octubre de 1995. Fuente: Autor.	228

Introducción

LA ciencia que se dedica al estudio de las características de los sismos es una rama de la geofísica que se llama *sismología*. La sismología es una ciencia basada en sismogramas, los cuales son registros de las vibraciones mecánicas de la Tierra. Kasahara (1981) divide a la sismología en tres grupos de estudio; el primero de ellos dedicado al uso de las ondas sísmicas para explorar el interior de la Tierra, el segundo grupo engloba la mecánica de los terremotos, y el tercer grupo se enfoca a la aplicación del conocimiento sismológico a las actividades humanas. Hoy en día, la sismología es usada en ingeniería estructural para ayudar en el diseño de edificios sismorresistentes, en la prevención de desastres, la prospección de minerales, la exploración de yacimientos de petróleo y gas natural, entre otros. En años recientes se ha avanzado en el conocimiento del origen de los sismos y de los mecanismos geológicos involucrados.

La propagación de ondas tridimensional en medios anisótropos, heterogéneos y dispersivos es un importante problema en geofísica; este tipo de medios guardan estrecha correspondencia con los depósitos sedimentarios de interés económico, y también son representativos del tipo de terreno de mayor riesgo en el asentamiento de obras civiles. El modelado de este tipo de medios tiene implicaciones importantes para los estudios de riesgo sísmico, efectos de sitio y para la tomografía de exploración. Un modelo tridi-

mensional de un medio heterogéneo y arbitrariamente anisótropo es el modelo más deseable (Aki y Richards, 1980).

En cuencas sedimentarias las velocidades de las ondas sísmicas en el material de relleno son relativamente bajas; como consecuencia, es necesario discretizar muy bien las zonas de baja velocidad cuando se trabaja con métodos numéricos. Las velocidades de propagación cerca de la superficie de la tierra varían de unos 200 m/s a casi 2 km/s; se han medido velocidades de 30 m/s en sedimentos blandos como en el caso del valle de México (Jongmans *et al*, 1996). La banda de frecuencia de interés en ingeniería sísmica está en el rango de 0.1 Hz a 20 Hz. En algunos casos, la anchura de la zona de relleno puede extenderse en dirección horizontal varios kilómetros al igual que en la dirección vertical; además, el material de relleno puede alcanzar profundidades considerables y debido a sus características debe considerarse como un medio anisótropo y heterogéneo; generalmente, se considera homogéneo e isótropo dando lugar a estimaciones erróneas de velocidad y atenuación.

Por lo anterior, es necesario seguir desarrollando nuevos modelos para estimar el comportamiento del subsuelo y así poder evaluar de manera más aproximada las condiciones locales; debido a que las hipótesis existentes consideran a los medios como homogéneos, isótropos y no dispersivos, la respuesta del subsuelo, en ciertos casos se puede estimar de forma errónea, sobre todo cuando existen condiciones geológicas complejas. Es necesario considerar la heterogeneidad de cada material, así como también, incluir en los modelos la anisotropía y la dispersión del medio.

El presente trabajo, se enfoca al estudio de la propagación de ondas en medios estratificados, utilizando modelos matemáticos de la propagación de ondas sísmicas y la deconvolución de acelerogramas de pozo para poder estimar las características del medio y las condiciones locales del subsuelo. Otro punto importante desarrollado en este trabajo corresponde a la función de Green tridimensional para medios heterogéneos,

donde el gradiente de la velocidad es constante, la cual es una solución que se obtiene a partir de la regularización del campo de ondas en la vecindad de la fuente. Esta ecuación es comparada con la solución analítica de Pekeris para determinar el rango de validez. Con este trabajo, se pretende contribuir al estudio de medios heterogéneos y anisótropos y a la obtención de mejores modelos que nos permitan entender el comportamiento sísmico del subsuelo.

El Capítulo 1 es la introducción al tema desarrollado, donde se plantea el problema en estudio, la justificación de la investigación, los antecedentes de trabajos relacionados, los objetivos y finalmente la hipótesis que se planteó al inicio de la investigación. En el Capítulo 2, se abordan los fundamentos del análisis y tratamiento de señales; el análisis de Fourier y algunos conceptos básicos que sirven para trabajar con señales discretas, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia; el Capítulo 3, se refiere a la ecuación de onda, donde se presenta la deducción de la ecuación de onda para el caso de la propagación de ondas SH y la solución de ésta usando dos alternativas: el método de separación de variables y la solución de d'Alembert; también se trata la atenuación y transmisión de ondas. En el Capítulo 4, se describen conceptos básicos de la propagación de ondas en medios estratificados, aquí se presenta el desarrollo matemático necesario para obtener las ecuaciones que gobiernan los desplazamientos en un medio estratificado, las cuales permiten observar el comportamiento de la onda que viaja por el medio. En el Capítulo 5, se trabaja con la propagación de ondas en medios heterogéneos, aquí se presenta el desarrollo de la función de Green acústica aproximada, y se explican las consideraciones hechas para obtener dicha solución. En el Capítulo 6, se describe la metodología seguida en el desarrollo de la presente investigación, en el Capítulo 7, se presentan los resultados obtenidos y las discusiones de los mismos. Al final del documento se incluyen los apéndices A, B, C, D, E, F, G y H que complementan este trabajo.

§1.1 Planteamiento del Problema

La propagación de los movimientos ondulatorios se rige por dos principios fundamentales, que son: el principio de Huygens y el principio de Fermat.

En un medio homogéneo e isótropo, los frentes de onda consecutivos, a partir de un centro generador, son esféricos (para casos tridimensionales) y concéntricos; así mismo, los nuevos frentes de onda generados serán paralelos entre sí, y los desplazamientos de una onda serán proporcionales al incremento de tiempo y a la velocidad del medio.

En medios heterogéneos o anisótropos, los desplazamientos dependerán de la distribución de velocidades; al variar las velocidades del medio, los desplazamientos serán diferentes en un intervalo de tiempo igual, esto cambia los frentes de las ondas subsecuentes. Según el principio de Fermat, la trayectoria de una onda entre dos puntos es la de menor tiempo de recorrido, y ésta no es siempre una línea recta como sucede sólo en el caso de un medio homogéneo e isótropo; en cualquier otro medio, la energía seguirá el camino de más alta velocidad. Este principio es importante; ya que, en un registro se pueden tener diversas ondas elásticas que podrían interpretarse como varios movimientos, pero sólo son diferentes trayectorias de un mismo movimiento.

Para un medio heterogéneo, en el cual el gradiente de la velocidad es positivo, los frentes de ondas dejan de ser concéntricos; algunas porciones del frente de la onda se mueven más rápidamente, o más lentamente, de acuerdo con el tipo de material por el que se propagan las ondas.

La propagación de ondas sísmicas en medios anisótropos y heterogéneos 3D es un problema importante en geofísica y geotecnia, el cual no se ha entendido bien y es difícil de modelar. El modelado en este campo tiene implicaciones importantes en los estudios de riesgo sísmico y efectos de sitio; así como, en la tomografía de exploración.

La cuantificación y predicción de la respuesta sísmica del suelo forma parte de los

principales objetivos considerados por la ingeniería sísmica; sin embargo, las simplificaciones hechas en el modelado del subsuelo para los análisis de riesgo sísmico y efectos de sitio implican errores considerables en las mediciones de los parámetros deseados.

Por otra parte, la estimación de la respuesta sísmica del subsuelo por métodos directos es indispensable en ingeniería sísmica, tal es el caso de la estimación de la velocidad de propagación de las ondas de cortante, que es la que causa mayores daños a las estructuras; y son útiles para determinar módulos de cortante, requeridos como parámetro de entrada en programas avanzados de elementos finitos para el análisis dinámico de suelos. Así mismo, es necesario conocer los cambios que sufre dicha respuesta con el paso del tiempo.

Muchos análisis geotécnicos son deterministas, en el sentido que los parámetros promedio del suelo varían en cada capa; las incertidumbres en estas características y su variación a partir de un punto a otro en el espacio han sido consideradas, cualitativamente, por el uso de factores de seguridad, por la experiencia local y por el juicio del que dirige. La selección de estos parámetros de diseño, sin embargo, contienen un cierto grado de incertidumbre y por lo tanto un grado del riesgo inevitable.

En la tomografía sísmica, es necesario contar con modelos que tomen en cuenta la heterogeneidad, la anisotropía y la dispersión del subsuelo; con ello se logrará tener mayor certidumbre en la localización de yacimientos de interés económico, puesto que, la mayoría de los suelos son altamente variables en sus propiedades y raramente son homogéneos e isótropos; siendo el impacto de la heterogeneidad litológica del subsuelo la mayor área de estudio en la práctica de la ingeniería petrolera al explorar depósitos de gas y petróleo. En un medio anisótropo, la migración isotrópica, aún con la velocidad correcta, localiza reflexiones en una posición vertical y lateral errónea Alkhalifah (1997), Uzcategui (1995).

§1.2 Justificación

La modelación matemática se utiliza para generar modelos por computadora. Los modelos pueden ser de varios tipos, tales como los basados en la ecuación de onda; y pueden tener varias aplicaciones, tanto en la exploración sísmica, como en el análisis la respuesta sísmica de valles aluviales.

Los sismogramas sintéticos pueden ayudar a determinar cómo los cambios estratigráficos afectan a los registros sísmicos, y el modelado de trayectorias de rayos a determinar las distorsiones que producen las distribuciones complicadas de la velocidad.

Aunque, la estimación del movimiento sísmico se puede realizar mediante la modelación matemática (Sánchez Sesma y Esquivel (1979), Papageorgiou y Kim (1993), Sánchez Sesma, Martínez y Campillo (1993)); sin embargo, los modelos constitutivos más sofisticados son inservibles si los parámetros de entrada son incorrectos o no están bien definidos. Se pueden inferir las condiciones locales de forma aproximada si se considera que los materiales que conforman el modelo son homogéneos, isotrópicos y no dispersivos; sin embargo, considerar la heterogeneidad, la anisotropía y la atenuación en el modelado de cada material permitirá obtener resultados más aproximados a la realidad con lo cual se pueden usar parámetros de diseño con mayor certidumbre.

En muchas áreas del mundo, el peligro sísmico hace necesario el diseño de estructuras e instalaciones sismorresistentes para disminuir los daños materiales y la pérdida de vidas humanas. Las características geológicas y sismotectónicas de México (Figura 1.1), sumadas a la existencia de grandes núcleos de población en zonas altamente sísmicas, hacen que los estudios de los efectos de sitio (evaluar factores de amplificación del suelo), adquieran una especial trascendencia. En México existe un mapa de regionalización sísmica publicado en el Manual de Obras Civiles de la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Se aprecia que el país se divide en cuatro zonas designadas

con las letras de A, B, C y D en orden creciente indicando el peligro sísmico. Deben tenerse ciertas precauciones al emplear mapas de regionalización, ya que la subdivisión es forzosamente burda y en una misma zona pueden quedar incluidos sitios de peligro sísmico significativamente distintos (Meli, 2002). Esta variación en el peligro sísmico se debe a las características geológicas y topográficas locales existentes. Estas variaciones en el terreno alteran significativamente la amplitud y el contenido de frecuencias de las ondas sísmicas.

El estudio de las velocidades de propagación y atenuaciones de las ondas sísmicas es importante; ya que a partir de estos parámetros es posible obtener información valiosa del subsuelo, tal como módulos elásticos. En ingeniería sísmica es necesario conocer las características dinámicas del subsuelo para diseñar estructuras que resistan los movimientos fuertes del mismo, recayendo la responsabilidad de estimar las características del medio en los estudios de mecánica de suelos.

Actualmente, uno de los objetivos de la ingeniería sísmica es realizar una microzonificación de la respuesta sísmica de áreas de terreno blando donde se han desarrollado importantes asentamientos urbanos (CENAPRED, 2008). La intención es crear mapas con velocidades estimadas a diferentes profundidades.

Este tipo de estudios permiten estudiar el comportamiento sísmico del suelo, con mayor certidumbre, en áreas pobladas donde las condiciones sísmicas de la región así lo demanden. Con ello se reducen los costos por el deterioro de las construcciones y en casos extremos por la destrucción total de las mismas; y lo más importante, evitar la pérdida de vidas humanas por el colapso de las estructuras.

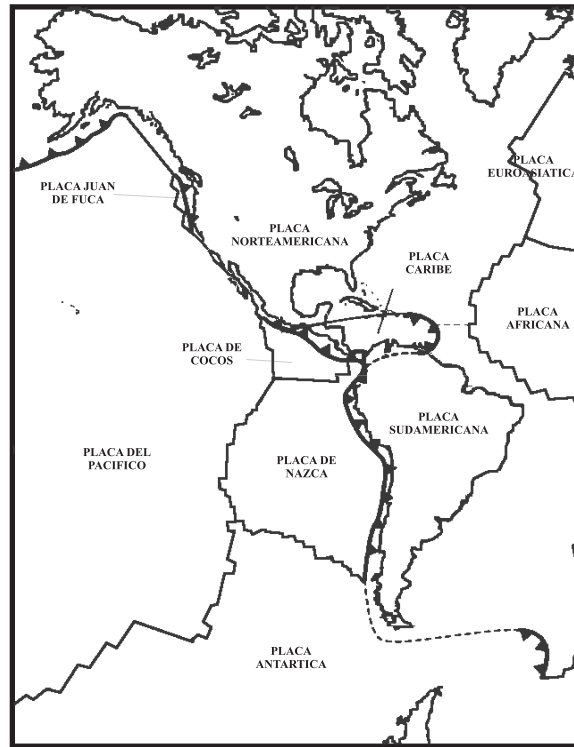


Figura 1.1: Tectónica de placas en México. Fuente: Autor.

Por otra parte, los modelos en la tomografía de exploración se utilizan para la interpretación de los datos obtenidos en las pruebas de reflexión. El modelo es una simplificación del subsuelo en el que los únicos elementos incluidos son los que se espera que influyan de manera más importante en las mediciones. El modelado se utiliza con la finalidad de comparar los datos reales con los datos obtenidos del modelo en un proceso iterativo para la interpretación de los datos; sin embargo, el subsuelo es un material complejo y se deben de considerar modelos realistas para tener estimaciones correctas.

La exploración sísmica se utiliza para localizar yacimientos de hidrocarburos, minerales y agua subterránea. Es importante determinar la ubicación y geometría de dichos yacimientos para estimar los costos de extracción y el volumen de producción de dicho

recurso. En la explotación de hidrocarburos la extracción se realiza, generalmente, por perforación de pozos a grandes profundidades y la ubicación de tales yacimientos se encuentra en suelos heterogéneos, anisótropos y dispersivos; por lo que es necesario considerar estos elementos en los modelos para poder caracterizar de manera correcta la posición horizontal y lateral; así como su geometría.

§1.3 Antecedentes

En años recientes se ha avanzado mucho en el conocimiento del origen de los sismos y de los mecanismos geológicos involucrados. Un acelerograma es un registro de la historia de aceleraciones que provoca el sismo en una dirección determinada y constituye la descripción más útil del movimiento del suelo en un lugar. Las características de los acelerogramas que más se relacionan con la potencialidad destructiva o intensidad del sismo son: la aceleración máxima, la duración de la etapa sensible, es decir de aquella en que la amplitud de aceleración tiene un valor apreciable, y las frecuencias dominantes del movimiento. La forma más confiable de estimar efectos del sitio es por medio de los registros de los terremotos (Graizer, *et al.*, 2001); efectos tales como la amplificación del movimiento (Şafak, 2001). Entre los parámetros más estudiados del movimiento del suelo, por su influencia en el comportamiento de las estructuras, se encuentran: la aceleración, la velocidad del movimiento del terreno y, en algunos casos, su desplazamiento. La forma convencional de obtener las velocidades y los desplazamientos del suelo es por medio de la integración con respecto al tiempo de las aceleraciones, mediante métodos numéricos estándar. Otra forma de estimar velocidades y periodos de resonancia del suelo, es por medio de ecuaciones que involucran las propiedades mecánicas del medio medidas de forma directa; tal es el caso de las ecuaciones obtenidas por Zeevaert (1964), Richart *et al.* (1970) y Fumoto *et al.* (1975).

La definición matemática de un acelerograma está dada por el modelo sísmico con-

volucional, mismo que fue propuesto originalmente por Robinson (1954), en el cual define un registro sísmico como la suma de ondículas sísmicas, donde cada ondícula tiene la misma forma. También, asume que las ondícula presentan retraso mínimo. Debido a que se considera que la traza sísmica está compuesta, de ondículas que presentan la misma forma, se puede representar matemáticamente mediante la convolución de ondículas y series aleatorias. Este modelo puede ser descrito como un modelo convolucional, de retraso mínimo e invariante en el tiempo, para una sección dada de una traza sísmica. Robinson (1985) presenta una derivación del modelo convolucional en el caso de una estratigrafía horizontal con incidencia normal de ondas planas. Matemáticamente este modelo se expresa como

$$\text{Traza} = (\text{Ondícula sísmica}) * (\text{Reflectividad}) + (\text{Ruido}),$$

donde la ondícula sísmica contiene los efectos de la fuente, la absorción, que es el decremento de la amplitud; así como, las reflexiones y el efecto del instrumento. La reflectividad es la que contiene la información de las condiciones locales y las propiedades del medio. Una forma equivalente del modelo convolucional anteriormente descrito es la siguiente:

$$\text{Señal registrada} = \text{Fuente} * \text{Trayectoria de propagación de la onda} * \text{Geología local}.$$

Por medio del modelo sísmico convolucional es posible obtener la función de transferencia de una región usando el método de las razones espectrales; Borchardt (1970) fue uno de los primeros investigadores en utilizar este método, el cual consiste deconvolucionar dos registros simultáneos de un mismo terremoto, bajo condiciones instrumentales idénticas pero en sitios diferentes, en un lugar sedimentario y en un lugar

rígido (que se toma como referencia); y dividiendo el espectro correspondiente a suelo blando entre el que corresponde a suelo rígido, se obtiene la función de transferencia empírica del lugar.

Puesto que la deconvolución es la operación inversa de la convolución es posible estimar velocidades de propagación dividiendo acelerogramas registrados en pozos (Mehta, et al., 2007).

Oldenburg (1981) realizó una revisión teórica de la deconvolución; en particular describe tres métodos, los cuales son planteados para su utilización en problemas geofísicos.

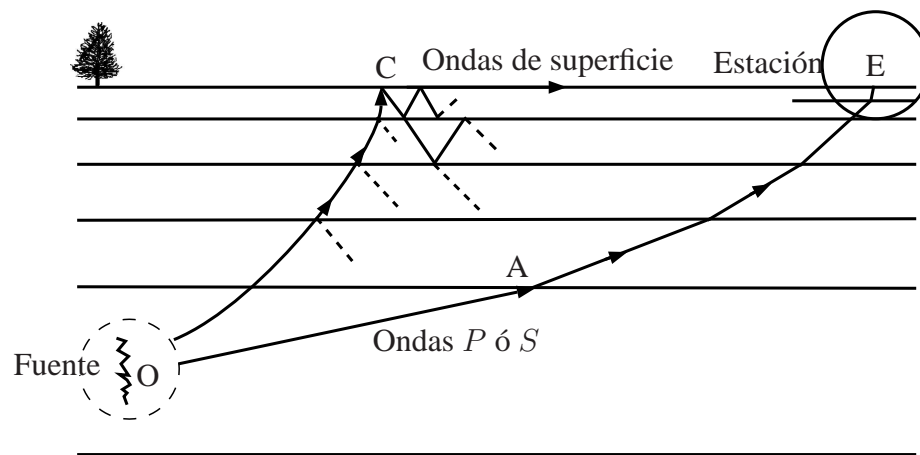


Figura 1.2: Relación idealizada entre la fuente de un terremoto, las trayectorias de las ondas y la estación de observación. Fuente: Tsai, 1969.

Para poder estudiar y modelar la respuesta sísmica del subsuelo se realizan idealizaciones como la mostrada en la Figura 1.2, ésta muestra la fuente de un terremoto (O), la estación de registro E, una trayectoria de ondas de cuerpo OAE y una trayectoria de ondas de superficie OCE.

Muchos autores han investigado la influencia de las condiciones del subsuelo en las amplitudes de los sismos (Gutenberg, 1956; Kunai, 1956; Kunai, 1957; Zeevaert, 1960;

Zeevaert, 1964). Para investigar esta influencia, Gutenberg (1956) comparó registros sísmicos de movimientos débiles medidos en Pasadena, California. Por otra parte, Zeevaert realizó estudios de movimientos fuertes registrados en la ciudad de México y observó periodos dominantes de 2.5 segundos para el sismo registrado el 28 de julio de 1957 (Zeevaert, 1960). Kanai (1954, 1956) midió periodos dominantes del movimiento sísmico del subsuelo observados durante microtemblores en las cercanías de Japón. Desde un punto de vista práctico, la pregunta que se requiere responder es la siguiente: ¿cómo afecta la geología local a las ondas incidentes y bajo que condiciones produce efectos de significancia en la ingeniería?. Para responder a esta pregunta con bases teóricas es necesario realizar consideraciones; puesto que existen complejidades tales como irregularidades en la configuración geométrica del subsuelo, la heterogeneidad del medio y las propiedades del subsuelo local. Por lo que, es necesario realizar estudios teóricos con un modelo simple e idealizado y tratar de relacionar los resultados analíticos con los casos encontrados. En 1930, los sismólogos japoneses, Sezawa y Kanai, precisaron los posibles efectos de las capas superficiales del suelo a partir de movimientos observados (Sezawa y Kanai, 1932; Sezawa y Kanai 1935; Sezawa y Kanai, 1935). Desde entonces, se han realizado una gran cantidad de investigaciones para estudiar el problema, tanto teórica como experimentalmente. Los estudios teóricos se basan en modelos estratigráficos simples. Estos modelos simplificados consisten en capas horizontales, lineales y homogéneas sobre un semiespacio. Las fronteras de las capas son planos idealizados que se extienden infinitamente en dirección horizontal en ambas direcciones.

§1.4 Objetivos

- **Objetivo general:** Estimar la respuesta sísmica o función de Green de medios estratificados, anisótropos y heterogéneos usando la deconvolución de eventos sísmicos registrados en pozos.

■ **Objetivos específicos:**

- Generar sismogramas sintéticos a partir de la ecuación de onda para estudiar la respuesta sísmica de medios estratificados, heterogéneos y anisótropos.
- Estimar la respuesta sísmica del subsuelo a partir de la deconvolución de acelerogramas.
- Identificar posibles cambios en los medios por los que se propagan las ondas utilizando interferometría sísmica.
- Estimar velocidades de propagación de ondas sísmicas en medios estratificados usando la deconvolución.
- Validar el procedimiento utilizado para obtener la función de Green heterogénea aproximada usando la solución analítica de Pekeris.

§1.5 Hipótesis

- Mediante la deconvolución de eventos sísmicos registrados en medios extremadamente complejos es posible extraer la respuesta sísmica del medio o función de Green.
- La deconvolución de acelerogramas de pozo permite caracterizar suelos de estructura compleja, tal como el suelo del valle de la ciudad de México; aún ante eventos sísmicos mayores de 6 grados en la escala de Richter.
- El suelo del valle de México se comporta como un material elástico lineal, aún ante eventos sísmicos de gran intensidad, lo que permite caracterizar el subsuelo a través de la deconvolución de acelerogramas registrados en pozos.

- Regularizando la función de Green asintótica correspondiente a un medio heterogéneo donde la velocidad varia linealmente con la profundidad, es posible obtener una forma analítica de la función de Green válida en baja y alta frecuencia.

Fundamentos del análisis de señales

EL radar fue uno de los avances tecnológicos más importantes de la Segunda Guerra Mundial y se usó ampliamente para detectar aviones y barcos en el mar. Sin embargo, el ruido interfería con frecuencia en la aplicación del radar y desde entonces se ha dedicado considerable trabajo teórico en la detección de señales en presencia del ruido. Como consecuencia surgió un nuevo campo en las matemáticas: la informática; con el rápido avance de las computadoras se renovó el procesamiento de datos. En la exploración sísmica, donde se trabaja con una gran cantidad de datos y se tienen que realizar extensos cálculos, estos avances tecnológicos han sido de gran relevancia. La mayor parte de los registros sísmicos se hacen de forma digital y la mayoría de los datos se sujetan al procesamiento de datos antes de interpretarlos. Los datos sísmicos se conciben por lo general como la variación con el tiempo de las amplitudes de la onda sísmica. A veces también resulta conveniente considerar una onda sísmica como el resultado de la superposición de muchas ondas sinusoidales que difieren en frecuencia, amplitud y fase; las amplitudes relativas y las fases se toman como funciones de la frecuencia. Tres tipos de operaciones matemáticas constituyen el meollo de la mayor parte del procesamiento de datos: transformada de Fourier, convolución y correlación, las cuales se explican con más detalle en este capítulo.

§2.1 Conceptos básicos sobre vibraciones mecánicas

- Amplitud: es el valor numérico del máximo desplazamiento hacia cualquier lado de su posición de equilibrio. Desplazamiento total: es la suma de las dos amplitudes de la oscilación.
- Periodo: es el tiempo que transcurre entre dos oscilaciones completamente sucesivas.
- Ciclo: es el movimiento ejecutado durante el periodo.
- Frecuencia: es el número de ciclos completos de movimientos realizados en una unidad de tiempo.
- Fuerza amortiguadora: en todos los sistemas vibratorios se encuentran presente fuerzas no conservativas, las cuales impiden que los sistemas excitados inicialmente continúen oscilando indefinidamente. Tales fuerzas, no conservativas, actúan como fuerzas amortiguadoras disipando la energía del sistema y reduciendo, gradualmente, la amplitud del movimiento.

§2.2 Ondícula sísmica

Dix (1950, 1955) citado por Costain en su libro, discute “el carácter oscilatorio mínimo de un pulso” y sugiere que el pulso sísmico primario que abandona la fuente puede ser relativamente simple. Si el disturbio inicial en el sistema de la ondícula es una compresión (+), entonces debe haber una fracción (−) en la ondícula. Cualquier ondícula sísmica debe tener un medio cero porque el medio de transmisión no sufre

ninguna tensión permanente. La ondícula sísmica con mejor resolución puede ser la función delta de Dirac o su equivalente discreta la delta de Kronecker, definida como $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Éstas tienen una duración infinitesimal de tiempo sin posibilidad de traslaparse o causar interferencia entre arribos de reflexiones sucesivas. Pero la tierra no transmite un espectro de frecuencia uniforme y constante asociado con δ o δ_{ij} y la atenuación relativa de sus componentes de la alta frecuencia rápidamente incrementa la duración de la ondícula reflejada. Diversos estudios teóricos y prácticos han demostrado que la tierra tiene un espectro de absorción para las ondas elásticas, y que el pulso sísmico generado en el punto de impacto al propagarse por la corteza de la Tierra, por efecto de la absorción, modifica su forma atenuando los componentes de la alta frecuencia que dependen de la naturaleza del espectro de absorción del subsuelo.

Se han observado también, que las vibraciones de alta frecuencia se transmiten con bastante pobreza, mientras que las de baja frecuencia se propagan bastante bien, aumentando la absorción de las componentes de la alta frecuencia conforme avanza la onda. La mayor parte de los mecanismos naturales que afectan la forma de la ondícula son de fase mínima o cercana a ella. Una ondícula de fase mínima tiene concentrada su energía en la parte inicial. Las ondículas de fase cero son simétricas y el centro de la ondícula indica el tiempo de arribo. Dos ondículas usadas comúnmente en la literatura son la ondícula de Ricker y la ondícula de Klauder; en este trabajo sólo se utilizó la ondícula de Ricker.

Norman Ricker propuso una ondícula teórica para representar el pulso de velocidad de una onda que se propaga por el subsuelo, y se conoce como el pulso de Ricker (Figura 2.1). La ondícula de Ricker es equivalente a la segunda derivada de una función

gaussiana. La ondícula de Ricker se define como:

$$f_r(t) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 (t - d_r)^2\right) e^{(-\pi^2 f_p^2 (t - d_r)^2)}, \quad (2.1)$$

donde f_p es la frecuencia dominante y d_r es el retraso temporal. El retraso d_r puede ser cualquier cantidad deseada, pero es conveniente expresarlo como un múltiplo de $1/f_p$.

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p},$$

donde M_d es el retraso múltiple.

La transformada de Fourier (§2.3.4) de la ondícula de Ricker es:

$$F_r(\omega) = -\frac{2}{f_p \sqrt{\pi}} \left(\frac{\omega}{2\pi f_p}\right)^2 e^{\left(-id_r \omega - \left(\frac{\omega}{2\pi f_p}\right)^2\right)}, \quad (2.2)$$

nótese que el retraso temporal d_r sólo aparece en la parte imaginaria del exponente; por lo tanto sólo afectará la fase de $F_r(\omega)$ y no la magnitud. El pulso de Ricker también

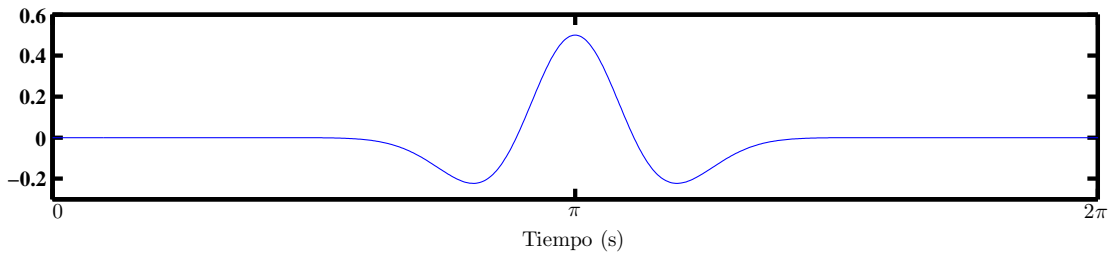


Figura 2.1: Ondícula de Ricker con $tp = \pi/2$ y $ts = \pi$. Fuente: Autor.

se puede escribir como

$$f_r(t) = \left(\left(\frac{(t - ts) \pi}{tp}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\left(\frac{(t - ts) \pi}{tp}\right)^2} \quad (2.3)$$

donde ts representa el retraso temporal y tp es el periodo de la ondícula.

§2.3 Análisis de Fourier

La *Théorie analytique de la chaleur*, de Jean-Baptiste-Joseph Fourier, introdujo métodos sencillos para la solución de problemas relacionados con el flujo de calor en sólidos; sin embargo, se ha extendido a muchas otras aplicaciones de la física, entre las que se destacan el análisis de señales.

2.3.1 Series de Fourier

Una función periódica se puede definir como una función

$$f(t) = f(t + L),$$

para todo valor de t , donde L es el periodo. Para una función periódica

$$f(t) = f(t + nL),$$

para $n = [0, 1, 2, 3, \dots]$. Fourier demostró que cualquier función periódica $f(t)$ puede

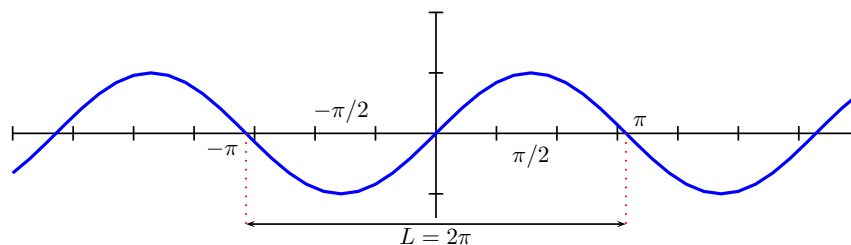


Figura 2.2: Función periódica. Fuente: Autor.

ser representada a partir de una suma infinita de senos y cosenos (ecuación 2.4), donde la función $f(t)$ debe cumplir con las siguientes condiciones de Dirichlet:

- $f(t)$ solo puede tomar un sólo valor en cada punto en el que es evaluada.
- La integral en un periodo de $|f(t)|$ existe (no es infinita).
- $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.
- $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.

Una función $f(t)$ expresada en series de Fourier tiene la forma

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi n t}{L} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{cos} \left(\frac{2\pi n t}{L} \right), \quad (2.4)$$

donde b_0 , a_n , y b_n son los coeficientes de esta serie. La serie definida por la ecuación (2.4) se conoce como la serie de Fourier de una función $f(t)$. En la ecuación (2.4), n representa un valor entero positivo; el número $\frac{2\pi}{L}$ representa la mínima frecuencia radial que contiene la función $f(t)$ y se conoce como la frecuencia angular fundamental. A esta función se le llamará ω_1 , siendo

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{L}; \quad (2.5)$$

sustituyendo (2.5) en (2.4) resulta

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} (n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{cos} (n\omega_1 t), \quad (2.6)$$

definiendo $\omega_n = n\omega_1$ ó $\omega_n = \frac{2\pi}{L}$; $L_n = \frac{L}{n}$; se puede decir que ω_n y L_n son la frecuencia y el periodo n , respectivamente.

De la resta de dos frecuencias subsecuentes ω_n y ω_{n-1} resulta el valor ω_1

$$(n\omega_1 - (n-1)\omega_1) = \omega_1,$$

y a esta diferencia se le puede llamar $\Delta\omega$.

Para poder representar la función $f(t)$ mediante la ecuación (2.4), es necesario encontrar los coeficientes b_0 , a_n y b_n . Para encontrar el valor del coeficiente b_0 , se multiplica la ecuación (2.6) por la diferencial dt , la ecuación resultante se integra de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$, quedando como resultado

$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt; \quad (2.7)$$

para encontrar el valor de la constante a_n se multiplica la ecuación (2.6) por $\sin(m\omega_1 t)$ y se integra de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$, dando como resultado

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (2.8)$$

y para encontrar el valor de la constante b_n , se multiplica la ecuación (2.6) por $\cos(m\omega_1 t)$ y se integra de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$ como consecuencia

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, la serie trigonométrica de Fourier queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \right] \sin(n\omega_1 t) + \\ & + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \right] \cos(n\omega_1 t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por medio de la ecuación (2.10), es posible representar cualquier función periódica como la suma de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias. La componente

sinusoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_1$, se denomina la n -ésima armónica de la función periódica.

Como se mencionó anteriormente, la señal en el dominio del tiempo usada en la serie de Fourier es periódica y continua. Las funciones periódicas tienen un espectro de frecuencias consistente de armónicos. Por ejemplo, si en el dominio del tiempo la señal se repite en un periodo de 1 milisegundo (1000 hertzios), el espectro de frecuencias contendrá un primer armónico en 1000 hertzios, un segundo armónico en 2000 hertzios, un tercer armónico en 3000 hertzios, y así sucesivamente. A la frecuencia del primer armónico también se llama la **frecuencia fundamental**. Esto significa que el espectro de frecuencias se puede interpretar de dos maneras:

1. el espectro de frecuencias es continuo, pero es cero en todas las frecuencias exceptuando aquellas correspondientes a los armónicos, ó
2. el espectro de frecuencias es discreto y definido solamente en las frecuencias armónicas.

Utilizando la serie de Fourier, se puede construir el espectro de frecuencias discreto, por medio de las frecuencias armónicas de la serie.

2.3.1.1 Armónicos

Si una señal es periódica con frecuencia f , las únicas frecuencias que componen la señal son números enteros múltiplos de f ($f, 2f, 3f, \dots$), estas frecuencias son llamadas frecuencias armónicas, y como se mencionó anteriormente la primer frecuencia armónica recibe el nombre de frecuencia fundamental.

Todas las señales periódicas continuas se pueden representar como una adición de armónicos, sin embargo las señales periódicas discretas tienen un problema que afecta esta relación simple; el problema es conocido como *aliasing*. La serie de Fourier genera una señal periódica con una frecuencia fundamental, f , por la adición escalada de ondas de senos y cosenos. Las amplitudes de las ondas coseno están dadas por los coeficientes $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, mientras que, las amplitudes de las ondas seno están determinadas por $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$; así mismo, b_0 representa la amplitud cuando $f = 0$ y representa el caso estático.

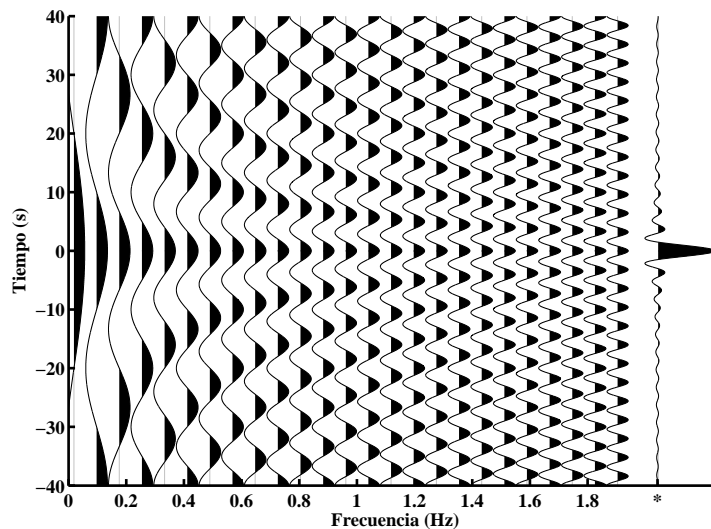


Figura 2.3: Suma de sinusoidales sin corrimiento en fase, denominados armónicos de la señal denotada por el asterisco, las amplitudes disminuyen hacia la alta frecuencia. Fuente: Autor.

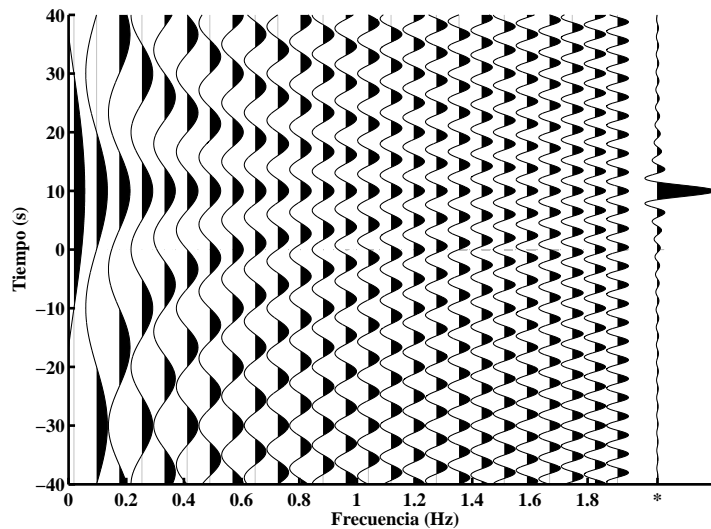


Figura 2.4: Los mismos sinusoidales de la Figura 2.3, pero con un corrimiento en tiempo de 10 s. Cuando los componentes son sumados, la señal resultante es la mostrada en el lado derecho (denotada por el asterisco). La señal es la misma que la presentada en la Figura 2.3 pero con un corrimiento en tiempo. Fuente: Autor.

2.3.1.2 Ángulo de fase

Sea una función $f(t)$ con periodo fundamental L (por ejemplo, Figura (2.2)), la serie de Fourier de dicha función en $[-L/2, L/2]$ se define por la ecuación (2.6); sin embargo, algunas veces es conveniente escribir la ecuación (2.6) de forma diferente.

Haciendo

$$a_n \operatorname{sen}(n\omega_1 t) + b_n \operatorname{cos}(n\omega_1 t) = c_n \operatorname{cos}(n\omega_1 t + \phi_n),$$

para poder resolver esta ecuación es necesario encontrar los números c_n y ϕ_n , que representan la amplitud y el ángulo de fase, respectivamente; por lo tanto, utilizando la identidad $\operatorname{cos}(u + v) = \operatorname{cos}(u) \operatorname{cos}(v) - \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v)$ resulta

$$a_n \operatorname{sen}(n\omega_1 t) + b_n \operatorname{cos}(n\omega_1 t) = c_n \operatorname{cos}(n\omega_1 t) \operatorname{cos}(\phi_n) - c_n \operatorname{sen}(n\omega_1 t) \operatorname{sen}(\phi_n),$$

la ecuación anterior se satisface cuando

$$c_n \cos(\phi_n) = b_n,$$

y

$$c_n \operatorname{sen}(\phi_n) = -a_n;$$

para encontrar c_n se elevan ambas ecuaciones a la segunda potencia y posteriormente se suman, y puesto que $\operatorname{sen}(A)^2 + \cos(A)^2 = 1$, entonces

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2,$$

con lo que se puede decir que

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$

haciendo

$$\frac{b_n}{\cos(\phi_n)} = -\frac{a_n}{\operatorname{sen}(\phi_n)},$$

entonces

$$\tan(\phi_n) = -\frac{a_n}{b_n},$$

por lo tanto

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right), \quad (2.11)$$

la ecuación (2.11) nos permite conocer el n-ésimo *ángulo de fase* del n-ésimo *armónico*, suponiendo que $b_n \neq 0$.

Por lo tanto, la serie de Fourier (ecuación (2.6)) en función del ángulo de fase se puede expresar como

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n), \quad (2.12)$$

donde c_n representa la n-ésima *amplitud armónica*.

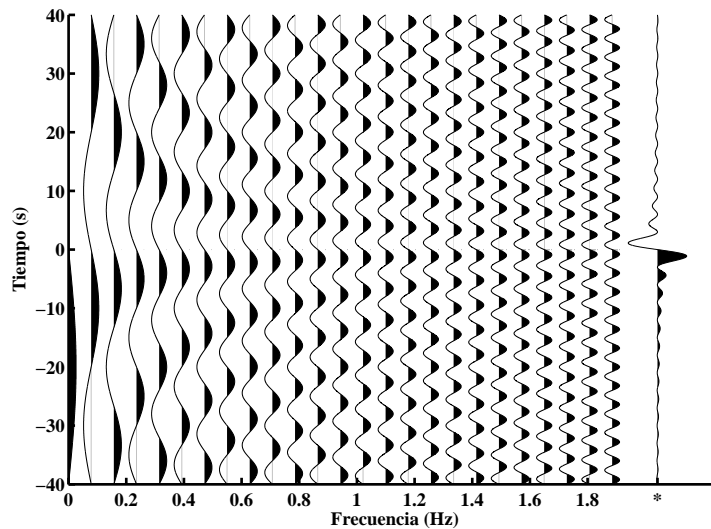


Figura 2.5: Suma de sinusoidales correspondientes a la señal de la Figura 2.3, pero con un corrimiento constante en fase de $\pi/2$ radianes, la señal está alineada en $t = 0$. La suma de los sinusoidales genera una señal antisimétrica mostrada en el lado derecho de la gráfica (denotada por el asterisco).

2.3.2 Serie de Fourier compleja

La serie de Fourier compleja y sus coeficientes dan un punto de partida natural para el desarrollo de la transformada de Fourier discreta.

Dado un número complejo $a + bi$, su conjugado es $a - bi$ y puede ser escrito como $\overline{a + bi}$. La magnitud o módulo de $a + bi$ es

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (2.13)$$

y se define como la distancia del origen a las coordenadas (a, b) en el plano complejo.

Si se tiene

$$(a + bi) \left(\overline{a + bi} \right),$$

esto es equivalente a

$$a^2 + b^2 = |a + bi|^2.$$

Introduciendo las coordenadas polares $a = r \cos(\varphi)$ y $b = r \sin(\varphi)$ se puede escribir

$$a + bi = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] = re^{i\varphi},$$

donde φ es llamado argumento de $a + bi$ y es el ángulo entre la parte positiva del eje x y el punto $a + bi$ en el plano complejo.

Considerando las siguientes identidades

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi); \quad (2.14)$$

y

$$e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi); \quad (2.15)$$

resolviendo este sistema de ecuaciones para $\sin(\varphi)$ y $\cos(\varphi)$ resulta

$$\sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{i(n\omega_1 t)} - e^{-i(n\omega_1 t)}}{2i}, \quad (2.16)$$

y

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{i(n\omega_1 t)} + e^{-i(n\omega_1 t)}}{2}, \quad (2.17)$$

en la serie de Fourier de una función periódica (ecuación (2.6)), los términos sinusoidales se pueden expresar en función de los exponentes.

La representación de una función periódica mediante una serie de Fourier, implica que la especificación de sus coeficientes determina unívocamente la función. En muchas aplicaciones, es conveniente expresar esta serie en términos de los exponenciales complejos $e^{\pm i(n\omega_1 t)}$.

Sustituyendo las identidades (2.16) y (2.17) en la serie de Fourier expresada en la ecuación (2.6)

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{i(n\omega_1 t)} - e^{-i(n\omega_1 t)}}{2i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{i(n\omega_1 t)} + e^{-i(n\omega_1 t)}}{2},$$

reduciendo términos

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2i} e^{i(n\omega_1 t)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2i} e^{-i(n\omega_1 t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} e^{i(n\omega_1 t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} e^{-i(n\omega_1 t)},$$

y agrupando términos semejantes

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2i} \right) e^{i(n\omega_1 t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} - \frac{a_n}{2i} \right) e^{-i(n\omega_1 t)};$$

puesto que $i = \sqrt{-1}$, entonces al multiplicar los dos últimos sumandos por $\frac{i}{i} = 1$ se puede eliminar el número complejo del denominador

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} - i \frac{a_n}{2} \right) e^{i(n\omega_1 t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} + i \frac{a_n}{2} \right) e^{-i(n\omega_1 t)};$$

llamando

$$C_n = \frac{b_n}{2} + i \frac{a_n}{2} \tag{2.18}$$

y

$$C_n^* = \frac{b_n}{2} - i \frac{a_n}{2}, \tag{2.19}$$

se tiene

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-i(n\omega_1 t)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i(n\omega_1 t)}, \tag{2.20}$$

sustituyendo las ecuaciones (2.8) y (2.9) en (2.18)

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt + i \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \operatorname{sen}(\omega_1 t) dt,$$

agrupando términos y factorizando la ecuación resulta

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) (\cos(n\omega_1 t) + i \operatorname{sen}(n\omega_1 t)) dt,$$

utilizando la identidad (2.14) se puede reducir la ecuación anterior a la siguiente expresión

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{i(n\omega_1 t)} dt; \quad (2.21)$$

para encontrar el valor de C_n^* se sustituyen las ecuaciones (2.8) y (2.9) en (2.19)

$$C_n^* = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - i \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_1 t) dt,$$

agrupando términos y factorizando se tiene

$$C_n^* = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) (\cos(n\omega_1 t) - i \operatorname{sen}(n\omega_1 t)) dt,$$

utilizando la identidad (2.15) la ecuación anterior se reduce a

$$C_n^* = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{i(n\omega_1 t)} dt; \quad (2.22)$$

como n es un número entero positivo, si se sustituye $-n$ en lugar de n en la ecuación (2.21) se tiene

$$C_{-n} = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-i(n\omega_1 t)} dt \quad (2.23)$$

si se compara la ecuación (2.23) con (2.22) se puede concluir que $C_n^* = C_{-n}$; como consecuencia, la ecuación (2.20) puede simplificarse de la siguiente manera

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{i(n\omega_1 t)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-i(n\omega_1 t)}; \quad (2.24)$$

invirtiendo la primera suma de la ecuación (2.24) resulta

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{i(n\omega_1 t)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-i(n\omega_1 t)},$$

simplificando las sumas, la ecuación queda de la siguiente forma

$$f(t) = b_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_n e^{-i(n\omega_1 t)}. \quad (2.25)$$

La suma en la ecuación (2.25) no incluye el caso $n = 0$. Para poder incluir este caso se tiene que sustituir $n = 0$ en la ecuación (2.21)

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt,$$

por lo tanto $C_0 = b_0 = C_0^*$.

Integrando el término b_0 en la suma de la ecuación (2.25)

$$f(t) = C_0 e^{-i(0\omega_1 t)} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_n e^{-i(n\omega_1 t)},$$

al incluir el caso de $n = 0$ en la suma, la serie de Fourier en forma compleja se expresa como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i(n\omega_1 t)}; \quad (2.26)$$

si se hubiera elegido $b_0 = C_0^*$, entonces se tendría que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{i(n\omega_1 t)}. \quad (2.27)$$

2.3.3 Espectros de frecuencia discreta

Partiendo de las ecuaciones (2.18) y (2.13) se tiene que

$$|C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (2.28)$$

que representa el valor absoluto de la amplitud del n -ésimo armónico y se utiliza para construir el espectro de amplitud discreto. El *espectro de amplitud* de una función periódica f es una gráfica de los valores de $n\omega_1$ en el eje horizontal y de los valores $|C_n|$ en el eje vertical, para $n = \{1, 2, 3, \dots\}$. También es usual incluir el punto $(0, |b_0|)$ en el eje vertical.

Para construir el espectro de fase discreto de una función $f(t)$, se usa la ecuación (2.21), la cual se puede escribir como

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-i\phi_n} dt,$$

donde ϕ_n es el n -ésimo ángulo de fase de la función $f(t)$; por lo tanto, si se genera una gráfica colocando los valores ϕ_n en el eje de las ordenadas y en el eje horizontal $n\omega_1$, se obtiene el espectro de fase de la función $f(t)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones constituido por (2.18) y (2.19) resulta

$$a_n = i(C_n - C_n^*) = -2\text{Im}[C_n],$$

$$b_n = C_n + C_n^* = 2\text{Re}[C_n],$$

donde Re y Im denotan “la parte real de” y “la parte imaginaria de”, respectivamente.

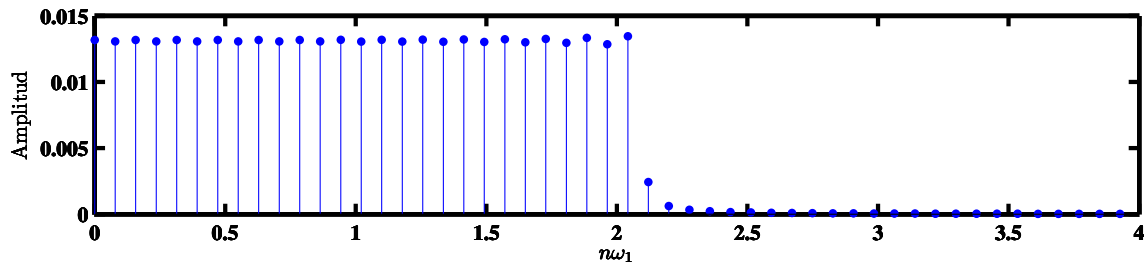


Figura 2.6: Espectro de amplitud de la función denotada por el asterisco en la Figura 2.3; el espectro muestra la amplitud de los armónicos que constituyen a la función periódica, se puede apreciar que el coeficiente b_0 es diferente de cero. Fuente: Autor.

Tomando como ejemplo un pulso de Ricker, dado por la ecuación (2.3), se resuelve la serie de Fourier de forma numérica para $n = 150$ utilizando el código mostrado en el Apéndice E, el resultado de la serie se muestra en la Figura 2.7.

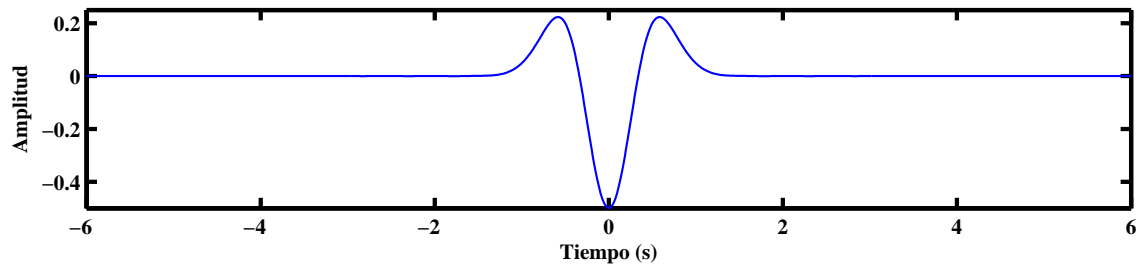


Figura 2.7: Ondícula de Ricker (ecuación (2.3)) representado por medio de series de Fourier, con la suma de 150 armónicos. Fuente: Autor.

Para construir el espectro de amplitudes se utilizaron los coeficientes a_n y b_n para obtener el valor de C_n de la siguiente forma

```

cn(1)=abs(b0(1,1));
fre2(1)=0.0;
for n=2:niter+1
    fre2(n)=(n-1)*dfre;

```

```

cn(n)=1/2*sqrt(an(n-1,1)^2+bn(n-1,1)^2);
end

```

donde `dfre` es ω_1 y está dada por la ecuación (2.5), y por lo tanto `fre2` es igual a $n\omega_1$ con lo que colocando $n\omega_1$ en el eje horizontal y a C_n en el eje vertical se obtiene la Figura 2.8.

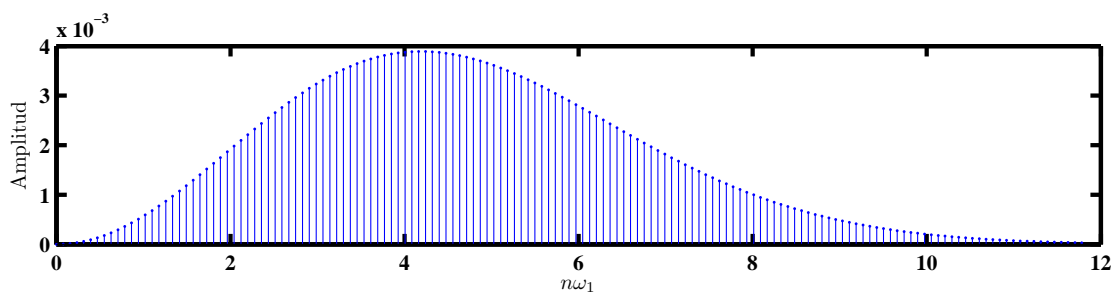


Figura 2.8: Espectro discreto de amplitud de la función periódica mostrada en la Figura 2.7. Fuente: Autor.

Finalmente el espectro discreto del ángulo de fase se construye utilizando los coeficientes a_n y b_n . Para el cálculo del ángulo de fase, se programó la ecuación (2.11) de la siguiente manera

```

for n=1:niter
    fre3(n)=(n)*dfre;
    anf(n)=atan(an(n,1)/bn(n,1));
end

```

donde `atan` representa \tan^{-1} en el lenguaje de MATLAB[®], se puede apreciar que el número de muestras es menor al utilizado en el espectro de amplitud, esto es debido a que no se incluyó la frecuencia ω_0 . La Figura 2.9 ilustra el espectro de fase de la función mostrada en la Figura 2.7.

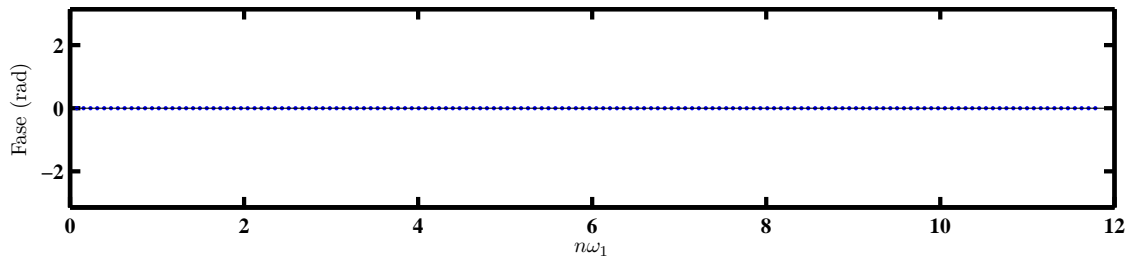


Figura 2.9: Espectro discreto de fase de la función periódica mostrada en la Figura 2.7. Es conocido que la ondícula de Ricker es de fase cero, con lo que el resultado obtenido es correcto. Fuente: Autor.

2.3.4 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier se emplea con señales periódicas y aperiódicas, a diferencia de la serie de Fourier. Las condiciones para poder obtener la transformada de Fourier de una señal son:

- Que la señal sea absolutamente integrable, es decir, que la integral del valor absoluto de $f(t)$ en un periodo es finita

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)| dt < \infty.$$

- Que tenga un grado de oscilación finito, es decir que la función $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
- Que tenga un número máximo de discontinuidades.

A estas condiciones se les conoce como *condiciones de Dirichlet*, en honor al matemático alemán Peter Dirichlet, que definió el criterio requerido para la convergencia de las sumas de una serie de Fourier a $f(t)$.

Para obtener la transformada de Fourier, se usan de las ecuaciones (2.26) y (2.21); combinando ambas ecuaciones resulta que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{i(n\omega_1 t)} dt \right) e^{-i(n\omega_1 t)},$$

donde $n\omega_1$ se puede reemplazar por ω_1 , además se sabe que $\Delta\omega = \omega_1$ y $\omega_1 = \frac{2\pi}{L}$, entonces $\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$ ó $L = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$; por lo tanto, se puede escribir

$$f(t) = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{i\omega_n t} dt \right) e^{-i\omega_n t},$$

simplificando la ecuación anterior se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{i\omega_n t} dt \right) e^{-i\omega_n t} \Delta\omega. \quad (2.29)$$

Ahora se tiene que considerar que el periodo de la función $f(t)$ tiende a infinito ($L \rightarrow \infty$). Sin embargo, cuando $L \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$; como consecuencia ω_n se transforma en una variable continua a la cual se le puede llamar ω , y $\Delta\omega$ se transforma en una diferencial $d\omega$; entonces, la suma en la ecuación (2.29) se puede reemplazar por una integral, por lo que rescribiendo la ecuación (2.29) queda de la siguiente forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.30)$$

la integral dentro de los paréntesis se puede llamar

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.31)$$

y a esta ecuación se le conoce como la transformada de Fourier. De la ecuación (2.30)

se puede definir la transformada inversa de Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.32)$$

Si se hubiera elegido el coeficiente C_n^* y $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{in\omega_1 t}$ se tendría

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.33)$$

que es otra forma equivalente de definir la transformada de Fourier, y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.34)$$

Otra representación equivalente de la transformada de Fourier se puede obtener factorizando el factor $\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, con lo cual se obtiene

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.35)$$

y

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.36)$$

La transformada de Fourier para las señales continuas se divide en dos categorías, una para las señales que son periódicas y otra para las señales que son *aperiódicas*. Las señales periódicas utilizan una versión de la transformada de Fourier llamada la serie de Fourier, la cual se describió anteriormente. La transformada de Fourier utilizada para las señales aperiódicas simplemente se llama transformada de Fourier. Aunque, es posible utilizar la transformada de Fourier para ambos casos.

Por medio de la gráfica del valor absoluto de la transformada de Fourier $|F(\omega)|$ se genera el espectro de frecuencia continuo de una función y se le denomina generalmente

como el *espectro de amplitud*, aunque también suele ser llamado *espectro de frecuencias*. Por otra parte, el espectro de fase de una señal, se obtiene al dividir la parte imaginaria entre la parte real de la transformada de Fourier.

Las Figuras 2.10, 2.11, 2.12 y 2.14 ilustran el comportamiento en frecuencia de un pulso de Ricker, una función sinc y de una señal coseno cuando se modifican en el dominio del tiempo; en cada ejemplo, se presentan el espectro de fase y de amplitud. Se puede ver que el desplazamiento de una señal en tiempo sólo modifica el espectro de fase y que al modificar el periodo de la señal únicamente se altera el espectro de amplitud.

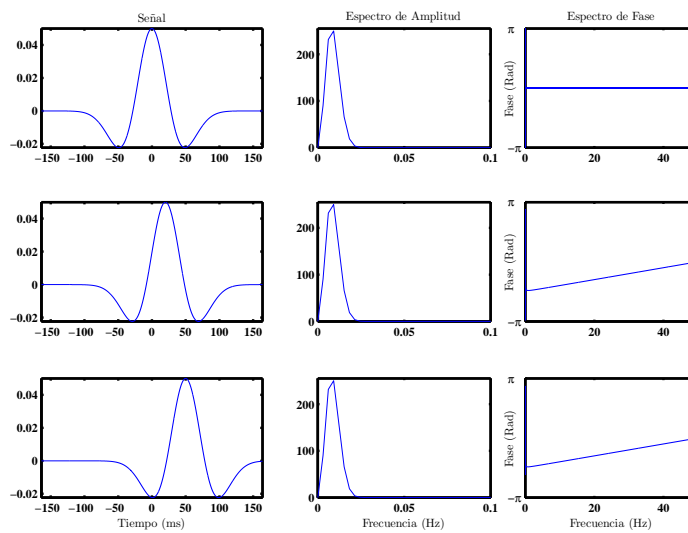


Figura 2.10: Ondícula de fase cero se presenta desplazamiento en tiempo, la pendiente del ángulo de fase está relacionada con el desplazamiento en tiempo. Fuente: Autor.

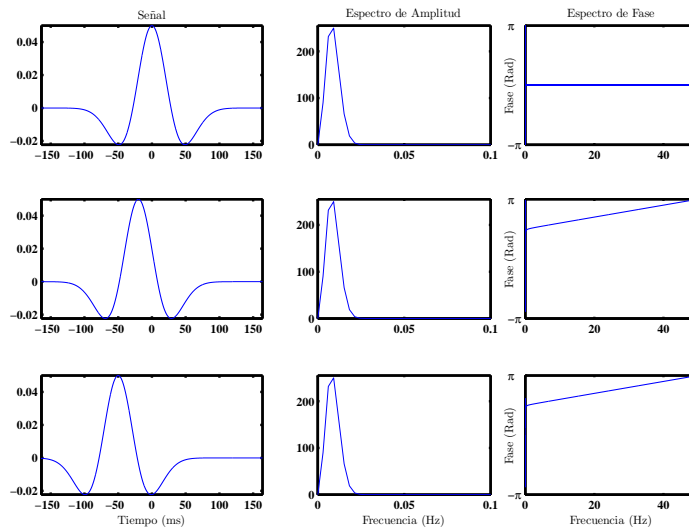


Figura 2.11: Ondícula de fase cero se observa desplazamiento en tiempo, la pendiente del ángulo de fase está relacionada con el desplazamiento en tiempo. Fuente: Autor.

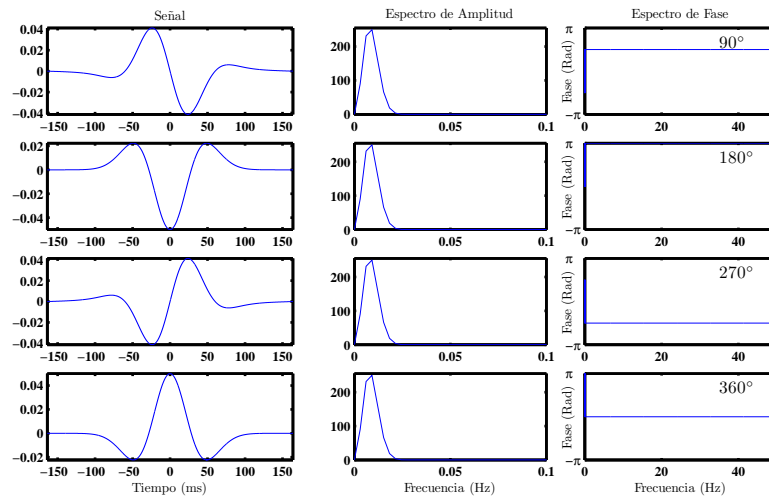


Figura 2.12: La misma ondícula de la Figura 2.10 pero con un desplazamiento en fase de 90° que convierte a la ondícula en una señal antisimétrica, mientras en todos los casos analizados el espectro de amplitudes permanece invariante. Fuente: Autor.

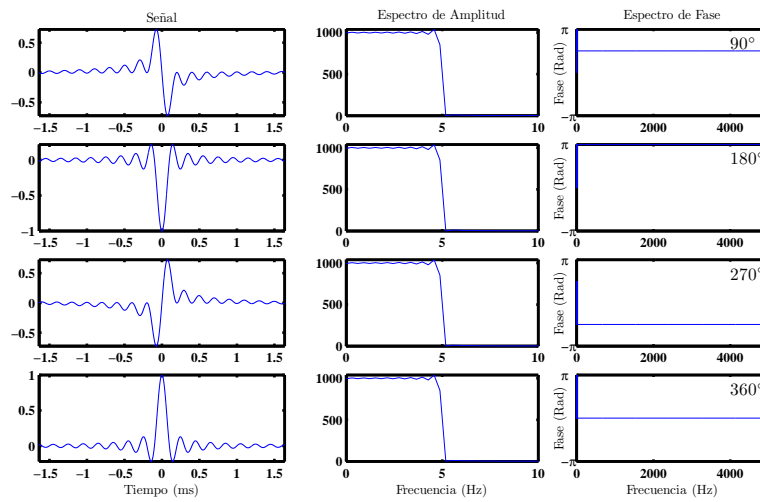


Figura 2.13: Ondícula de fase cero creada con la función $\text{sinc}(x)$, la ondícula es desplazada en su ángulo de fase en 90° donde es deformada, en 180° es invertida en el eje horizontal, en 270° es deformada en sentido contrario desplazamiento de 90° , y en 360° la ondícula permanece invariante. Fuente: Autor.

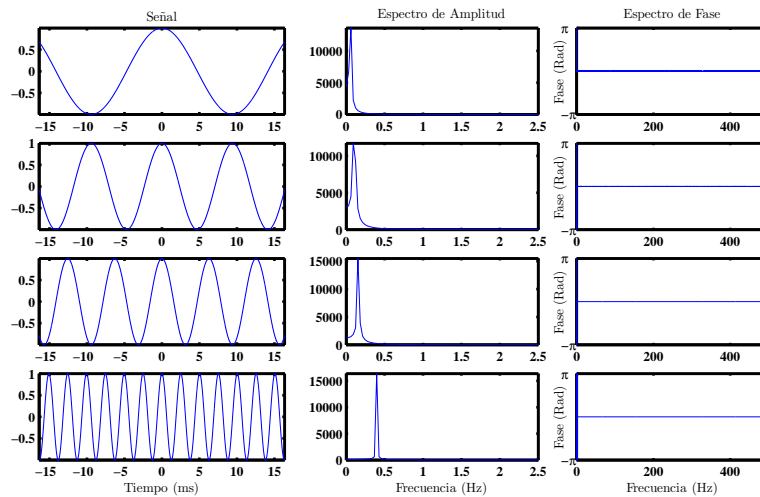


Figura 2.14: Onda coseno con desplazamiento en frecuencia, se puede apreciar que cuando el periodo disminuye la frecuencia característica avanza hacia la alta frecuencia, mientras que el ángulo de fase no se modifica. Fuente: Autor.

2.3.4.1 Propiedades de la Transformada de Fourier

Las operaciones matemáticas, tales como adición, escalamiento, multiplicación y desplazamiento, tienen su correspondiente en el dominio de la frecuencia, estas relaciones son llamadas propiedades de la transformada de Fourier. Estas propiedades se pueden ver en la Tabla (2.1)

Operación	Tiempo	Frecuencia
Desplazamiento	$f(t - \tau)$	$F(\omega)e^{-i\omega\tau}$
Escalamiento	$f(at)$	$\frac{1}{ a }F(\omega)$
Diferenciación	$\frac{df(t)}{dt}$	$i\omega F(\omega)$
Integración	$\int f(t)dt$	$\frac{1}{i\omega}F(\omega)$
Adición	$f(t) + g(t)$	$F(\omega) + G(\omega)$
Multiplicación	$f(t)g(t)$	$F(\omega) * G(\omega)$
Convolución	$f(t) * g(t)$	$F(\omega) \cdot G(\omega)$
Correlación	$f(t) \star g(t)$	$F(\omega) \cdot G(\omega)^\dagger$

Tabla 2.1: Propiedades de la transformada de Fourier.

2.3.4.2 Convolución

La convolución es una operación que permite combinar dos señales para formar una tercera. Es la técnica más importante del procesamiento de señales. Usando la estrategia de la descomposición del impulso, los sistemas son descritos por una señal llamada la respuesta al impulso unitario. La convolución es importante porque relaciona las tres señales de interés: la señal de entrada, la señal de salida, y la respuesta al impulso unitario.

La convolución en el dominio de la frecuencia es el producto de las transformadas de Fourier de las funciones o señales a convolucionar. A continuación, se presenta la deducción matemática del teorema de la convolución.

Siendo dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, la convolución de estas funciones es

$$f(t) * g(t) \iff F(\omega) \cdot G(\omega), \quad (2.37)$$

las transformadas de Fourier de las funciones f y g están dadas por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt,$$

y

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t} dt,$$

entonces la multiplicación de estas dos funciones resulta

$$F(\omega)G(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1)e^{i\omega t_1} dt_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t_2)e^{i\omega t_2} dt_2 \right),$$

agrupando términos se tiene que

$$F(\omega)G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1)f(t_2)e^{i\omega(t_1+t_2)} dt_1 dt_2,$$

aplicando la transformada inversa a la expresión anterior

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F \cdot G) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2 [\delta(t - t_2 - t_1)];$$

para obtener la ecuación anterior se usó la propiedad de escalamiento (Tabla 2.1)

$$\delta(bt) = \frac{1}{|b|} \delta(t),$$

entonces

$$\delta(t_2 + t_1 - t) = \delta(-(t - t_2 - t_1)) = \frac{1}{|-1|} \delta(t - t_2 - t_1) = \delta(t - t_2 - t_1).$$

Agrupando términos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F \cdot G) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) f(t_2) [\delta(t - t_2 - t_1)] dt_1 dt_2,$$

se puede reordenar esta integral de la siguiente forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F \cdot G) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) \delta(t - t_2 - t_1) dt_1 \right] dt_2,$$

resolviendo la integral que se encuentra entre los paréntesis cuadrados resulta que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F \cdot G) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_2) g(t - t_2) dt_2,$$

haciendo $t_2 = \tau$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F \cdot G) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

llamando

$$Y(\omega) = F(\omega) G(\omega),$$

se tiene que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i\omega t} d\omega;$$

como consecuencia

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Esta ecuación representa la forma explícita de la convolución en tiempo, y también puede expresarse de la siguiente forma:

$$y(t) = f(t) * g(t). \tag{2.38}$$

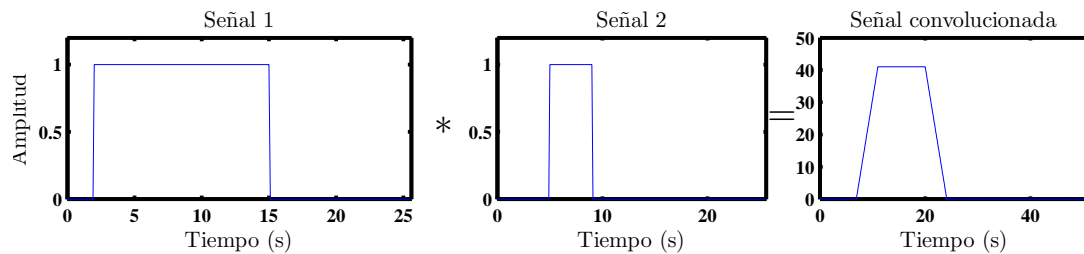


Figura 2.15: Convolución de dos funciones caja. Fuente: Autor.

2.3.4.3 Deconvolución

La deconvolución es la operación inversa de la convolución. La deconvolución en el dominio de la frecuencia es una simple división de señales.

Sea

$$y(t) = f(t) * g(t),$$

entonces,

$$Y(\omega) = F(\omega)G(\omega),$$

por lo tanto

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{G(\omega)}, \tag{2.39}$$

esto se puede definir como un cociente espectral.

2.3.5 Transformada discreta de Fourier

En el procesamiento de señales es común manejar funciones discretas en lugar de funciones continuas. Es por ello que se deben definir las operaciones para trabajar con funciones discretas, tal como es el caso de la transformada de Fourier.

Dada la transformada de Fourier $G(\omega)$ de una función $g(t)$, se puede desarrollar la transformada discreta de Fourier.

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t} dt,$$

como la integral, en su forma discreta, representa una suma de áreas, entonces se puede escribir la transformada de Fourier de la función $g(t)$ de la siguiente manera

$$G(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(t_n) e^{i\omega t}, \quad (2.40)$$

puesto que $\omega = 2\pi f$ y $f = k\Delta f$, siendo $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, N es el número total de puntos y $t = n\Delta t$, siendo $n\Delta t$ la n -ésima muestra en el dominio del tiempo. Como $\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}$; por lo tanto, sustituyendo esta igualdad en la ecuación (2.40) se tiene que

$$G(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(t_n) e^{2\pi\left(\frac{k}{N\Delta t}\right)(n\Delta t)},$$

simplificando términos

$$G(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(t_n) e^{\frac{i2\pi kn}{N}}, \quad (2.41)$$

se obtiene la ecuación que representa la transformada de Fourier discreta. La transfor-

mada inversa de Fourier discreta tiene la forma

$$g(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(\omega_k) e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}. \quad (2.42)$$

Por medio del valor absoluto de la transformada discreta de Fourier de la función, $(|G(\omega_k)|)$, se genera el espectro o la gráfica del contenido de frecuencias de la función $g(t_n)$. Comúnmente se realiza la transformada de Fourier discreta mediante el algoritmo desarrollado por James W. Cooley y John W. Tukey (1965). Este algoritmo permite efectuar la transformación de una señal al dominio de la frecuencia con mejor eficacia en el procesamiento de señales digitales; y es conocido como la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés).

§2.4 Teorema del muestreo

En la conversión de datos analógicos a formato digital, se reemplaza la señal continua por una serie de valores a intervalos fijos. En este procedimiento parecería que se pierde información porque se descartan los datos entre los instantes de muestreo. El teorema del muestro uniforme en el dominio del tiempo, establece que si una función en el dominio del tiempo, $f(t)$, no contiene frecuencias superiores a f_M ciclos por segundo, entonces $f(t)$ se puede determinar por completo mediante sus valores separados por intervalos uniformes menores a $\frac{1}{2f_M}$ segundos.

Por lo anterior, el intervalo máximo de muestreo es de

$$f_{Nyquist} = \frac{1}{2\Delta t}, \quad (2.43)$$

y se denomina a veces intervalo o *frecuencia de Nyquist*.

El teorema del muestreo indica que una señal continua puede ser muestreada co-

rectamente, si el intervalo de muestreo en tiempo es tal que se cumple con la ecuación (2.43). Cuando el intervalo de muestreo en tiempo es tal que da lugar a frecuencias mayores a la frecuencia de Nyquist, se producen traslapes en el espectro de frecuencias. A continuación se describe este problema conocido como *aliasing*.

§2.5 Aliasing

Una función $f(t)$ que es digitalizada en un intervalo de muestreo Δt está muestreada en los intervalos $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$. Si los datos registrados contienen frecuencias más altas que $f_{Nyquist}$, por ejemplo f_H , entonces el aliasing ocurre debido a que el muestreo de los datos es elegido de forma incorrecta, tal que

$$\Delta t > \frac{1}{2f_{Nyquist}}.$$

El aliasing presente puede causar dos problemas:

1. Amplitudes de las frecuencias mayores $1/2\Delta t$ no serán recobradas.
2. Amplitudes de las frecuencias entre $2f_{Nyquist} - f_H$ serán incorrectas debido al aliasing.

Por lo tanto, se puede definir *aliasing* como el corrimiento de la frecuencia debido a un mal muestreo de los datos (Figura 2.16), para prevenirlo es necesario elegir el muestreo mínimo que se puede usar. Como este muestreo mínimo permite la recuperación completa de la forma de onda, se puede concluir que nada se gana usando un muestreo más fino.

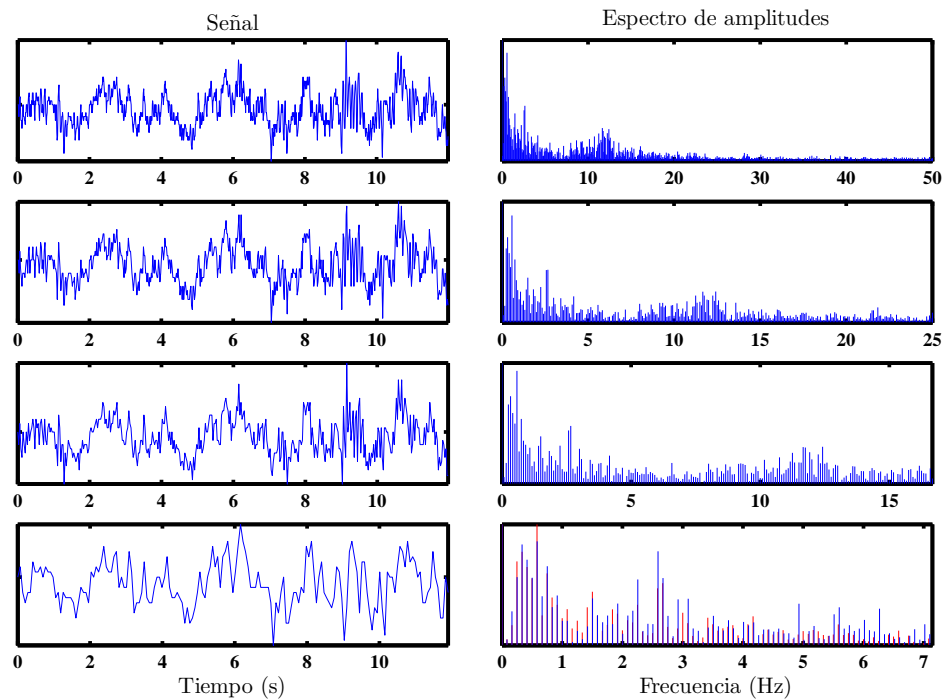


Figura 2.16: Serie de tiempo muestreada a intervalos de tiempo variados: a) $\Delta t=0.01$ s, b) $\Delta t=0.02$ s, c) $\Delta t=0.03$ s y d) $\Delta t=0.07$ s; siendo (a) el intervalo de muestreo original. Al lado izquierdo de cada señal se muestra su espectro de amplitudes, donde se aprecia que el muestreo incorrecto de la señal ocasiona la pérdida de información y la en el caso de (c) la presencia de aliasing. Fuente: Autor.

§2.6 Filtrado de señales

El término *señal* se usa para denotar cualquier evento en el registro sísmico del cual se desea obtener información. Todo lo demás es *ruido*, incluyendo eventos coherentes que interfieren con la observación y medición de las señales. La relación entre señal y ruido, abreviada como S/R , es la relación de la energía de señal en una porción específica del registro y la energía total del ruido en la misma porción.

La relación señal/ruido generalmente depende de la frecuencia. Si el ruido presenta

energía apreciable fuera del rango de frecuencias de la señal, el filtrado en frecuencia se usa ventajosamente. Sin embargo, si el espectro del ruido se superpone con el espectro de la señal, entonces, el filtrado en frecuencia tiene un valor limitado para mejorar la calidad del registro. El ruido se puede cancelar, si se cuenta con varios registros de eventos diferentes, sumando los registros sísmicos. En la exploración sísmica la suma de registros sísmicos se denomina *apilamiento*.

Mientras que los instrumentos analógicos representan la señal por medio de un voltaje (u otra cantidad) que varía con el tiempo, el registro digital representa la señal por medio de una serie de números que denotan valores medidos a intervalos regulares, por lo general, 2 o 4 ms. El registro digital presenta ventajas con respecto al registro analógico ya que el procesamiento de la señal se puede realizar con mayor eficacia y no se distorsiona la señal.

Los filtros son dispositivos que permiten eliminar información basada en algún discriminante medible. Comúnmente, el discriminante es la frecuencia y el filtro altera los espectros de amplitud y de fase.

Un filtro es estable si la salida es finita para cualquier entrada finita. Un filtro $f(t)$ será estable siempre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty, \quad (2.44)$$

esto requiere que $f(t)$ es finita en todas partes y tiende a cero cuando t tiende a $\pm\infty$ (Treitel y Robinson, 1964).

2.6.1 Filtrado en frecuencia

Los filtros en frecuencia se clasifican en *pasa bajas* (Figura 2.17), *pasa altas* (Figura 2.18) y *pasa bandas* (Figura 2.19), también llamados *filtros Notch*; según discriminen frecuencias mayores o menores que cierta frecuencia limitante o fuera de una banda de

frecuencias dada.

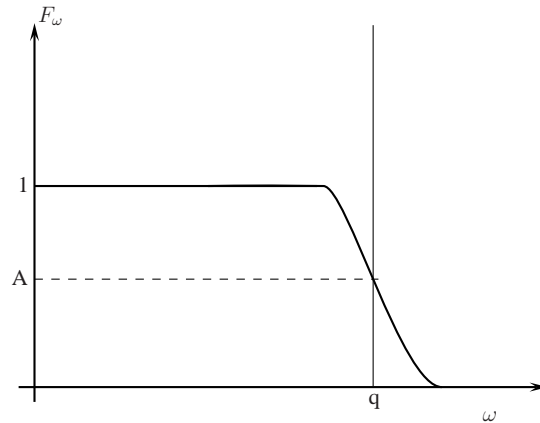


Figura 2.17: Espectro de amplitud de un típico filtro pasa bajas, donde q representa la frecuencia de corte y A es un valor definido por el filtro y representa el punto medio de la amplitud del filtro. Fuente: Autor.

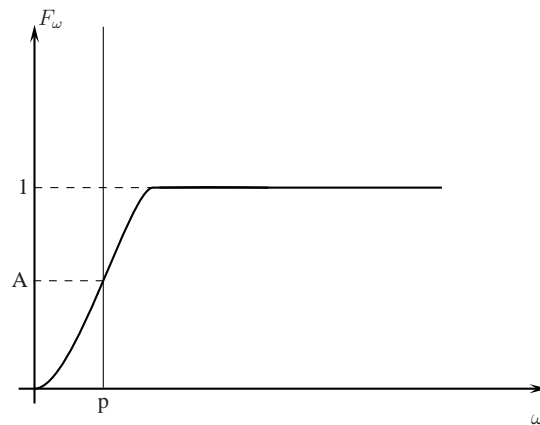


Figura 2.18: Espectro de amplitud de un típico filtro pasa alta, donde p representa la frecuencia de corte y A es un valor definido por el filtro y representa el punto medio de la amplitud del filtro. Fuente: Autor.

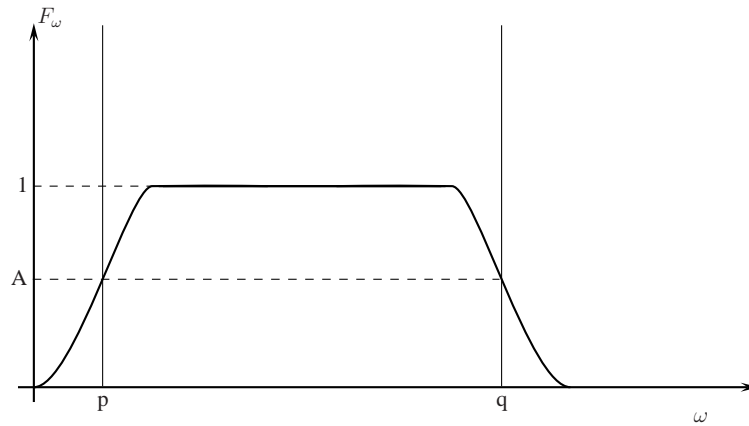


Figura 2.19: Espectro de amplitud de un típico filtro pasa bandas, donde p y q representan las frecuencias de corte y A es un valor definido por el filtro y representa el punto medio de la amplitud del filtro. Fuente: Autor.

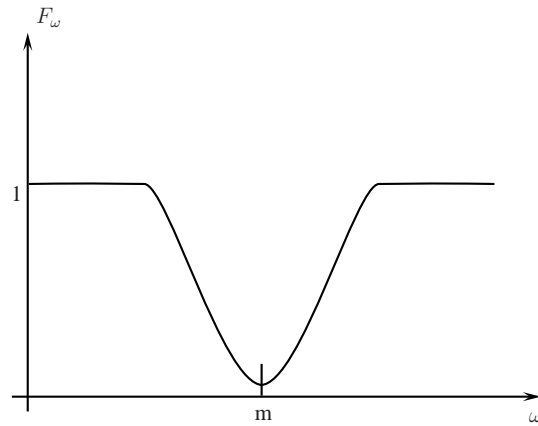


Figura 2.20: Espectro de amplitud de un filtro notch, donde m representa la frecuencia notch o la frecuencia de rechazo. Fuente: Autor.

El filtrado de una señal en el dominio de la frecuencia consiste en la convolución del espectro de amplitud de un filtro seleccionado con la transformada de Fourier de la señal que va a ser filtrada.

2.6.2 Filtro Butterworth

EL filtro de Butterworth es una forma común de filtro pasa bajas; se puede definir por

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}, \quad (2.45)$$

donde ω_c es la frecuencia de “corte” y n determina el orden del mismo.

2.6.3 Ventanas

Con frecuencia se desea seleccionar una parte de una señal para su estudio, lo cual se pueden lograr multiplicando la señal o transformada por medio de una *ventana* o *puerta*, que es una función que varía de forma conveniente dentro de un intervalo y que es cero fuera de éste, tal como sucede con el filtrado en el dominio de la frecuencia.

Las ventanas son señales de longitud finita que se utilizan para manipular señales en intervalos de tiempo; por ejemplo, la selección de una ventana de un registro sísmico se utiliza para varias formas de análisis, tanto en el dominio de tiempo como en el dominio de la frecuencia. El término “ventana” se usa para indicar simplemente un intervalo de tiempo, sobre todo uno en que los datos se pueden registrar libres de interferencia por ruido como el de una onda superficial.

El uso de una ventana en el dominio del tiempo es una forma de filtrado de frecuencia, esto se explica debido a que la transformada de la ventana se distorsiona tanto en amplitud como en fase. Ventanas con un corte muy pronunciado producen oscilaciones en el dominio de la frecuencia, sin embargo, estas producen una mayor resolución en frecuencia que las ventanas con un corte suavizado.

Ecuación de onda

UNA vibración mecánica es un movimiento que se repite periódicamente con el tiempo; cuando se trata de una partícula o un sistema de partículas, es un movimiento que oscila alrededor de una posición de equilibrio.

Una vibración mecánica se produce por la acción de dos clases de fuerzas, las cuales pueden ser inherentes al sistema o externas al mismo. Tales fuerzas son las siguientes:

- Una fuerza perturbadora o excitadora que desplaza la partícula o al cuerpo desde su posición de equilibrio.
- Una fuerza restauradora que tiende a regresar al cuerpo o sistema a su posición de equilibrio.

Un sistema sometido a vibraciones mecánicas, esquemáticamente, se representa mediante un resorte, cuya constante de elasticidad es k , el cual tiene en su extremo libre un bloque de masa m . El sistema masa-resorte, es sometido a una fuerza excitadora, la cual provoca un desplazamiento del bloque alrededor de su posición de equilibrio.

§3.1 Deformación

La deformación, que es un cambio de forma o de dimensiones, generalmente es proporcional al esfuerzo que la produce, como se enuncia en la ley de Hooke. Sean dos partículas P y Q , donde la ubicación de P está definida por el vector de posición \mathbf{x} , y Q está situado en la vecindad de P ; al aplicar una fuerza el medio se deforma y las partículas P y Q cambian de posición, como se ilustra en la Figura 3.1.

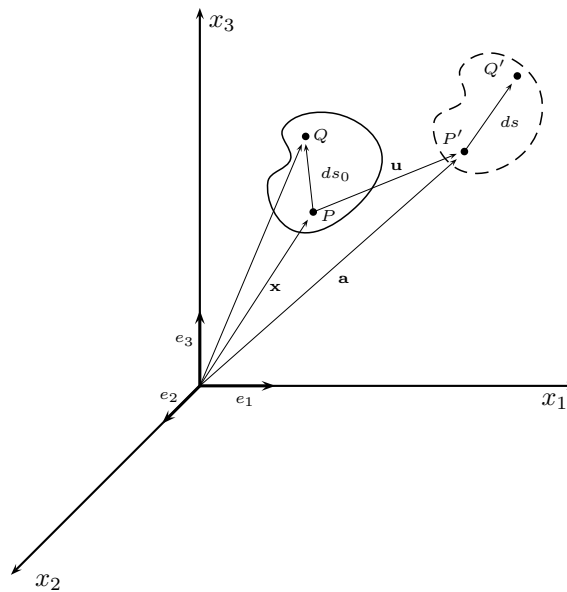


Figura 3.1: Medio continuo deformable. Fuente: Autor.

Las distancias ds_0 y ds están dadas por

$$(ds_0)^2 = dx_i dx_i, \tag{3.1}$$

y

$$(ds)^2 = da_i da_i; \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{3.2}$$

Sea

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

entonces

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.4)$$

esta ecuación contiene información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo t , de todas las partículas en el entorno diferencial de P , identificada por sus coordenadas iniciales \mathbf{x} .

Puesto que \mathbf{u} es la distancia entre P y P' , entonces

$$u_i = a_i - x_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.5)$$

y por lo tanto

$$a_i = x_i + u_i, \quad (3.6)$$

con lo cual, la ecuación (3.4) queda de la siguiente forma

$$da_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j, \quad (3.7)$$

considerando la diferencia

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = da_i da_i - dx_i dx_i, \quad (3.8)$$

por lo que

$$da_i da_i = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\delta_{il} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) dx_k dx_l,$$

desarrollando la multiplicación se tiene

$$da_i da_i = \left(\delta_{kl} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) dx_k dx_l,$$

ordenado los términos de forma conveniente resulta que

$$da_i da_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j; \quad (3.9)$$

por otra parte

$$dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j; \quad (3.10)$$

por lo tanto, sustituyendo (3.9) y (3.10) en (3.8) se tiene que

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j, \quad (3.11)$$

donde

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.12)$$

A la ecuación (3.12) se le conoce como el tensor de deformación de Green. Éste caracteriza el cambio de longitudes en un medio. De la ecuación (3.12), se puede deducir que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.13)$$

y que es llamado tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy.

El desplazamiento de P a P' es definido como

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(P),$$

y el desplazamiento del punto Q a la posición Q' se puede denotar de la siguiente manera

$$u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) = u_i(Q).$$

Desarrollando en serie de Taylor $u_i(Q)$ se tiene que

$$u_i(Q) = u_i(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j + \dots;$$

despreciando términos de orden superior, se deduce que

$$u_i(Q) = u_i(P) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_P dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_P dx_j.$$

Es claro que el primer término representa una traslación de cuerpo rígido; en el segundo término se identifica el tensor de deformación que caracteriza cambios de longitud: el tercer término caracteriza la rotación de las partículas (Figura 3.2). Al tensor

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{3.14}$$

se le llama tensor de rotación. Debe notarse que ε_{ij} es un tensor simétrico y que ω_{ij} es antisimétrico.

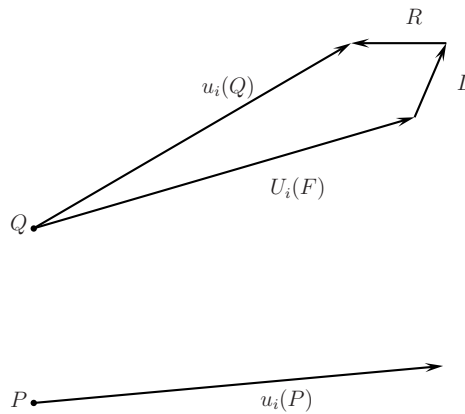


Figura 3.2: Representación esquemática de los componentes de $u_i(Q)$. Las letras L y R indican las contribuciones de los cambios de longitud y la rotación, respectivamente. Fuente: Autor.

§3.2 Tensor de esfuerzo

Considerando un cuerpo sometido a fuerzas externas como se muestra en la Figura 3.3. Supóngase que hipotéticamente se hace un corte como se muestra en la misma figura. La acción de la región 2 sobre la región 1 puede considerarse como una distribución continua de fuerzas. Definiendo el vector de tracción en el punto P , como

$$t_i^{(\bar{n})} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A}, \quad (3.15)$$

donde ΔA es el elemento de área con una orientación dada por n_j , ΔF_i es el vector de fuerza resultante que actúa sobre el elemento ΔA . Claramente se ve que $t_1^{\bar{n}}$ depende de la orientación del vector normal n_j del elemento de área.

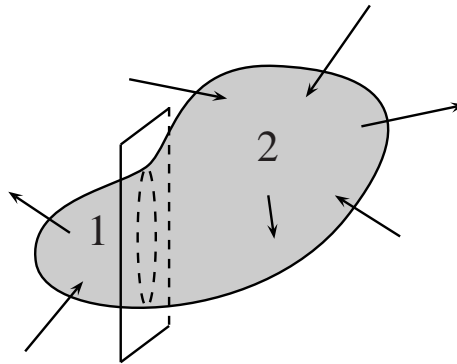


Figura 3.3: Cuerpo sometido a fuerzas externas. Fuente: Autor.

Suponiendo que n_j coincide con la dirección del eje x_1 . Así el vector t_1 tendrá, en general, componentes en las direcciones de x_1 , x_2 , y x_3 , que serán normal y tangenciales a la superficie en estudio. Usualmente se denotan mediante

$$t_1^{\bar{e}_1} = \sigma_{11}; \quad t_2^{\bar{e}_1} = \sigma_{12}; \quad t_3^{\bar{e}_1} = \sigma_{13}. \quad (3.16)$$

El primer índice del tensor σ indica la dirección del vector normal y el segundo indica la dirección en la que actúa el componente del vector de tracción.

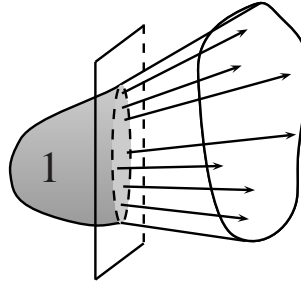


Figura 3.4: Cuerpo sometido a fuerzas externas. Fuente: Autor.

En la Figura 3.5, se muestran componentes positivos de los esfuerzos. En las caras opuestas los esfuerzos tienen sentidos contrarios a los mostrados. Las nueve componentes introducidas son componentes del tensor de esfuerzo. Se puede demostrar mediante una construcción aritmética sencilla que

$$t_i^{\bar{n}} = \sigma_{ki} n_k, \quad (3.17)$$

que es conocida como *fórmula de Cauchy*.

§3.3 Ley de Hooke generalizada

La ley de Hooke para problemas unidimensionales supone la proporcionalidad entre el esfuerzo, σ , y la deformación, ε , a través de la constante de proporcionalidad denominada módulo de elasticidad E . De manera general la linealidad puede introducirse como relación entre los tensores de esfuerzo y deformación mediante

$$\sigma_{ijkl} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.18)$$

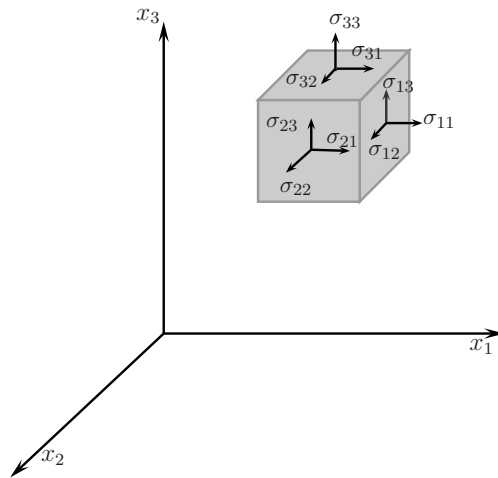


Figura 3.5: Estado general de esfuerzos en un elemento. Fuente: Autor.

que constituye la ecuación constitutiva para un material elástico lineal, donde \mathbf{c}_{ijkl} es el tensor de cuarto orden denominado *tensor de constantes elásticas*, que en principio tiene 81 componentes. Sin embargo, debido a la simetría de σ_{ij} y de ε_{kl} se puede expresar la relación lineal mediante 36 constantes. Mediante un balance de energía se puede demostrar que son 21 las constantes independientes.

Si se acepta que el sólido es isótropo, esto es con propiedades independientes de la dirección, la ecuación será invariable con respecto al cambio de coordenadas. Esto es

$$\sigma'_{mn} = c_{mnpq} \varepsilon'_{pq}, \tag{3.19}$$

esto implica

$$c_{mnpq} = \beta_{mi} \beta_{nj} \beta_{pk} \beta_{ql} c_{ijkl}, \tag{3.20}$$

que es la definición de un tensor isótropo. Tal tensor es de la forma

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \tag{3.21}$$

con sólo dos constantes independientes, μ y λ , llamadas constantes de Lamé.

La ley de Hooke, entonces adquiere la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

si $i = j$, entonces

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{ii},$$

por lo que

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij},$$

o bien

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij}, \quad (3.22)$$

donde E es el módulo de Young y ν es el módulo de Poisson, que en términos de las constantes de Lamé se pueden definir como:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (3.23)$$

y

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.24)$$

Las relaciones inversas son:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.25)$$

y

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.26)$$

La constante μ es el módulo de elasticidad en cortante, el cual puede representarse

también con la letra G .

3.3.1 Comportamiento Elástico

Para escalas de tiempo cortas (menores que 10^5 s), el comportamiento mecánico de las rocas es descrito por la teoría de la elasticidad. Esto es cierto sólo si las condiciones de temperatura, presión, y esfuerzo son “moderadas”. Además, las deformaciones deben ser pequeñas. Una onda elástica de amplitud extremadamente pequeña ofrece un ejemplo de un comportamiento elástico casi ideal.

Es usual considerar dos condiciones de esfuerzo básicas:

1. Presión hidrostática descrita por $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$,
2. Esfuerzo cortante con sólo σ_{xy} (ó σ_{yz} , ó σ_{xz}) diferente de cero.

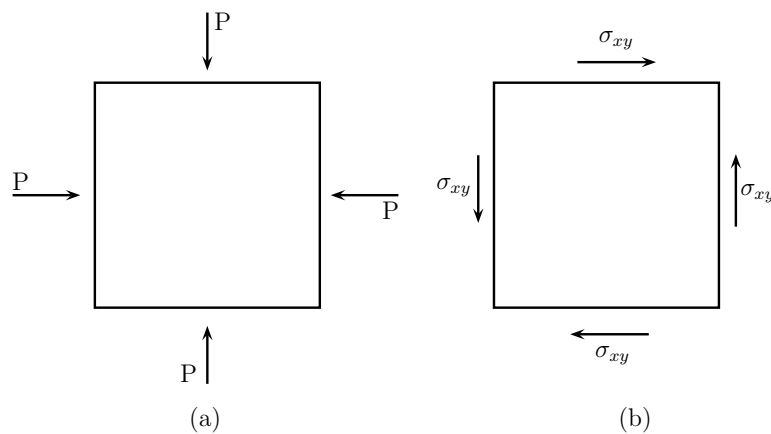


Figura 3.6: (a) Compresión hidrostática, (b) cortante puro. Fuente: Autor.

En el primer caso, la deformación es simplemente un cambio de volumen (descrita por ε_{kk}) y en el segundo caso existe un cambio en el ángulo descrito por ε_{ij} . La suposición básica de la teoría de la elasticidad es que las deformaciones son proporcionales a

los esfuerzos y que estas son reversibles (si los esfuerzos se retiran, las deformaciones desaparecen). La ley de Hooke es válida si se cumple esta suposición. Rescribiendo la ley de Hooke, se tiene que

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{M}, \quad (3.27)$$

donde M es un modulo elástico, característico de los sólidos y tiene unidades de presión. Para los dos estados de esfuerzo, existen dos módulos distintos:

1. para compresión hidrostática: $\varepsilon = \frac{\sigma_{kk}}{3K}$ donde $M = 3K$,
2. para deformación por cortante (con $i \neq j$): $\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu}$, donde $M = 2\mu$.

Siendo K el módulo volumétrico; $-\frac{\sigma_{kk}}{3}$ es la presión promedio y $K = \chi^{-1}$, donde $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$ es el coeficiente de compresibilidad. La compresibilidad es una medida del cambio fraccional del volumen $\frac{\Delta V}{V}$ cuando la presión se incrementa.

Los módulos elásticos son medidos usando cualquier experimento de compresión. El módulo volumétrico es obtenido a través de experimentos de compresión isotrópica. Sin embargo, la prueba más simple corresponde a la compresión uniaxial; por lo tanto, el módulo medido frecuentemente es el módulo de Young E que es obtenido en un régimen estático. Por definición, $\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$; en la misma prueba de compresión uniaxial, se define la relación de Poisson ν a través de $\varepsilon = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$. La relación de Poisson y el módulo de Young, se pueden expresar en función de K y de μ , como se muestra a continuación

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}, \quad (3.28)$$

y para K

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.29)$$

§3.4 Ecuaciones de movimiento

Considérese una región aislada $V + S$ (Figura 3.7), donde S es la frontera de V . La superficie S estará sujeta a tracciones distribuidas $\bar{t}(\bar{x}, t)$. Supóngase, además que existe una distribución de fuerzas de cuerpo por unidad de masa, dada por $\bar{f}(\underline{x}, t)$. La segunda ley de Newton establece que la razón de cambio del *momentum* (o cantidad de movimiento) lineal es igual a la resultante de las fuerzas aplicadas, y que la razón de cambio del momento del momentum con respecto al origen del sistema coordenado es igual al momento resultante de las fuerzas aplicadas con respecto al mismo origen. Así, considerando el momentum lineal se tiene que

$$\int_S t_i^{\bar{n}} dS + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i dV, \tag{3.30}$$

de la ecuación (3.17) se puede establecer que

$$\int_S \sigma_{ki} n_k dS + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i dV. \tag{3.31}$$

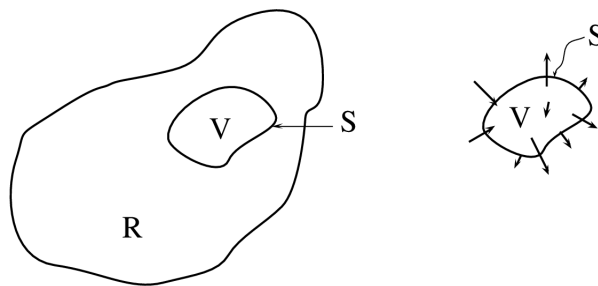


Figura 3.7: Cuerpo sometido a fuerzas de tracción. Fuente: Autor.

De acuerdo con el teorema de Gauss

$$\int_S \sigma_{ki} n_k dS = \int_V \sigma_{ki,k} dV. \quad (3.32)$$

Entonces

$$\int_S (\sigma_{ki,k} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i) dV = 0, \quad (3.33)$$

y como V es una región cualquiera del campo. Se tiene que, si el integrando es continuo, entonces

$$\sigma_{ki,k} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3.34)$$

que se conoce como la primera ley de movimiento de Cauchy. Alternativamente la ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (3.35)$$

§3.5 Ondas P y ondas S

Considérese una onda compresional que viaja en dirección positiva del eje x . Entonces, el campo de desplazamientos está definido por $u_x(x, t) = e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}$; donde c es la velocidad de propagación. Se puede obtener la ecuación de equilibrio dinámico partiendo de la ecuación (3.35), y asumiendo que todas las fuerzas de cuerpo son cero

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (3.36)$$

utilizando la ecuación (3.22), se puede establecer que

$$E\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (3.37)$$

Como $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$ y por simetría $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$, entonces

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{xx}. \quad (3.38)$$

Combinando las ecuaciones (3.37) y (3.38), se tiene que

$$E\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \frac{2\nu^2}{1 - \nu} \sigma_{xx} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \sigma_{xx}. \quad (3.39)$$

Como consecuencia

$$\left[\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (3.40)$$

Esta expresión representa la ecuación que gobierna la propagación de ondas compresionales con movimiento unidimensional (en dirección del eje x). La velocidad de propagación está definida por $\alpha = \left[\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho} \right]^{1/2}$. Sustituyendo K y μ en la ecuación correspondiente a la velocidad (α), se tiene que

$$\alpha = \sqrt{\frac{K + \frac{3}{4}\mu}{\rho}}. \quad (3.41)$$

Considerando la deformación producida por esfuerzos cortantes. Si $u_y(x, t)$ es el campo de desplazamientos, entonces

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$

De la ecuación anterior, se puede establecer que la expresión que gobierna la propa-

gación de ondas de corte (ondas SH) es

$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \quad (3.42)$$

la velocidad de las ondas de cizalla está dada por la siguiente expresión

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (3.43)$$

§3.6 Solución de d'Alembert

El principio de d'Alembert, enunciado por Jean d'Alembert en su obra maestra, *Traité de dynamique*, establece que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y las denominadas fuerzas de inercia forman un sistema de fuerzas en equilibrio. A este equilibrio, se le denomina equilibrio dinámico.

Partiendo de la ecuación (3.42), y efectuando los cambios de variables que se presentan a continuación

$$\gamma = x - \beta t, \quad (3.44)$$

y

$$\eta = x + \beta t; \quad (3.45)$$

considerando que $S = f(\gamma, \eta)$, $\gamma = g(x, t)$ y $\eta = h(x, t)$, donde f , g y h son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + \frac{\partial S}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right),$$

simplificando términos

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \gamma} + \frac{\partial S}{\partial \eta},$$

derivando la ecuación anterior con respecto a x

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial S}{\partial \gamma} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial S}{\partial \gamma} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

simplificando la ecuación anterior

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial \gamma^2} + \frac{2\partial^2 S}{\partial \gamma \partial \eta} + \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2}, \quad (3.46)$$

derivando la función $S = f(\gamma, \eta)$ con respecto a t , se observa que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) + \frac{\partial S}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right),$$

la derivada parcial de $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ es igual a $-\beta$ y la derivada parcial $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ es igual a β , por lo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial \gamma} (-\beta) + \frac{\partial S}{\partial \eta} (\beta);$$

simplificando

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta \frac{\partial S}{\partial \gamma} + \beta \frac{\partial S}{\partial \eta},$$

derivando la ecuación anterior con respecto a t , se tiene que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\beta \frac{\partial S}{\partial \gamma} + \beta \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\beta \frac{\partial S}{\partial \gamma} + \beta \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

simplificando términos se tiene

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \beta^2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \gamma^2} - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial \eta \partial \gamma} + \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} \right), \quad (3.47)$$

sustituyendo (3.46) y (3.47) en (3.42) se obtiene

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \gamma^2} + \frac{2\partial^2 S}{\partial \gamma \partial \eta} + \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \gamma^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial \eta \partial \gamma} + \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} \right),$$

simplificando

$$4\frac{\partial^2 S}{\partial \eta \partial \gamma} = 0, \quad (3.48)$$

la ecuación anterior es la *forma canónica* de la ecuación de onda.

Integrando la ecuación (3.48) con respecto a γ

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \varphi(\eta);$$

integrando la ecuación anterior con respecto a η

$$S = \int \varphi(\eta) d\eta + q(\gamma).$$

Como $\int \varphi d\eta$ es sólo otra función de η , es posible sustituir esta integral por $p(\eta)$. Así,

$$S = p(\eta) + q(\gamma), \quad (3.49)$$

donde p y q deben tener segundas derivadas continuas.

Sustituyendo (3.44) y (3.45) en (3.49) se tiene que

$$S = p(x + \beta t) + q(x - \beta t). \quad (3.50)$$

La ecuación (3.50) se llama *solución de d'Alembert*, en honor del matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783).

La ecuación (3.50) también se puede representar de la siguiente forma

$$S = Ap \left(t - \frac{x}{\beta} \right) + Bq \left(t + \frac{x}{\beta} \right), \quad (3.51)$$

La función $p \left(t - \frac{x}{\beta} \right)$ representa una onda que viaja en dirección positiva del eje x , y $q \left(t + \frac{x}{\beta} \right)$ es una onda que viaja en la dirección negativa del eje x (Figura 3.8).

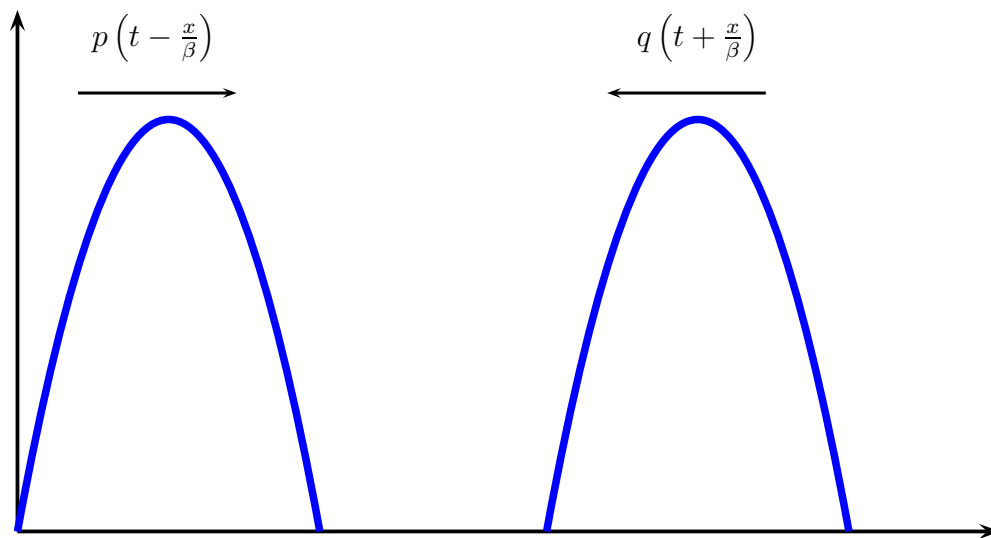


Figura 3.8: Representación esquemática de las ondas p y q . Fuente: Autor.

§3.7 Solución general de la ecuación de onda para el caso SH por separación de variables

La ecuación de onda para el caso SH está definida por la expresión (3.42), esta ecuación se puede resolver utilizando el método de separación de variables o método de Fourier; si la solución de esta ecuación es $S = S(z, t)$ y

$$S(z, t) = Z(z)T(t); \quad (3.52)$$

entonces, si se sustituye la ecuación (3.52) en (3.42) se obtiene

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} T = \frac{1}{\beta^2} Z \frac{d^2 T}{dt^2},$$

dividiendo la ecuación anterior entre ZT

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad (3.53)$$

el miembro izquierdo de la ecuación anterior únicamente depende de z , y el miembro derecho depende de t ; como consecuencia, ambos miembros deben de ser iguales a una constante, esto se muestra a continuación

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2, \quad (3.54)$$

donde

$$k = \frac{\omega}{\beta}, \quad (3.55)$$

por lo tanto, se tiene

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2, \quad (3.56)$$

y

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2, \quad (3.57)$$

multiplicando la ecuación (3.56) por Z resulta que

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0; \quad (3.58)$$

para resolver la ecuación anterior, se construye el polinomio característico, haciendo

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} \rightarrow m^2,$$

y

$$\frac{dZ}{dz} \rightarrow m;$$

como consecuencia la ecuación (3.58), se puede presentar de la siguiente forma

$$m^2 + k^2 = 0,$$

resolviendo este polinomio se obtiene que m : $m_1 = ik$ y $m_2 = -ik$.

Con estas raíces se construye la solución general para la ecuación (3.58), esta solución se presenta a continuación

$$Z = C_1 e^{-ikz} + C_2 e^{ikz}, \quad (3.59)$$

La solución general para la ecuación (3.57), se obtiene siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, ésta se muestra a continuación

$$T = C_3 e^{-ik\beta t} + C_4 e^{ik\beta t}, \quad (3.60)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.59) y (3.60) en (3.52) resulta

$$S = (C_1 e^{-ikz} + C_2 e^{ikz}) (C_3 e^{-ik\beta z} + C_4 e^{ik\beta z}),$$

desarrollando la multiplicación

$$S = (C_1 e^{-ikz} C_3 e^{-ik\beta z} + C_1 e^{-ikz} C_4 e^{ik\beta z} + C_2 e^{ikz} C_3 e^{-ik\beta z} + C_2 e^{ikz} C_4 e^{ik\beta z});$$

puesto que, la multiplicación de dos constantes desconocidas da como resultado una constante, se tiene que $C_1 C_3 = A$, $C_1 C_4 = B$, $C_2 C_3 = C$, $C_2 C_4 = D$; con lo que se

obtiene la solución general de la ecuación de onda para el caso de ondas de corte (SH);

$$S = Ae^{-i\omega\left(t+\frac{z}{\beta}\right)} + Be^{i\omega\left(t-\frac{z}{\beta}\right)} + Ce^{-i\omega\left(t-\frac{z}{\beta}\right)} + De^{i\omega\left(t+\frac{z}{\beta}\right)}. \quad (3.61)$$

De la ecuación (3.61), se puede establecer que dicha ecuación está compuesta de cuatro ondas: dos ascendentes y dos descendentes; los coeficientes de las ondas ascendentes son B y C.

§3.8 Atenuación de ondas elásticas

En materiales reales existen procesos de fricción interna que disipan en forma de calor parte de la energía ligada al movimiento. El fenómeno de atenuación suele estar relacionado con mecanismos no lineales pero es usual recurrir a la formulación de modelos lineales que aproximen las observaciones.

En teoría, los modelos viscoelásticos permiten modelar una gran variedad de problemas, su uso en la práctica es aún limitado pues se duda que puedan representar fenómenos de disipación no lineales.

Suele definirse la atenuación en términos del factor de calidad Q mediante

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{\Delta\mathcal{E}}{2\pi\mathcal{E}}, \quad (3.62)$$

donde \mathcal{E} es la energía asociada a un ciclo de oscilación con frecuencia ω y $-\Delta\mathcal{E}$ es la energía disipada por ciclo. Dado que para usar la ecuación (3.62), es necesario realizar mediciones extremadamente complejas, es común el uso de una expresión alternativa para definir la atenuación

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{1}{\pi} \frac{\Delta A}{A}, \quad (3.63)$$

donde A es la magnitud que se analiza. De acuerdo con la ecuación (3.63), la amplitud

después de n ciclos está dada por

$$A(t) = A_0 \left(1 - \frac{\pi}{Q}\right)^n, \quad (3.64)$$

y si $t = 2n\pi/\omega$, entonces

$$A(t) = A_0 \left(1 - \frac{\omega t}{2Q} \frac{1}{n}\right)^n, \quad (3.65)$$

y si $n \gg 1$ se tiene que

$$A(t) \rightarrow A_0 e^{-\frac{\omega t}{2Q}} \quad (3.66)$$

A este tipo de atenuación se le conoce como *atenuación temporal*. Considerando que

$$\Delta A = \frac{dA}{dx} \lambda, \quad (3.67)$$

donde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ es la longitud de onda; de las ecuaciones (3.63) y (3.67) se tiene que

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{\omega}{2cQ} A, \quad (3.68)$$

con solución

$$A = A_0 e^{-\frac{\omega x}{2cQ}}, \quad (3.69)$$

en este caso, la atenuación es de tipo *espacial*. Para modelar la atenuación, está se puede introducir en una onda, como la que se denota a continuación

$$u = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.70)$$

mediante la especificación de una frecuencia compleja en términos de Q_{temporal} o bien mediante el número de onda complejo en términos de Q_{espacial} . Esto es

$$\omega \rightarrow \omega - i \frac{|\omega|}{2Q}, \quad (3.71)$$

o bien

$$k \rightarrow k + i \frac{|k|}{2Q}. \quad (3.72)$$

Así, se tiene que para el caso de atenuación temporal

$$u = e^{-\frac{|\omega|t}{2Q}} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.73)$$

y para el caso de atenuación espacial

$$u = e^{-\frac{|k|x}{2Q}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3.74)$$

En este trabajo, en las ecuaciones que gobiernan los campos de desplazamientos se utiliza la atenuación espacial de ondas planas, introducida utilizando el modelo de Kelvin a través del número de onda k , como se muestra a continuación

$$k = \frac{\omega}{\beta} \left(1 - \frac{i}{2Q} \right). \quad (3.75)$$

Para una onda plana se tiene

$$u = u_0 e^{-i\omega t} e^{izk},$$

que representa una onda que viaja en dirección positiva del eje z , cuya amplitud se atenúa con la distancia.

§3.9 Transmisión y reflexión de Ondas SH

Suponiendo una onda que se propaga por un medio con una velocidad β_1 y con una densidad ρ_1 (Figura 3.9) golpea una interfaz con otro medio que tiene los parámetros

β_2 y ρ_2 .

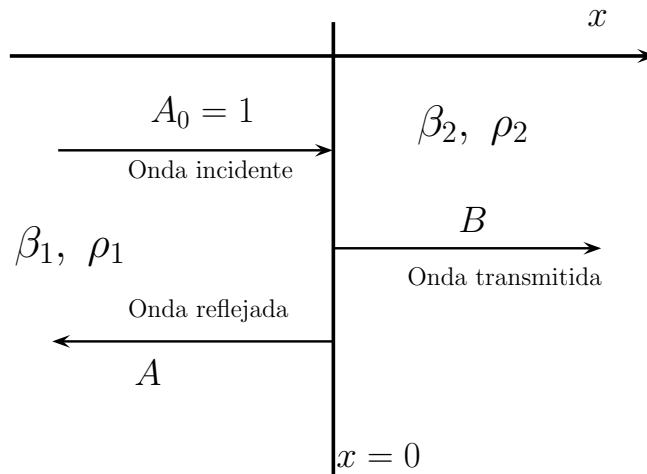


Figura 3.9: Transmisión y reflexión de una onda al pasar de un medio a otro. A_0 es la amplitud de la onda incidente; ρ y β corresponden a la densidad y velocidad de propagación para ondas *SH*, respectivamente. Los subíndices 1 y 2 denotan al medio 1 y 2, respectivamente. Fuente: Autor.

Los campos de ondas en ambos lados de la interfase se pueden representar como una superposición de ondas planas. Asumiendo que se conoce la amplitud de la onda incidente ($A_0 = 1$) en la interfase desde $-\infty$, las amplitudes de las otras ondas pueden ser determinadas por las condiciones de frontera (Figura 3.10). Considérense los campos de desplazamientos dados por

$$u_1 = e^{i\omega\left(t - \frac{x}{\beta_1}\right)} + Ae^{i\omega\left(t + \frac{x}{\beta_1}\right)}, \quad (3.76)$$

para el medio uno; puesto que, la *condición de radiación* dice que no pueden existir fuentes en $+\infty$, así que la única onda incidente es A_0 ; por lo tanto, el campo de desplazamientos para el medio dos está representado por

$$u_2 = Be^{i\omega\left(t - \frac{x}{\beta_2}\right)}, \quad (3.77)$$

donde A y B son los coeficientes de la onda reflejada y transmitida, respectivamente.

Para encontrar el valor de los coeficientes A y B , se utilizan las condiciones de frontera en la interfase ($x = 0$), donde los desplazamientos y los esfuerzos son iguales, es decir $u_1 = u_2$ y $\sigma_1 = \sigma_2$, dado que

$$\sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.78)$$

sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (3.76) se tiene

$$u_1 = e^{i\omega t} + Ae^{i\omega t}, \quad (3.79)$$

evaluando cuando $x = 0$ en la ecuación (3.77), resulta

$$u_2 = Be^{i\omega t} \quad (3.80)$$

como los desplazamientos son iguales en $x = 0$, se igualan las expresiones (3.79) y (3.80), con lo que se tiene

$$e^{i\omega t} + Ae^{i\omega t} = Be^{i\omega t},$$

factorizando la exponencial en el lado izquierdo de la igualdad, dividiendo ambos lados entre $e^{i\omega t}$ y simplificando la ecuación resulta

$$1 + A = B, \quad (3.81)$$

se puede ver que los coeficientes de las ondas reflejadas y transmitidas son independientes de la frecuencia, y por consecuencia las ondículas de las ondas reflejadas y transmitidas serán iguales que la ondícula de la onda incidente.

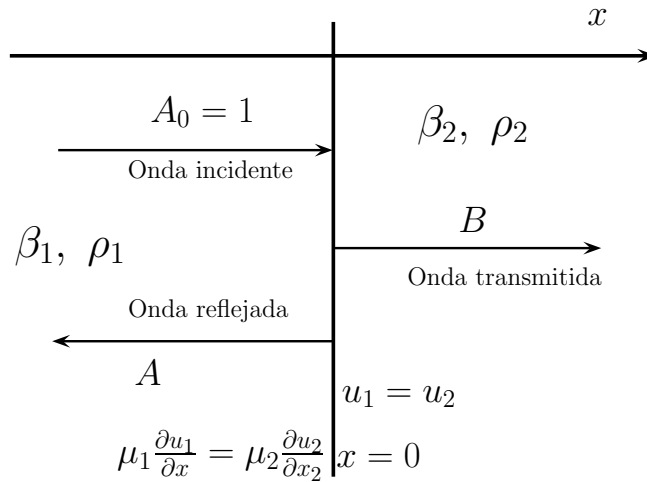


Figura 3.10: Condiciones de frontera; μ es el módulo de cortante. Fuente: Autor.

Sustituyendo la ecuación (3.76) en (3.78) y haciendo $\mu = \rho\beta^2$, se tiene

$$\rho_1\beta_1^2 \left(e^{i\omega\left(t-\frac{x}{\beta_1}\right)} \left(-\frac{i\omega}{\beta_1}\right) + Ae^{i\omega\left(t+\frac{x}{\beta_1}\right)} \left(\frac{i\omega}{\beta_1}\right) \right); \quad (3.82)$$

y combinando las ecuaciones (3.77) y (3.78), resulta

$$\rho_2\beta_2^2 Be^{i\omega\left(t-\frac{x}{\beta_2}\right)} \left(-\frac{i\omega}{\beta_2}\right) \quad (3.83)$$

puesto que en la interfase ($x = 0$) los esfuerzos son iguales, es posible igualar las ecuaciones (3.82) y (3.83)

$$\rho_1\beta_1 \left(-e^{i\omega\left(t-\frac{0}{\beta_1}\right)} + Ae^{i\omega\left(t+\frac{0}{\beta_1}\right)} \right) = -\rho_2\beta_2 Be^{i\omega\left(t-\frac{0}{\beta_2}\right)},$$

dividiendo ambos lados de la ecuación entre $\rho_1\beta_1 e^{i\omega t}$ y multiplicando por -1 resulta

$$1 - A = \frac{\rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1} B. \quad (3.84)$$

Resolviendo la ecuación (3.81) para A

$$A = B - 1;$$

sustituyendo el valor de A en la ecuación (3.84) resulta

$$2 = B \left(1 + \frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1} \right),$$

dividiendo ambos lados de la ecuación entre $1 + \frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}$, se obtiene el valor de B

$$B = \frac{2\rho_1 \beta_1}{\rho_2 \beta_2 + \rho_1 \beta_1}, \quad (3.85)$$

y sustituyendo el valor de B en (3.81) se obtiene el valor de A

$$A = \frac{\rho_1 \beta_1 - \rho_2 \beta_2}{\rho_2 \beta_2 + \rho_1 \beta_1}. \quad (3.86)$$

En una frontera libre de esfuerzos, $\beta_2 = 0$; como consecuencia $A = 1$; para el caso de reflexión pura sin transmisión, $B = 0$ y puesto que $A = 1$, entonces se tiene que

$$u_1 = 2e^{i\omega t}, \quad (3.87)$$

como se puede observar, en una frontera libre de esfuerzos, los desplazamientos se duplican. En el caso de los esfuerzos estos son cero

$$\sigma_1 = 0.$$

Si el medio 2 está conformado por un material rígido $\beta_2 \rightarrow \infty$; entonces, $B = 0$ y $A = -1$. Debido a que $A = -1$, los desplazamientos en $x = 0$ son cero. Con relación a

los esfuerzos, estos se duplican en $x = 0$.

Fundamentos de la propagación de ondas en medios estratificados

EL tamaño y la forma de un cuerpo sólido se puede cambiar aplicando fuerzas a su superficie externa; a estas fuerzas externas se oponen fuerzas internas que resisten los cambios de tamaño y forma. Debido a esto, el cuerpo tiende a regresar a su condición original cuando las fuerzas externas se retiran. Esta propiedad de un sólido a resistir cambios de tamaño o forma y regresar a la condición original, antes de la deformación, se llama *elasticidad*. Un cuerpo perfectamente elástico es aquel que recupera perfectamente su forma y tamaño original después de ser deformado. Muchas sustancias, incluyendo las rocas, se pueden considerar perfectamente elásticas sin error apreciable, en el caso de deformaciones pequeñas. En la naturaleza existen diversos fenómenos de propagación de las perturbaciones mecánicas. Un caso conocido es la propagación de las ondas en la superficie del agua. Las ondas mecánicas se originan por el movimiento forzado de una porción de un medio deformable. Así, las perturbaciones, en una parte del medio se transmiten a las partículas vecinas propagando el movimiento, a esto se le conoce como propagación de ondas.

Cuando se produce un sismo, el suelo experimenta un movimiento violento; la per-

turbación ocasionada por el sismo se propaga por la tierra en todas direcciones con velocidades que dependen de la naturaleza del terreno y de las propiedades elásticas de los materiales; la energía que origina estas perturbaciones se transmite por el terreno en forma de ondas elásticas de compresión, dilatación y torsión. El estudio de la propagación de las ondas elásticas tiene su origen en la época donde se buscaba una explicación de la naturaleza de la luz. La teoría de las ondas sísmicas podría remontarse a 1678 cuando se enunció la ley de Hooke, pero la mayor parte de la teoría de la elasticidad no fue desarrollada sino hasta el siglo XIX. S. D. Poisson mostró teóricamente la existencia de ondas S y P en 1828. Rayleigh (1885), Love (1927) y Stoneley (1924) desarrollaron teorías para explicar la naturaleza de las ondas superficiales. Mallet (1848-1951) inició la sismología experimental con la medición de la velocidad de ondas sísmicas usando pólvora como fuente de energía y la superficie de un recipiente con mercurio como detector; sin embargo, Mallet obtuvo muy bajas velocidades debido, probablemente, a la baja sensibilidad de los detectores que utilizó.

Medio continuo es un conjunto de partículas que forman parte de un cuerpo, ya sea sólido, gas, o fluido, que es estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (nivel atómico o molecular). Por lo tanto, se puede decir que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas.

La descripción más elemental del movimiento en un medio continuo puede llevarse a cabo mediante funciones matemáticas que describan la posición de cada partícula a lo largo del tiempo. En general, se requiere que estas funciones y sus derivadas sean continuas. El propósito de esta sección es presentar las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas elásticas en medios estratificados.

§4.1 Modelo de n-estratos sobre un semiespacio, caso unidimensional

El modelo que se utiliza considera un medio idealizado compuesto de capas horizontales, linealmente elástico, homogéneo, isótropo y dispersivo como se muestra en la Figura 4.1; las capas horizontales representan estratos con propiedades que difieren entre sí y la última capa representa un semiespacio, estas capas se extienden infinitamente en la dirección horizontal en ambos sentidos; la parte superior ($z = 0$) define una frontera libre de esfuerzos; la base de la estratigrafía, que se encuentra en contacto con el semiespacio, define una frontera elástica donde los desplazamientos y los esfuerzos son continuos. Este modelo, se encuentra sujeto a la incidencia vertical de ondas planas, es decir, se considera únicamente la propagación de ondas SH a lo largo del eje z , estas ondas generan un movimiento de partícula perpendicular al plano xz (Figura 4.1).

Utilizando la convención que se muestra en la Figura 4.1 y las ecuaciones que gobiernan los desplazamientos en los estratos, es posible construir una solución para los desplazamientos generados en un medio estratificado por la propagación de una onda plana que incide sobre éste. La ecuación para los desplazamientos en el semiespacio, expresada en su forma compleja, es

$$u = A_0 e^{-i\omega\left(t + \frac{z}{\beta_{n+1}}\right)} + A_{2n-1} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\beta_{n+1}}\right)},$$

donde A_0 es la amplitud de la onda incidente, para incluir atenuación (ver la sección §3.8) en la ecuación anterior se utiliza la ecuación (3.75), con lo que resulta

$$u_{\text{sem}} = A_0 e^{i\omega t} e^{izk_{n+1}} + A_{2n+1} e^{i\omega t} e^{-izk_{n+1}}; \quad (4.1)$$

los desplazamientos en el n-ésimo estrato están definidos por

$$u_n = A_{2n-1}e^{i\omega t}e^{izk_n} + A_{2n}e^{i\omega t}e^{-izk_n}, \tag{4.2}$$

como se puede observar, las ecuaciones anteriores se encuentran en el dominio de la frecuencia.

De igual forma, se pueden establecer las ecuaciones para los campos de desplazamientos correspondientes a los estratos restantes. En estas ecuaciones, los coeficientes de las funciones exponenciales no se conocen, con excepción de las amplitudes de la onda incidente. Estos coeficientes se obtienen evaluando las condiciones de frontera. A continuación se describen las condiciones de frontera que se usaron para obtener el valor de los coeficientes.

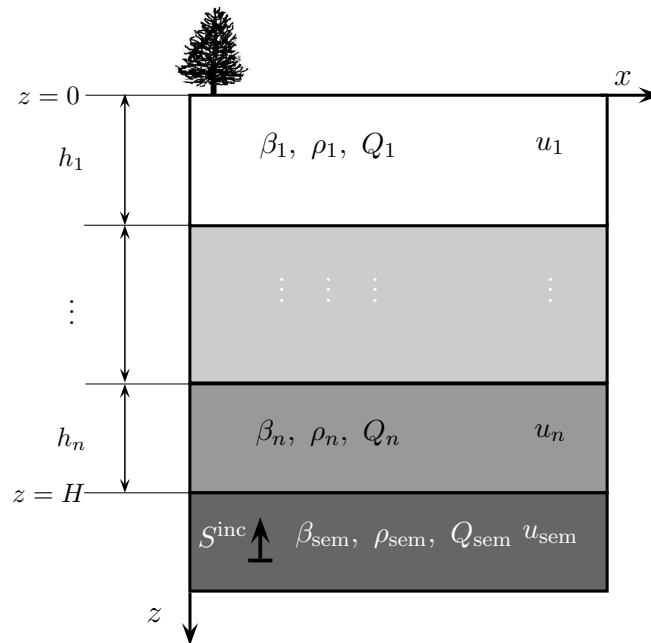


Figura 4.1: Medio estratificado que contiene n-estratos con propiedades diferentes. Fuente: Autor.

Las condiciones de frontera del modelo utilizado son:

1) En el contacto entre dos medios con diferentes propiedades, los esfuerzos son continuos; por ejemplo, en la interfase que divide al estrato del fondo y al semiespacio los campos de desplazamientos satisfacen la siguiente expresión

$$\mu_n \frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{z=H} = \mu_{\text{sem}} \frac{\partial u_{\text{sem}}}{\partial z} \Big|_{z=H}, \quad (4.3)$$

donde μ es el módulo de cortante ($\mu = \rho\beta^2$) y H es el espesor total del medio estratificado.

2) En la interfase entre dos medios con diferentes propiedades, los desplazamientos son continuos. Por ejemplo, en el contacto entre el semiespacio y el último estrato, se cumple la siguiente condición

$$u_1|_{z=H} = u_2|_{z=H}. \quad (4.4)$$

3) La existencia de una superficie libre produce reflexiones cuando las ondas llegan a ésta; para poder modelar las reflexiones provocadas por una superficie libre, dicha superficie debe considerarse libre de esfuerzos; si en $z = 0$ se tiene una frontera libre de esfuerzos, entonces

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.5)$$

Al evaluar las condiciones de frontera, se obtienen los valores de los coeficientes de las funciones exponenciales, y como consecuencia se pueden definir las ecuaciones correspondientes a los campos de desplazamientos. En este trabajo, se calcularon los desplazamientos en un medio estratificado compuesto de tres estratos y un semiespacio.

Los desplazamientos en el primer estrato se pueden definir como

$$u_1 = A_1 e^{i\omega t} e^{izk_1} + A_2 e^{i\omega t} e^{-izk_2}; \quad (4.6)$$

usando la condición (4.5), que indica que en la frontera libre los esfuerzos son cero, se obtiene que $A_1 = A_2$. Por lo tanto, u_1 se puede expresar de la siguiente forma

$$u_1 = A_2 e^{i\omega t} (2 \cos(k_1 z)). \quad (4.7)$$

Los campos de desplazamientos en los estratos subsecuentes son:

$$u_2 = A_3 e^{i\omega t} e^{izk_2} + A_4 e^{i\omega t} e^{i(-z)k_2}, \quad (4.8)$$

para el estrato dos;

$$u_3 = A_5 e^{i\omega t} e^{izk_3} + A_6 e^{i\omega t} e^{i(-z)k_3}, \quad (4.9)$$

para el estrato tres; y

$$u_4 = S_0 e^{i\omega t} e^{izk_4} + A_7 e^{i\omega t} e^{i(-z)k_4}, \quad (4.10)$$

para el semiespacio. Como en las interfases, los desplazamientos y los esfuerzos son continuos, por cada interfase se tienen dos condiciones; en el caso del contacto entre el último estrato y el semiespacio estas condiciones corresponden a las ecuaciones (4.3) y (4.5). Al evaluar estas condiciones se obtiene un sistema de ecuaciones; resolviendo éste se obtienen los valores de las constantes A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 y A_7 . Sustituyendo el valor de las constantes en las ecuaciones (4.7), (4.8), (4.9) y (4.10), se obtienen los campos de desplazamientos para los tres estratos y el semiespacio, estos campos se definen a continuación

$$\begin{aligned}
 u_1 = & \left[8e^{i(t\omega+h_1k_4+h_2(k_2+k_4)+h_3(k_3+k_4))} \cos(zk_1) k_2k_3k_4\beta_2^2\beta_3^2\beta_4^2\rho_2\rho_3\rho_4 \right] / \\
 & / \left[i \sin(h_1k_1) k_1\beta_1^2\rho_1 \left((1+e^{2ih_2k_2}) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (-1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + \right. \right. \\
 & + (-1+e^{2ih_2k_2}) k_3\beta_3^2\rho_3 \left((-1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + \\
 & + \cos(h_1k_1) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((-1+e^{2ih_2k_2}) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (-1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + \right. \\
 & \left. \left. + (1+e^{2ih_2k_2}) k_3\beta_3^2\rho_3 \left((-1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) \right) \right], \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

para el primer estrato, para el segundo estrato

$$\begin{aligned}
 u_2 = & - \left[4e^{i(t\omega-(z+h_1-h_2)k_2+h_1k_4+h_2k_4+h_3(k_3+k_4))} k_3k_4\beta_3^2\beta_4^2 \left(-i \left(e^{2izk_2} - e^{2ih_1k_2} \right) \sin(h_1k_1) k_1\beta_1^2\rho_1 - \right. \right. \\
 & - \left. \left(e^{2izk_2} + e^{2ih_1k_2} \right) \cos(h_1k_1) k_2\beta_2^2\rho_2 \right) \rho_3\rho_4 \right] / \left[i \sin(h_1k_1) k_1\beta_1^2\rho_1 \left((1+e^{2ih_2k_2}) k_2\beta_2^2\rho_2 \right. \right. \\
 & \left. \left((1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (-1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + (-1+e^{2ih_2k_2}) k_3\beta_3^2\rho_3 \left((-1+e^{2ih_3k_3}) \right. \right. \\
 & \left. \left. k_3\beta_3^2\rho_3 + (1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + \cos(h_1k_1) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((-1+e^{2ih_2k_2}) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((1+e^{2ih_3k_3}) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. k_3\beta_3^2\rho_3 + (-1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + (1+e^{2ih_2k_2}) k_3\beta_3^2\rho_3 \left((-1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) \right], \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

para el estrato tres resulta

$$\begin{aligned}
 u_3 = & - \left[2e^{i(t\omega-(z+h_1+h_2-h_3)k_3+h_1k_4+h_2k_4+h_3k_4)} k_4\beta_4^2 \left(i \sin(h_1k_1) k_1\beta_1^2\rho_1 \left(- (1+e^{2ih_2k_2}) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(e^{2izk_3} - e^{2i(h_1+h_2)k_3} \right) k_2\beta_2^2\rho_2 - (-1+e^{2ih_2k_2}) \left(e^{2izk_3} + e^{2i(h_1+h_2)k_3} \right) k_3\beta_3^2\rho_3 \right) + \cos(h_1k_1) \right. \\
 & \left. k_2\beta_2^2\rho_2 \left(- (-1+e^{2ih_2k_2}) \left(e^{2izk_3} - e^{2i(h_1+h_2)k_3} \right) k_2\beta_2^2\rho_2 - (1+e^{2ih_2k_2}) \left(e^{2izk_3} + e^{2i(h_1+h_2)k_3} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. k_3\beta_3^2\rho_3 \right) \rho_4 \right] / \left[i \sin(h_1k_1) k_1\beta_1^2\rho_1 \left((1+e^{2ih_2k_2}) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (-1+ \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + (-1+e^{2ih_2k_2}) k_3\beta_3^2\rho_3 \left((-1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + \right. \\
 & + \cos(h_1k_1) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((-1+e^{2ih_2k_2}) k_2\beta_2^2\rho_2 \left((1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (-1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) + \right. \\
 & \left. \left. + (1+e^{2ih_2k_2}) k_3\beta_3^2\rho_3 \left((-1+e^{2ih_3k_3}) k_3\beta_3^2\rho_3 + (1+e^{2ih_3k_3}) k_4\beta_4^2\rho_4 \right) \right) \right], \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

finalmente, para el semiespacio se tiene

$$\begin{aligned}
u_4 = e^{i(t\omega - zk_4)} & \left[e^{2izk_4} - e^{2i(h_1+h_2+h_3)k_4} - \left[2e^{2i(h_1+h_2+h_3)k_4} k_4 \beta_4^2 (i \sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1 ((1 + e^{2ih_2 k_2}) \right. \right. \\
& k_2 \beta_2^2 \rho_2 - (-1 + e^{2ih_2 k_2}) k_3 \beta_3^2 \rho_3) + \cos(h_1 k_1) k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((-1 + e^{2ih_2 k_2}) k_2 \beta_2^2 \rho_2 - (1 + e^{2ih_2 k_2}) \\
& k_3 \beta_3^2 \rho_3) \rho_4] / [i \sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1 ((1 + e^{2ih_2 k_2}) k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (-1 + \\
& + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4) + (-1 + e^{2ih_2 k_2}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 ((-1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (1 + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4)) + \\
& + \cos(h_1 k_1) k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((-1 + e^{2ih_2 k_2}) k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (-1 + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4) + \\
& + (1 + e^{2ih_2 k_2}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 ((-1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (1 + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4))] + \\
& + \left[2e^{2i((h_1+h_2)k_4+h_3(k_3+k_4))} k_4 \beta_4^2 (i \sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1 ((1 + e^{2ih_2 k_2}) k_2 \beta_2^2 \rho_2 + (-1 + e^{2ih_2 k_2}) \right. \\
& k_3 \beta_3^2 \rho_3) + \cos(h_1 k_1) k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((-1 + e^{2ih_2 k_2}) k_2 \beta_2^2 \rho_2 + (1 + e^{2ih_2 k_2}) k_3 \beta_3^2 \rho_3) \rho_4] / \\
& [i \sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1 ((1 + e^{2ih_2 k_2}) k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (-1 + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4) + \\
& (-1 + e^{2ih_2 k_2}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 ((-1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (1 + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4)) + \cos(h_1 k_1) \\
& k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((-1 + e^{2ih_2 k_2}) k_2 \beta_2^2 \rho_2 ((1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (-1 + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4) + (1 + e^{2ih_2 k_2}) \\
& k_3 \beta_3^2 \rho_3 ((-1 + e^{2ih_3 k_3}) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + (1 + e^{2ih_3 k_3}) k_4 \beta_4^2 \rho_4))] \Big]. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Siguiendo la metodología anterior es posible construir una solución para un medio de n -estratos.

§4.2 Modelo de un estrato sobre un semiespacio, caso unidimensional

Si los tres estratos del ejemplo analizado en la sección anterior tienen las mismas propiedades, se tiene como resultado el caso de un estrato localizado sobre un semiespacio.

Este modelo ha sido utilizado para estimar periodos característicos de suelos. Por su relevancia, este modelo es descrito a continuación y se ilustra en la Figura 4.2. La parte superior del estrato define una frontera libre de esfuerzos y la base del estrato se encuentra en contacto con el semiespacio lo que define una frontera elástica, donde los

desplazamientos y los esfuerzos son continuos. Este modelo, se encuentra sujeto a la incidencia vertical de ondas planas SH , es decir, se consideró únicamente la propagación de ondas SH a lo largo del eje z , estas ondas generan un movimiento de partícula perpendicular al plano xz .

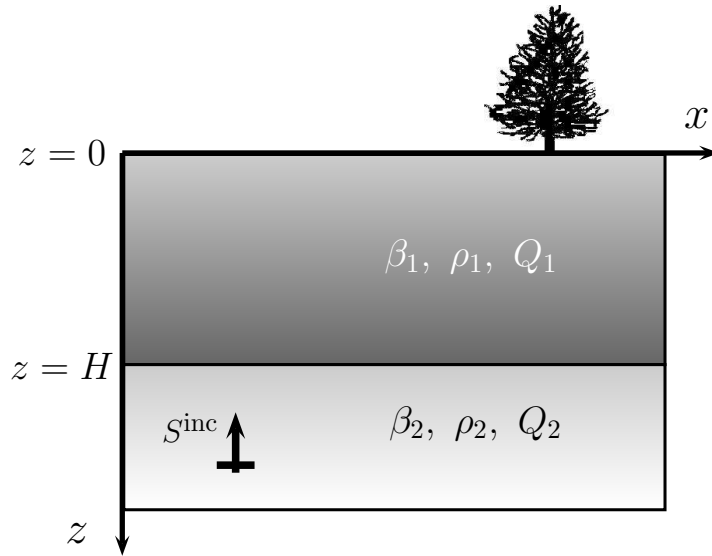


Figura 4.2: Modelo unidimensional de un estrato elástico, homogéneo e isótropo de espesor H sobre un semiespacio elástico homogéneo e isótropo. Fuente: Autor.

Para construir los campos de desplazamientos en el estrato y en el semiespacio se resolvió la ecuación de onda (ecuación (3.42)), la solución de esta ecuación se utiliza para definir a las ondas transmitidas y reflejadas por las fronteras del modelo. Expresada en su forma compleja, la solución para los desplazamientos en el estrato puede ser escrita como

$$u_1 = A_1 e^{i\omega\left(t + \frac{z}{\beta_1}\right)} + A_2 e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\beta_1}\right)}. \quad (4.15)$$

Con respecto a los desplazamientos en el semiespacio se tiene

$$u_2 = A_0 e^{i\omega\left(t + \frac{z}{\beta_2}\right)} + A_3 e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\beta_2}\right)}, \quad (4.16)$$

donde los signos $+\frac{z}{\beta_n}$ y $-\frac{z}{\beta_n}$ definen a las ondas ascendente y descendente, respectivamente; las constantes A_1 , A_2 y A_3 son incógnitas y representan las amplitudes de las ondas que viajan por el medio; estas constantes se obtienen evaluando las condiciones de frontera.

Después de aplicar las condiciones de frontera descritas en la sección anterior, se obtienen las ecuaciones para los desplazamientos en el estrato y en el semiespacio; los campos de desplazamientos para el estrato están definidos por la siguiente expresión.

$$u_1 = \frac{2A_0 e^{i\omega t} \cos\left(\frac{z\omega}{\beta_1}\right) e^{\frac{iH\omega}{\beta_2}}}{i \sin\left(\frac{H\omega}{\beta_1}\right) \frac{\beta_1 \rho_1}{\beta_2 \rho_2} + \cos\left(\frac{H\omega}{\beta_1}\right)}; \quad (4.17)$$

el modelo utilizado no incluye atenuación; por lo tanto, la forma de onda permanecerá invariante con el tiempo, disminuida sólo por la dispersión geométrica.

Por otra parte, la ecuación que gobierna los desplazamientos en el semiespacio se definen a continuación

$$u_2 = e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\beta_2}\right)} A_0 \left(e^{\frac{2iH\omega}{\beta_2}} + e^{\frac{2iz\omega}{\beta_2}} - \frac{2e^{\frac{2iH\omega}{\beta_2}} \beta_1 \rho_1}{\beta_1 \rho_1 - i \cot\left(\frac{H\omega}{\beta_1}\right) \beta_2 \rho_2} \right). \quad (4.18)$$

Como lo indican las ecuaciones (4.17) y (4.18), los campos de desplazamientos u_1 y u_2 están expresados en el dominio de la frecuencia; por lo tanto, el espectro de amplitudes de la ecuación (4.17) se obtiene aplicando el valor absoluto a ésta

$$\frac{|u_1|}{|A_0|} = \frac{2 \left| \cos\left(\omega \frac{z}{\beta_1}\right) \right|}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega H}{\beta_1}\right) + \left(\frac{\rho_1 \beta_1}{\rho_2 \beta_2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega H}{\beta_1}\right)}}, \quad (4.19)$$

este espectro de amplitudes está normalizado con respecto a la amplitud de la onda incidente (A_0).

Considerando el modelo de atenuación de Kelvin descrito en la sección §3.8, es

posible expresar la ecuación (4.17) de la siguiente forma

$$u_1 = \frac{2e^{it\omega} e^{iHk_2} A_0 \cos(zk_1) k_2}{i \sin(Hk_1) k_1 \frac{\beta_1^2 \rho_1}{\beta_2^2 \rho_2} + \cos(Hk_1) k_2}. \quad (4.20)$$

Si se considera que el semiespacio es rígido, entonces $\beta_2 \rightarrow \infty$; como consecuencia, la ecuación (4.19) se reduce a

$$\frac{|u_1|}{|A_0|} = \frac{2}{\left| \cos\left(\frac{\omega H}{\beta_1}\right) \right|}, \quad (4.21)$$

que representa el módulo de la función de transferencia o la función de amplificación de un estrato sobre un semiespacio rígido. De la ecuación anterior, se puede deducir la relación que existe entre el periodo del estrato y la velocidad de propagación; cuando $\frac{\omega H}{\beta_1}$ se aproxima a valores iguales a $n\frac{\pi}{2}$, el denominador de la ecuación (4.21) se aproxima a cero. Esto implica que la ecuación (4.21) se indetermina para cuando $\frac{\omega H}{\beta_1} = \frac{n\pi}{2}$ (Figura 4.3). La primera frecuencia resonante se encuentra en $\frac{\pi}{2}$; haciendo $\frac{\omega H}{\beta_1} = \frac{\pi}{2}$ y tomando en cuenta que $\omega = 2\pi f$ y $T = \frac{1}{f}$, se puede resolver para el periodo T

$$T = \frac{4H}{\beta_1}, \quad (4.22)$$

que representa el periodo de vibración correspondiente a la frecuencia fundamental, y es llamado *periodo característico*.

La ecuación (4.22) establece que el periodo característico del estrato es directamente proporcional al espesor del estrato e inversamente proporcional a la velocidad de propagación de las ondas SH . Esta ecuación permite estimar la velocidad de una manera robusta; puesto que, se puede combinar con información adicional durante el proceso de inversión y de esta manera obtener mejores estimaciones.

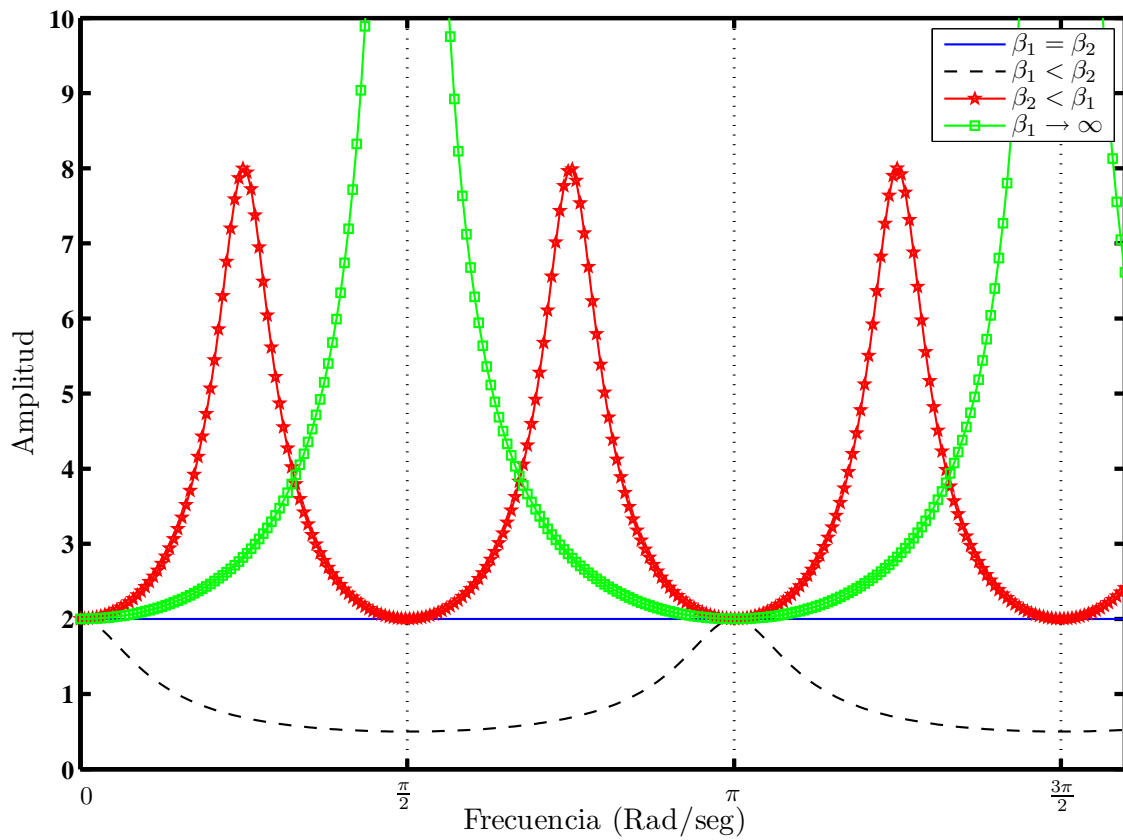


Figura 4.3: Respuesta en superficie debido a la incidencia vertical de ondas SH para un medio compuesto de un estrato y un semiespacio. Se muestran cuatro casos: $\beta_1 = \beta_2$, siendo $\beta_1 = \pi$; $\beta_2 = 2\beta_1$, siendo $\beta_1 = \pi$; $\beta_2 = \frac{1}{2}\beta_1$, siendo $\beta_1 = 2\pi$; y $\beta_1 \rightarrow \infty$. Fuente: Autor.

Fundamentos de la propagación de ondas en medios heterogéneos

LA geometría del frente de onda está gobernada por el principio de Huygens. Este establece que cualquier punto sobre dicho frente puede considerarse una fuente generadora de ondas. Para tiempos posteriores, este lugar geométrico se define trazando una tangente a los frentes secundarios. Si se conoce su posición en un cierto tiempo, en principio se puede predecir ésta, para otros tiempos.

En un medio homogéneo, las ondas viajan con la misma velocidad, pero en un medio heterogéneo algunas porciones del frente de la onda se mueven más rápidamente o más lentamente, de acuerdo con el tipo de material por el que se propagan las ondas. Si la forma de la onda depende de la velocidad del medio, la trayectoria que siguen los rayos también.

La geometría de los rayos está gobernada por el principio de Fermat, que establece que la energía viaja por la trayectoria de tiempo mínimo. Está claro que los principios de Huygens y de Fermat son complementarios.

Considerando un medio elástico, heterogéneo, en el que existe un desplazamiento \mathbf{u}

en un punto M del medio, y en este se definen dos tensores; el tensor de esfuerzos σ_{ij} y el tensor de deformaciones (ecuación (3.13)); la ley de Hooke establece una relación lineal entre el tensor de esfuerzos y el de deformaciones (ecuación (3.18)). Las condiciones elásticas del medio son los elementos del tensor c_{ijkl} (ecuación (3.21)). Por relaciones de simetría, los 81 coeficientes de este tensor se reducen a 21. Combinando la ecuación (3.18) con la segunda Ley de Newton, se obtiene la expresión que rige el movimiento en un medio elástico y se conoce como la ecuación de la elastodinámica lineal

$$\left[c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right] + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

donde f_i representa a las fuerzas externas. La función c_{ijkl} es generalmente continua y diferenciable; estas consideraciones también son válidas para la densidad. En un medio elástico, lineal e isótropo, únicamente dos elementos del tensor c_{ijkl} son linealmente independientes: λ y μ que son las constantes de Lamé. El medio heterogéneo más simple es aquel en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad, pero este puede ser un sólido elástico o un fluido. Si el medio por el cual se propaga la energía es elástico, existe acoplamiento de ondas P y S . En cambio, si el medio es un fluido, entonces, únicamente se propagan ondas compresionales, debido a que no existen esfuerzos de cizalla (medio acústico).

A continuación, se muestra la deducción de soluciones clásicas de la teoría de rayos para el caso acústico, con el objeto de mostrar la estructura y la compatibilidad de las soluciones para medios homogéneos y heterogéneos. Para este caso particular, la ecuación (5.1) se reduce a

$$\nabla^2 P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -S(\mathbf{x}, t), \quad (5.2)$$

donde S representa una fuente explosiva que varía en el espacio y tiempo, la densidad

es constante; P es la variación de la presión. En un medio homogéneo la velocidad permanece constante, por lo tanto

$$\nabla^2 P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{x})\delta(t). \quad (5.3)$$

Si el comportamiento de P cuando r tiende a cero es

$$P(r, t) \rightarrow \frac{\delta(t)}{4\pi r}. \quad (5.4)$$

La solución de la ecuación (5.3) debe satisfacer la condición (5.4). En el caso de una fuente explosiva, la geometría de los frentes es esférica; por lo que, el campo de presiones P únicamente depende del radio, y, por consiguiente, el Laplaciano debe expresarse en coordenadas esféricas.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \quad (5.5)$$

Rescribiendo la ecuación (5.5) se tiene

$$\frac{\partial^2 Pr}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (Pr)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.6)$$

Una solución particular de enorme generalidad se debe a d'Alembert (ver la sección §3.6). Para ésta se requieren dos funciones arbitrarias f y g , tales que

$$P = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}, \quad (5.7)$$

por la condición (5.4).

Como se trata de una explosión, las ondas emergen de la fuente, por lo que la

segunda solución se elimina, y la solución elemental es

$$P(r, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r/c). \quad (5.8)$$

La solución (5.8) representa una perturbación (función impulso unitario, Apéndice F) que se propaga con una velocidad c en la dirección positiva del eje r , y el factor $1/r$ representa la dispersión geométrica. En general, para cualquier tipo de fuente ($S(r_0, t)$) se debe convolucionar la función impulso unitario con la función fuente, como se muestra en la siguiente ecuación

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \frac{S(\mathbf{r}_0, t - R/c)}{R} dv_0, \quad (5.9)$$

donde R representa la distancia entre el punto \mathbf{r} y el punto de integración \mathbf{r}_0 .

Integrando la solución (5.8) a lo largo del eje perpendicular a un plano de propagación, se obtiene la siguiente solución elemental

$$P(r, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - r/c)}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}}, \quad (5.10)$$

donde $H(t)$ es la función de Heaviside.

Esta ecuación también representa una onda que viaja con una velocidad c , en la dirección positiva del eje r . En el dominio de la frecuencia la expresión (5.8) tiene la forma

$$\frac{1}{4\pi r} e^{i\omega r/c}, \quad (5.11)$$

mientras que la transformada de Fourier de la solución bidimensional (5.10) es la fun-

ción de Hankel de orden cero y de primera especie,

$$\frac{i}{4}H_0^1\left(\frac{\omega r}{c}\right), \quad (5.12)$$

donde se observa que el tiempo de tránsito es $\frac{r}{c}$.

§5.1 Teoría de rayos

Aplicando la transformada de Fourier a la parte homogénea de la ecuación (5.3), se obtiene que

$$\nabla^2 P(\mathbf{x}, t) + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2} P(\mathbf{x}, \omega) = 0. \quad (5.13)$$

Para resolver la ecuación anterior, se puede utilizar la solución para el caso homogéneo

$$\frac{1}{4\pi r} e^{i\omega T}, \quad (5.14)$$

donde el primer factor define la amplitud, mientras que el segundo la localización de la onda. Si en un medio heterogéneo la variación de la velocidad con respecto a la profundidad es “suave”, se preserva la coherencia del frente de onda; por lo que, el tiempo de tránsito y la amplitud se pueden definir localmente, y la solución para la ecuación (5.13) es

$$P(\mathbf{x}, \omega) = S(\omega) A(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega T(\mathbf{x})} \quad (5.15)$$

donde $S(\omega)$ es la función fuente definida en el dominio de la frecuencia.

La aproximación asintótica derivada de la teoría **WKBJ** (Bender y Orzag, 1978) establece que $A(\mathbf{x}, \omega)$ tiene la forma

$$A(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{A_k(\mathbf{x})}{(-i\omega)^k}. \quad (5.16)$$

El término predominante de esta serie es el de orden cero $A(\mathbf{x}, \omega) = A_0(\mathbf{x})$, por lo que

$$P(\mathbf{x}, \omega) \approx S(\omega)A_0(\mathbf{x})e^{i\omega T(\mathbf{x})}, \quad (5.17)$$

y en el dominio del tiempo

$$P(\mathbf{x}, t) \approx A_0(\mathbf{x})S(t - T). \quad (5.18)$$

Lo que demuestra que la onda se propaga sin distorsión en alta frecuencia con un tiempo de tránsito T .

Se tienen dos escalas de tiempo en la señal sísmica: el tiempo de tránsito y el tiempo característico de la fuente $\langle t \rangle$, como se muestra en la Figura 5.1. Este último define al ancho de banda espectral de la energía emitida ($\langle t \rangle = 2\pi/\omega$), y la aproximación para alta frecuencia será válida si $\omega T \gg 1$.

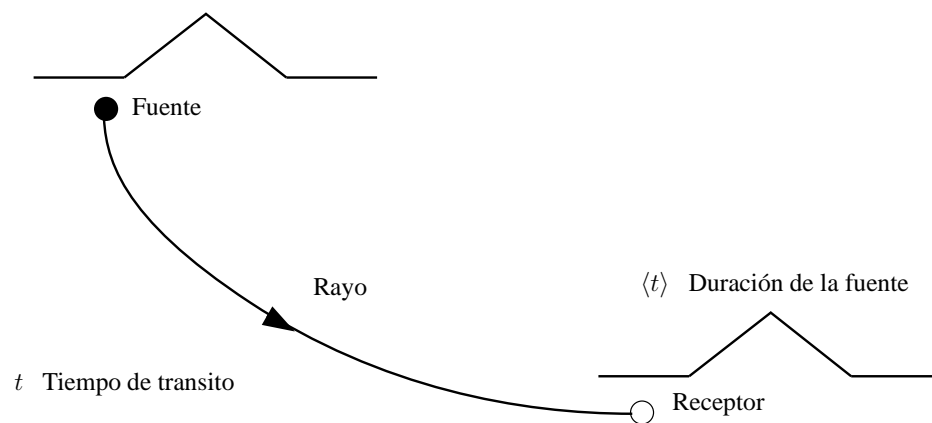


Figura 5.1: Escalas de tiempo en la señal sísmica. Fuente: Autor.

La estructura que tiene la solución exacta para una fuente puntual en un espacio tridimensional homogéneo es compatible a la que presenta la solución para un modelo heterogéneo; por lo que, es posible construir soluciones a partir de la solución para el

caso homogéneo. En el caso bidimensional, la forma asintótica de la función de Hankel de orden cero y de primera especie, representa una onda cilíndrica

$$P(r, \omega) = \frac{i}{4} H_0^1 \left(\frac{\omega r}{c} \right) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2c}{\pi \omega r}} e^{\frac{i\omega r}{c}} e^{-\frac{i\pi}{4}}, \quad (5.19)$$

que tiene una estructura que es compatible con la teoría de rayos

$$P(r, \omega) = \left[\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{\frac{i\pi}{4}} \right] \left[\sqrt{\frac{2c}{r}} \right] e^{\frac{i\omega r}{c}}. \quad (5.20)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a la ecuación anterior se obtiene que

$$P(r, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{2r}} \frac{H(t - r/c)}{\sqrt{t - r/c}}. \quad (5.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.15), (5.16) en (5.13) y reordenando términos se tiene

$$S(\omega) \nabla P = S(\omega) \left(\nabla A e^{i\omega T} + i\omega \nabla T A e^{i\omega T} \right), \quad (5.22)$$

$$S(\omega) \nabla^2 P = S(\omega) \left(\nabla^2 A e^{i\omega T} + i\omega \left[2\nabla A \cdot \nabla T + A \nabla^2 T \right] e^{i\omega T} - \omega^2 (\nabla T)^2 A e^{i\omega T} \right), \quad (5.23)$$

en ω^2

$$\left((\nabla T)^2 - \frac{1}{c^2} \right) A_0 e^{i\omega T} = 0, \quad (5.24)$$

en $-i\omega$

$$(2\nabla A_0 \nabla T + \nabla^2 T A_0) e^{i\omega T} = 0, \quad (5.25)$$

la ecuación (5.24) es la ecuación eikonal, que se puede definir de la siguiente forma

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad (5.26)$$

que determina la localización de los frentes de onda, mientras que la ecuación (5.25) permite determinar la amplitud de la misma,

$$(2\nabla A_0 \nabla T + \nabla^2 T A_0) = 0, \tag{5.27}$$

y se denomina ecuación de transporte.

§5.2 Ecuación eikonal

La ecuación Eikonal controla la evolución de los frentes de onda. Un frente en un tiempo $t + dt$ se conoce a partir de otro ubicado en el tiempo t , como se muestra en la Figura 5.2.

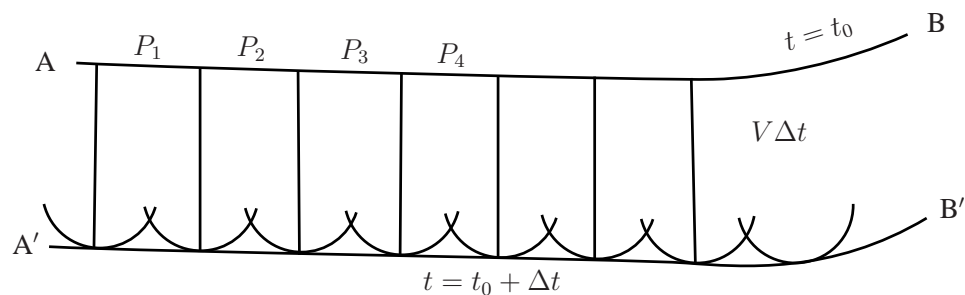


Figura 5.2: Construcción de un nuevo frente de onda. Fuente: Autor.

En lugar de utilizar este lugar geométrico se identifican las trayectorias ortogonales a estos (Figura 5.3). Éstas se denominan rayos. Su trazado se utiliza para resolver las ecuaciones diferenciales anteriormente descritas. Este método se denomina de las características.

Si se considera la ecuación implícita de un rayo ($\mathbf{x}(s)$), la tangente a éste se obtiene a partir de la ecuación

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \tag{5.28}$$

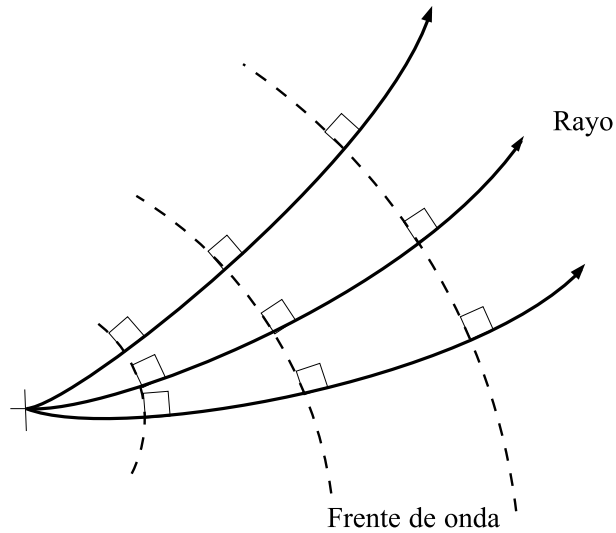


Figura 5.3: Rayos (líneas continuas) y frentes de onda (líneas segmentadas) en un medio heterogéneo. Fuente: Autor.

donde $|\mathbf{t}| = 1$. Considerando que el rayo es ortogonal al frente de onda, cualquier tangente trazada a lo largo del rayo es paralela a ∇T . Se deduce a partir de la ecuación eikonal que

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\nabla T, \quad (5.29)$$

donde la cantidad $|d\mathbf{x}|/c$ se denomina distancia óptica.

Por otra parte, es necesario definir como evoluciona el fenómeno en la dirección normal al rayo

$$\frac{d\nabla T}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right). \quad (5.30)$$

Así, la derivada con respecto a la coordenada curvilínea s es la proyección del operador gradiente sobre la tangente

$$\frac{d}{ds} = \mathbf{t} \cdot \nabla = c\nabla T \cdot \nabla. \quad (5.31)$$

Partiendo de esta definición, se tiene que

$$\frac{d\nabla T}{ds} = \nabla \left(\frac{1}{c} \right), \quad (5.32)$$

y combinando las ecuaciones (5.30) y (5.32) se obtiene la ecuación que describe el comportamiento de las ondas en la dirección de la normal al rayo

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \nabla \left(\frac{1}{c} \right), \quad (5.33)$$

esta ecuación también se puede expresar de la siguiente forma

$$\nabla \left(\frac{1}{c} \right) = \mathbf{t} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \right) + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{t}}{ds}. \quad (5.34)$$

El orden del sistema diferencial se reduce introduciendo una variable adicional que se denomina vector lentitud \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = \nabla T = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (5.35)$$

Se tiene entonces un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\mathbf{p}, \quad (5.36)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla \left(\frac{1}{c} \right), \quad (5.37)$$

y la fase o el tiempo de tránsito se obtiene por integración de la ecuación eikonal a lo largo de la trayectoria del rayo.

§5.3 Ecuación de transporte

La ecuación de transporte (5.27) puede escribirse de una forma más compacta, al multiplicarla por la cantidad A_0 . Así,

$$\nabla \cdot (A_0^2 \nabla T) = 0. \quad (5.38)$$

La divergencia representa el flujo de líneas de campo a través de un volumen definido. Si el flujo neto es cero, la divergencia será cero, por el contrario si el flujo neto es diferente de cero la divergencia será diferente de cero. Si se considera un tubo cilíndrico de volumen V alrededor de un segmento de un rayo, con una generatriz paralela a este segmento, se observa que el rayo interseca dos superficies del cilindro (Figura 5.4), cada una de estas definida por dos parámetros: γ_1 y γ_2

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right) d\gamma_1 d\gamma_2, \quad (5.39)$$

donde \times representa el producto cruz. Las dos superficies ubicadas en s_0 y en s_1 se representan en forma diferencial por dS_0 y dS_1 . Relacionando la divergencia con el flujo por medio del teorema de Gauss se tiene que

$$\int \int \int \nabla \cdot (A_0^2 \nabla T) dv = \int \int A_0^2 \mathbf{n} \cdot \nabla T dS = 0. \quad (5.40)$$

Esto significa que el flujo del campo $A_0^2 \nabla T$ es constante durante la propagación. Ya que ∇T es paralelo a \mathbf{p} . Introduciendo dos superficies dS_1 y dS'_1 que son proyecciones de las superficies dS_0 y dS_1 sobre la dirección definida por el rayo (Figura 5.5), se observa que

$$\frac{1}{c_0} A_0^2(s_0) dS'_0 = \frac{1}{c_1} A_0^2(s_1) dS'_1; \quad (5.41)$$

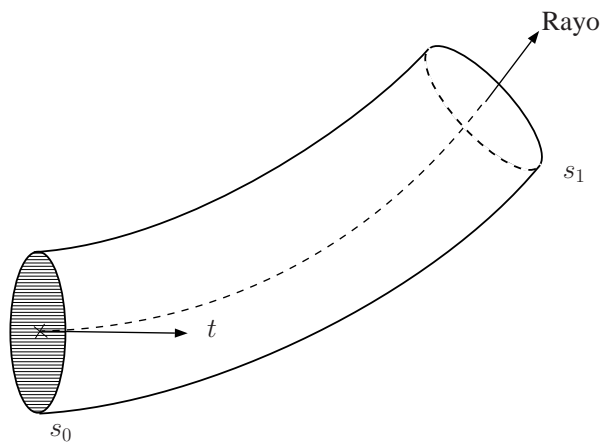


Figura 5.4: Volumen cilíndrico V , alrededor de un segmento de un rayo con generatriz paralela al segmento. Fuente: Autor.

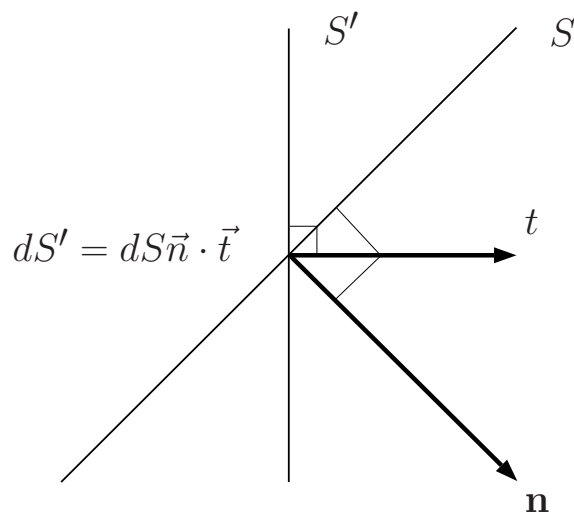


Figura 5.5: Proyección de la superficie que interseca al rayo, sobre la dirección que define éste. Fuente: Autor.

por medio de esta ecuación se calcula la amplitud en la posición s_1 a partir de la amplitud en la posición s_0 . La aproximación de orden cero implica que la energía se preserva a lo largo del tubo que rodea al rayo, sin pérdida. También se considera que el valor normal al elemento superficial es paralelo al vector lentitud \mathbf{p} . Rescribiendo la ecuación (5.41)

$$A_0(s_1) = A_0(s_0) \sqrt{\frac{c_1 dS'_0}{c_0 dS'_1}}, \quad (5.42)$$

y como

$$dS' = dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = J d\gamma_1 d\gamma_2, \quad (5.43)$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial y}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial z}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

resulta que

$$A_0(s_1) = A_0(s_0) \sqrt{\frac{c_1 J_0}{c_0 J_1}}. \quad (5.45)$$

Al encontrar la presión observada en un punto dado, producida por una fuente con variación temporal $S(\omega)$ y con un patrón de irradiación $\phi(\gamma_1, \gamma_2)$, se tiene de forma explícita la excitación, la dispersión geométrica y la propagación

$$P(x, \omega) = S(\omega) \phi(\gamma_1, \gamma_2) \sqrt{\frac{c}{J}} e^{i\omega T(\mathbf{x})}. \quad (5.46)$$

Ahora el problema es calcular la intensidad de la fuente ϕ , para un medio homogéneo en el que la velocidad de propagación es c_0 . La forma completa de la función de Green para alta frecuencia es

$$P(r, \omega) = S(\omega) \frac{1}{4\pi r} e^{i\omega T}. \quad (5.47)$$

Si se integra la relación que existe entre el elemento de superficie y el Jacobiano

($dS = Jd\Omega$) sobre una esfera de radio r , resulta que

$$4\pi r^2 = J \int d\Omega = 4\pi J, \quad (5.48)$$

y la forma asintótica de la solución es

$$P(r, \omega) = S(\omega) \frac{1}{4\pi\sqrt{c_0}} \sqrt{\frac{c_0}{J}} e^{i\omega T}, \quad (5.49)$$

por lo que, el patrón de irradiación para una fuente puntual es

$$\phi(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{c_0}}. \quad (5.50)$$

La solución asintótica para un medio con velocidad de propagación que cambia espacialmente tiene la forma

$$P(\mathbf{x}, \omega) = S(\omega) \frac{1}{4\pi\sqrt{c_0}} \sqrt{\frac{c(\mathbf{x})}{J(\mathbf{x})}} e^{i\omega T(\mathbf{x})}, \quad (5.51)$$

donde c_0 es la velocidad de la onda en la vecindad de la fuente. Cuando el Jacobiano es positivo, la solución en el dominio del tiempo se construye de manera directa, aplicando la transformada inversa de Fourier

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.52)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{c(\mathbf{x})}{c_0 J(\mathbf{x})}} S(t - T(\mathbf{x})). \quad (5.53)$$

Pero si el Jacobiano es nulo, el tubo que rodea al rayo degenera a un punto y la energía se vuelve infinita. Esto representa una cáustica. Si se conoce su posición es posible construir una teoría asintótica que tome en cuenta el aspecto ondulatorio de la

señal y que permita describir la propagación en función de la frecuencia. En la parte iluminada de la cáustica los rayos convergen hacia un mismo punto, mientras que en la otra, se observa un decaimiento exponencial. El problema se resuelve utilizando la teoría de Airy que permite conectar los dos lados de la cáustica.

§5.4 Solución analítica de Pekeris

En un fluido únicamente se propagan ondas compresionales; por lo que, la ecuación de onda es escalar. Éste es un caso particular del problema elástico. Como no existe acoplamiento de ondas P y S , se tienen soluciones analíticas para algunos problemas. Por ejemplo, para el caso de una explosión dentro de un fluido en el que la velocidad permanece constante, el campo de desplazamientos se obtiene por medio del método de separación de variables. Si la velocidad varía linealmente con la profundidad, y en el medio se tiene una fuente explosiva, es posible obtener analíticamente los campos de desplazamientos y esfuerzos. Esta solución la obtuvo Pekeris (1946). En este problema los frentes de onda definen esferas y los rayos circunferencias, el sistema de coordenadas bipolar describe su geometría. En un sistema de coordenadas cilíndricas como el que se muestra en la Figura 5.6, donde la fuente se ubica en $z = z_0$, los campos de desplazamientos y esfuerzos se obtienen a partir del potencial de velocidad ϕ , que debe satisfacer las ecuaciones

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \mathbf{V} = -\nabla \phi, p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5.54)$$

donde ∇^2 es el Laplaciano y c cambia linealmente con respecto a z . Esta ecuación se resuelve usando el método de separación de variables. Éste establece que la solución debe estar constituida por un producto de funciones, donde cada una de éstas debe depender sólo de una variable. Considerando que la variación temporal es armónica, el

potencial debe tener la forma

$$\phi = e^{i\omega t} J_0(kr) F(z) G(k), \quad (5.55)$$

donde k es la variable de integración, con respecto a la cual se integra a lo largo de una trayectoria definida en el plano complejo k . Esto equivale a construir la solución a partir de ondas cilíndricas elementales.

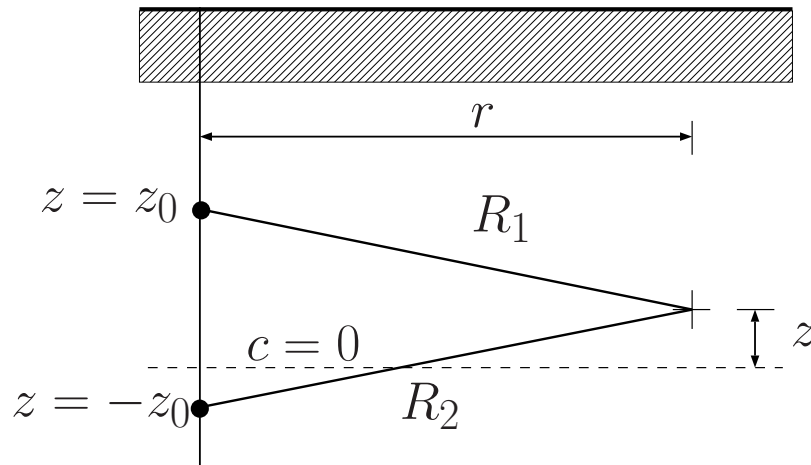


Figura 5.6: Fuente puntual, ubicada en $z = z_0$, dentro de un semiespacio líquido en el que la velocidad cambia linealmente con la profundidad $c(z) = az$. Fuente: Autor.

El potencial definido en esta forma satisface condiciones de frontera:

1. En la superficie libre ($z = z_0$) el potencial es nulo,
2. En la fuente las ondas divergen,
3. En el plano $z = z_0$, debe haber continuidad en las componentes de la velocidad, excepto en la fuente. En este punto la componente vertical de la velocidad es discontinua

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = -Dk, (z = \beta), \quad (5.56)$$

donde D es una constante, y los subíndices 1 y 2 se refieren a las regiones arriba y abajo de la fuente, respectivamente; por otra parte, la función de la velocidad se define como

$$c = az. \quad (5.57)$$

donde a es el gradiente de la velocidad. Aplicando el método de separación de variables, y usando las condiciones de frontera, se tiene que el potencial ϕ es

$$\phi = \frac{Dz_0(z)^{1/2}e^{i\omega t}}{R_1R_2}e\left[-in2\tanh^{-1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right], \quad (5.58)$$

donde

$$R_1 = [r^2 + (z_0 - z)^2]^{1/2}, \quad (5.59)$$

representa la distancia del punto de observación a la fuente, y

$$R_2 = [r^2 + (z_0 + z)^2]^{1/2} \quad (5.60)$$

representa la distancia de la imagen de la fuente al punto de observación; mientras que

$$n = \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right)^{1/2}, \quad (5.61)$$

y

$$D = \frac{2}{\sqrt{z_0}}. \quad (5.62)$$

§5.5 Función de Green para un medio acústico con un gradiente de la velocidad constante (3D) (caso heterogéneo)

Considerando un medio acústico tridimensional en el que la velocidad es

$$c(z) = c_0 \frac{z + h}{z_0 + h}, \quad (5.63)$$

donde, c_0 es la velocidad de la onda en la vecindad de la fuente y h representa la coordenada donde la función de la velocidad es cero (Figura 5.7). En este caso, los radios de los frentes de onda están definidos por la siguiente ecuación

$$R_W = 2(z_0 + h) \frac{R_2 R_1}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (5.64)$$

donde

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2},$$

y

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_0 + 2h)^2}.$$

Con respecto a los tiempos de tránsito, estos están definidos por la expresión

$$\tau = \frac{2}{\left(\frac{c_0}{z_0 + h}\right)} \tanh^{-1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right). \quad (5.65)$$

La forma asintótica de la función de Green para este medio es

$$G_{\text{het}}^{\text{as}} = A \frac{1}{\sqrt{\rho c(z)}} \frac{1}{R_W} e^{-i\omega\tau}, \quad (5.66)$$

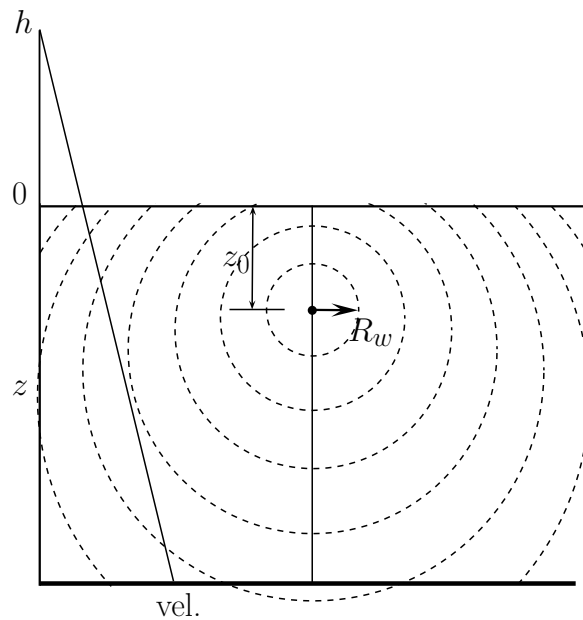


Figura 5.7: Frentes de onda (líneas segmentadas) en un medio en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad. Fuente: Autor.

Donde A es una constante. La ecuación anterior es válida en alta frecuencia. Si consideramos un volumen infinitesimal que contiene a la fuente, se puede establecer que dentro del volumen los frentes de onda son concéntricos a la fuente, y que los rayos definen líneas rectas. Por lo que, en la vecindad de la fuente, el medio puede considerarse localmente homogéneo. Como consecuencia, la constante A se puede obtener calculando el límite de la función de Green asintótica (ecuación (5.66)) para cuando el punto de observación se encuentra en la vecindad de la fuente. El límite de esta función asintótica debe ser igual a la función de Green para un medio homogéneo, la cual se define como

$$G_{\text{hom}} = \frac{1}{R} e^{-i\omega \left(\frac{R}{c_0} \right)}, \quad (5.67)$$

donde $R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$. Por lo tanto, el límite se puede expresar de la siguiente

manera

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \tau \rightarrow \frac{R}{c_0}}} (G_{\text{het}}^{\text{as}}) = G_{\text{hom}}. \quad (5.68)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.66) y (5.67) en la ecuación (5.68) y calculando el límite se tiene

$$A \frac{1}{\sqrt{\rho_0 c_0}} \frac{1}{R} e^{-i\omega \frac{R}{c_0}} = \frac{1}{R} e^{-i\omega \frac{R}{c_0}}. \quad (5.69)$$

De la ecuación (5.69) encontramos que $A = \sqrt{\rho_0 c_0}$. Sustituyendo el valor de A en la ecuación (5.66), se puede establecer la siguiente aproximación

$$G_{\text{het}}^{\text{aprox}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{z+h}{z_0+h}}} \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2(z_0+h) R_1 R_2} \right] e^{-i\omega \tau}. \quad (5.70)$$

Combinando las ecuaciones (5.70) y (5.65), se obtiene la siguiente expresión

$$G_{\text{het}}^{\text{aprox}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{z+h}{z_0+h}}} \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2(z_0+h) R_1 R_2} \right] e^{-i\omega \left[\frac{2}{\left(\frac{c_0}{z_0+h}\right)} \tanh^{-1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \right]}. \quad (5.71)$$

Para poder comparar la ecuación (5.71) con la solución de Pekeris es necesario considerar $h = 0$ y $\frac{c_0}{z_0} = a$; de esta manera se tiene que

$$G_{\text{het}}^{\text{aprox}} = \frac{2\sqrt{z_0 z}}{R_1 R_2} e^{-i\frac{\omega}{a} \left[2 \tanh^{-1} \frac{R_1}{R_2} \right]}. \quad (5.72)$$

Comparando la función aproximada (ecuación (5.72)) con la solución de Pekeris que se muestra a continuación

$$G_{\text{het}}^{\text{pek}} = \frac{2\sqrt{z_0 z}}{R_1 R_2} e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{1}{4}} \left[2 \tanh^{-1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \right]}, \quad (5.73)$$

se puede definir que estas dos soluciones (ecuaciones (5.72) y (5.73)) son iguales cuando

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{1}{4}} \approx \frac{\omega}{a}, \quad (5.74)$$

y que la ecuación (5.73) contiene la amplitud exacta.

Metodología

EN este trabajo se estudió la respuesta sísmica de medios anisótropos, heterogéneos y dispersivos. Para este fin se utilizaron modelos matemáticos que ayudan a comprender e interpretar el fenómeno de la propagación de ondas.

Se evaluó metodología para obtener la función de Green aproximada para medios donde el gradiente de la velocidad se incrementa con la profundidad, esto se hizo comparando la función de Green aproximada con la función analítica de Pekeris. La comparación se realizó utilizando sismogramas sintéticos. Se estudió la respuesta sísmica de medios estratificados a través de la deconvolución de los campos de desplazamientos, que se obtuvieron a partir de la ecuación de onda; las ecuaciones que gobiernan los campos de desplazamientos se deconvolucionaron de forma analítica para obtener las funciones de transferencia del medio, las cuales se analizaron e interpretaron; además, se generaron sismogramas sintéticos a diferentes profundidades en un medio estratificado; los sismogramas sintéticos se generaron convolucionando las ecuaciones que gobiernan los campos de desplazamientos con una función fuente. Los registros obtenidos se deconvolucionaron variando el sismograma con el cual se deconvoluciona. Los resultados obtenidos se analizaron e interpretaron. Finalmente se utilizaron acelerogramas de pozo de dos estaciones sísmicas ubicadas en el valle de México, con lo que

se estimaron velocidades del medio donde se ubican los pozos; en el caso de la estación Unidad Kennedy, se caracterizó el subsuelo donde esta ubicada la estación.

Para el estudio y análisis de los casos antes mencionados, se utilizó la metodología que se describe en el siguiente orden:

- Modelación matemática.
 1. Función de Green aproximada.
 2. Estimación de la respuesta sísmica de medios estratificados.
- Sismogramas sintéticos.
 1. Función de Green aproximada.
 2. Estimación de la respuesta sísmica de medios estratificados.
- Análisis de casos reales.
 1. Estimación de la respuesta sísmica de medios estratificados.

Los cuales se detallan a continuación.

§6.1 Modelación matemática

En esta parte se trabajaron con modelos analíticos, y se obtuvieron ecuaciones para modelar el fenómeno de la propagación de ondas.

En este trabajo se estudiaron dos casos particulares:

1. La respuesta sísmica de medios heterogéneos. En el Capítulo 5, se presenta el desarrollo de la función de Green para medios heterogéneos. La función de Green

aproximada para un medio acústico tridimensional con un gradiente de la velocidad constante se obtiene a partir de la regularización del campo de ondas. El rango de validez de esta aproximación se determina utilizando la solución de Pekeris. Utilizando la función obtenida en el Capítulo 5, se generaron sismogramas sintéticos para arreglos horizontales y verticales variando las propiedades del medio y de la función fuente, los cuales se compararon con sismogramas sintéticos generados con la solución analítica de Pekeris.

2. Estimación de la respuesta sísmica de medios estratificados a partir de la deconvolución de registros. En el Capítulo 4, se muestran las ecuaciones que gobiernan los campos de desplazamientos (u_n) en un medio estratificado; donde se presentan dos modelos particulares. Estas ecuaciones sirven para construir arreglos verticales de sismogramas sintéticos. Los sismogramas sintéticos se generan convolucionando las ecuaciones obtenidas con una fuente sísmica; la cual, puede ser una ondícula de Ricker o un acelerograma.

Como parte importante en la interpretación de resultados de la deconvolución de registros fue necesario observar, de forma matemática, el resultado de la deconvolución utilizando las ecuaciones obtenidas en el Capítulo 4 y exportar los resultados obtenidos para interpretar los registros deconvolucionados de los dos casos estudiados (pozo Chapultepec, pozo de la Unidad Kennedy).

Las ecuaciones que gobiernan los campos de desplazamientos, obtenidas en el Capítulo 4, se encuentran en el dominio de la frecuencia; por lo tanto, para deconvolucionar estas ecuaciones, solo se dividieron algebraicamente. Se obtuvieron las ecuaciones que rigen el movimiento en la superficie y a diferentes profundidades en el medio propuesto. Las ecuaciones evaluadas a diferentes profundidades se deconvolucionaron con la ecuación evaluada en la superficie; así como también, con la ecuación evaluada en la interfase formada por las fronteras entre el último

estrato y el semiespacio.

El desarrollo de las ecuaciones para los dos casos mencionados se presentan en los capítulos 5 y 4, respectivamente.

§6.2 Generación de sismogramas sintéticos

Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de la propagación de ondas, se usaron para crear sismogramas sintéticos que se generaron convolucionando dichas ecuaciones con la ondícula de Ricker. Los sismogramas sintéticos sirvieron para interpretar registros sísmicos reales.

Como se expresa por el modelo convolutivo, una traza sísmica es una ondícula convolucionada con la reflectividad de la Tierra, y ésta se determina si se conoce su estratigrafía y la distribución de la velocidad y la densidad. La reflectividad de la Tierra está expresada por las ecuaciones que gobiernan los desplazamientos en el medio, y la ondícula sísmica es la excitación que produce tales desplazamientos.

Por lo tanto, la respuesta sísmica varía cambiando los parámetros de velocidad, densidad y la atenuación en las ecuaciones que gobiernan los campos de desplazamientos. La convolución de las ecuaciones de movimiento y la fuente sísmica se realizó en el dominio de la frecuencia. Para trabajar una señal o fuente sísmica en el dominio de la frecuencia se utilizó la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés). La fuente sísmica en el dominio de la frecuencia se multiplicó con la ecuación de movimiento que contiene la información de la reflectividad y las propiedades del subsuelo (velocidad, densidad y atenuación).

La señal resultante de la convolución se transformó al dominio del tiempo usando la transformada rápida inversa de Fourier (IFFT, por sus siglas en inglés).

Para transformar la señal resultante de la convolución, al dominio del tiempo, se usó

la primera mitad de la señal; la segunda mitad se reconstruyó a partir del conjugado de la primera mitad; esta señal reconstruida se transformó al dominio del tiempo utilizando la IFFT; por último se extrajo la parte real de la señal resultante, con lo que se obtiene la traza sísmica. Este procedimiento se describe con mayor detalle en la siguiente sección y se utiliza para cualquier señal discreta.

6.2.1 Del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo

El análisis de Fourier comprende funciones transformadoras del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y la *síntesis de Fourier* el proceso inverso de transformar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo. Esto facilita operaciones entre señales, tales como la convolución y deconvolución. El punto importante de trabajar con las transformadas, es que no se pierde información en la transformación de un dominio al otro. Así, es posible realizar parte del procesamiento en el dominio de la frecuencia y otra en el dominio del tiempo.

Sea una señal de dieciséis puntos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Esta es una función caja en el dominio del tiempo. La transformada de Fourier de la señal es

1	6,00	9	0
2	$-4,65 - 0,92i$	10	$-0,18 + 0,92i$
3	$1,71 + 0,71i$	11	$0,29 - 0,71i$
4	$0,57 + 0,38i$	12	$0,26 - 0,38i$
5	$-1,00 - 1,00i$	13	$-1,00 + 1,00i$
6	$0,26 + 0,38i$	14	$0,57 - 0,38i$
7	$0,29 + 0,71i$	15	$1,71 - 0,71i$
8	$-0,18 - 0,92i$	16	$-4,65 + 0,92i$

Se puede observar que a partir del punto nueve los valores de la señal transformada se repiten como los valores conjugados de los puntos anteriores; es decir, el punto diez es igual al conjugado del punto ocho, y el punto once es igual al valor conjugado del punto siete. Solo los puntos uno y nueve no se repiten en la señal. Para transformar la señal del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo se utilizan los valores conjugados desde el punto dos hasta el punto ocho con lo que se reconstruye la señal. Esta operación se utiliza de forma numérica, de la siguiente manera:

```
for m = 2:ntm
    p = nt - m + 2;
    fseñ(p) = conj (fseñ(m));
end
```

donde `nt` es el número total de valores que contiene la señal (que en este ejemplo es `fseñ`) y `ntm` es la mitad del número total de puntos, `conj` es el comando de MATLAB[®] que obtiene el conjugado del valor entre paréntesis. Esta señal resultante se transforma con la transformada inversa de Fourier; se extrae la parte real de los valores de cada punto con lo que se obtiene, nuevamente, la señal en el dominio del tiempo.

Con el procedimiento descrito se generaron los sismogramas sintéticos para la función de Green aproximada y para el caso de los sismogramas sintéticos para medios

estratificados.

6.2.2 Comparación de la solución aproximada con la solución de Pekeris

Para validar el rango de validez de la función de Green aproximada dada por la ecuación (5.72) se compararon sismogramas sintéticos generados con esta ecuación con los obtenidos utilizando la solución analítica de Pekeris (ecuación 5.73).

Los sismogramas sintéticos se generaron siguiendo la metodología descrita en la sección §6.2, los resultados obtenidos con ambas ecuaciones se superpusieron en el mismo gráfico para observar el grado de semejanza.

6.2.3 Deconvolución de acelerogramas

La metodología que se describe en esta sección es válida para la deconvolución de acelerogramas sintéticos y acelerogramas de pozo. La deconvolución es la operación inversa de la convolución y por medio de esta técnica, es posible extraer la función de Green o la respuesta al impulso unitario del medio.

Al igual que la convolución, la deconvolución es una operación más fácil de realizar en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto, para deconvolucionar dos señales, éstas se deben de transformar al dominio de Fourier. En el dominio de la frecuencia la deconvolución es una división entre éstas. Cuando se trabajan con funciones discretas, el contenido de valores iguales a cero en la señal con la cual se deconvoluciona ocasiona que la división se inestabilice. Para evitar esta inestabilidad, la deconvolución de los registros se realizó con la siguiente fórmula (Claerbout 2005):

$$D(\omega) = \frac{Y(\omega) X^\dagger(\omega)}{|X(\omega)|^2 + \epsilon^2}, \quad (6.1)$$

donde $Y(\omega)$ denota la transformada de Fourier de la señal por deconvolucionar, $X^*(\omega)$ y $|X(\omega)|$ son el conjugado y el valor absoluto, respectivamente, de la transformada de Fourier de la segunda señal, y ϵ es un parámetro para evitar la inestabilidad. Se utilizó un valor de ϵ igual al 10% del promedio de las amplitudes de la señal $X(\omega)$.

Los modelos utilizados para la generación de sismogramas sintéticos contemplan, únicamente, la propagación de ondas SH ; por lo que, los sismogramas sintéticos se deconvolucionan utilizando la totalidad de los registros. Sin embargo, los acelerogramas de pozo registran el arribo de las ondas sísmicas que viajan a través de las capas del medio; por lo que se registran los arribos de las ondas directas (onda P , onda S y ondas superficiales), las ondas reflejadas y las ondas convertidas. Por lo cual, el caso de los acelerogramas de pozo, éstos se deconvolucionaron de la siguiente forma:

- Los acelerogramas de un evento sísmico se ordenaron en función de la profundidad,
- se seleccionaron ventanas en tiempo para la onda P , SH o incluso que contenga ambas.

La condición que se debe de cumplir para las ventanas seleccionadas, es que el número de muestras debe de ser igual a 2^n ; condición necesaria para utilizar la FFT.

- Las ventanas seleccionadas se transformaron al dominio de la frecuencia utilizando la FFT.
- En el dominio de la frecuencia, las señales transformadas se filtraron utilizando los filtros pasa-bajas tipo Butterworth y en algunos casos un filtro tipo trapecio; las señales filtradas se dividieron de la siguiente forma:
 - los registros a diferentes profundidades se dividieron entre el registro que corresponde al fondo del pozo, en el caso de acelerogramas sintéticos,

- los registros de diferentes profundidades se dividen entre el registro de la superficie, en ambos casos.
- Los registros deconvolucionados se transformaron al dominio del tiempo siguiendo la metodología mostrada en la sección §6.2.1

§6.3 Análisis de casos reales

La aplicación de teorías o métodos a casos reales permitió validar modelos analíticos y numéricos.

6.3.1 Selección de acelerogramas de pozo

Los acelerogramas utilizados en este trabajo son obtenidos por la red acelerográfica del Valle de México, la cual es administrada por: el Instituto de Ingeniería, La Fundación Barros Sierra, la fundación ICA, y el CENAPRED. Esta red cuenta con una gran cantidad de acelerografos instalados en la ciudad de México, en su gran mayoría localizados en la superficie del terreno; sin embargo, también cuenta con estaciones en las que se dispone de sensores de tres componentes situados tanto en la superficie como a diversas profundidades. La red de observación sísmica del CENAPRED se compone de dos subredes: la red de atenuación, instalada en la línea Acapulco-México, y la red de observación sísmica de la Ciudad de México. Además, cuenta con una red para el estudio de la respuesta sísmica de edificios y estructuras.

Se utilizaron los registros obtenidos de las estaciones ubicadas en pozos, con registros de superficie y a diferentes profundidades administradas por el CENAPRED. La ubicación de las estaciones de registro estudiadas se muestran en la Figura 6.1, donde se observan los pozos que forman parte de la red sísmica. La estación de la Unidad

Kennedy corresponde a la estación No 9 y la estación Chapultepec es la estación No 14 de la red sísmica del CENAPRED.

Los acelerogramas de pozo se obtuvieron de la Base Mexicana de Datos de Sismos Fuertes, 2a. edición, publicada en el año 2000. El catálogo contempla 13,545 acelerogramas; los cuales corresponden a eventos sísmicos ocurridos en el periodo de 1960 a 1999. Los acelerogramas utilizados corresponden a registros de pozos de la red sísmica del CENAPRED. Los acelerogramas son archivos en formato de texto (.txt), para procesarlos de forma digital las aceleraciones se copiaron a un matriz de datos y se guardaron en archivos de formato legible para MATLAB® (.mat).

Para tener un control en los archivos, los acelerogramas se clasificaron de la siguiente forma:

- sismogramas por su ubicación (pozo),
- sismogramas por su magnitud,
- sismogramas por fecha del evento sísmico.

La clasificación anterior se hizo con el propósito de observar posibles cambios en la respuesta sísmica del subsuelo y observar la respuesta sísmica del sitio con el paso del tiempo, con la intención de determinar si un sismo fuerte influyó en algún posible cambio.

Para la estimación de velocidades de propagación, se utilizó la deconvolución de acelerogramas. Esta técnica fue utilizada por Snieder y Şafak (2006), en la extracción de la respuesta sísmica del edificio de la biblioteca Robert A. Millikan del Instituto de Tecnología de California; y retomada posteriormente por Mehta (2006), para la extracción de la respuesta sísmica de la bahía de San Francisco.

Las velocidades de propagación de la onda que viaja por el medio se estimó midiendo

los tiempos de las ondículas deconvolucionadas y dividiendo la distancia existente entre los acelerómetros ubicados en el pozo entre el promedio de las ondículas causales y acausales. Este procedimiento se describe con mayor detalle en la sección §7.4.3.

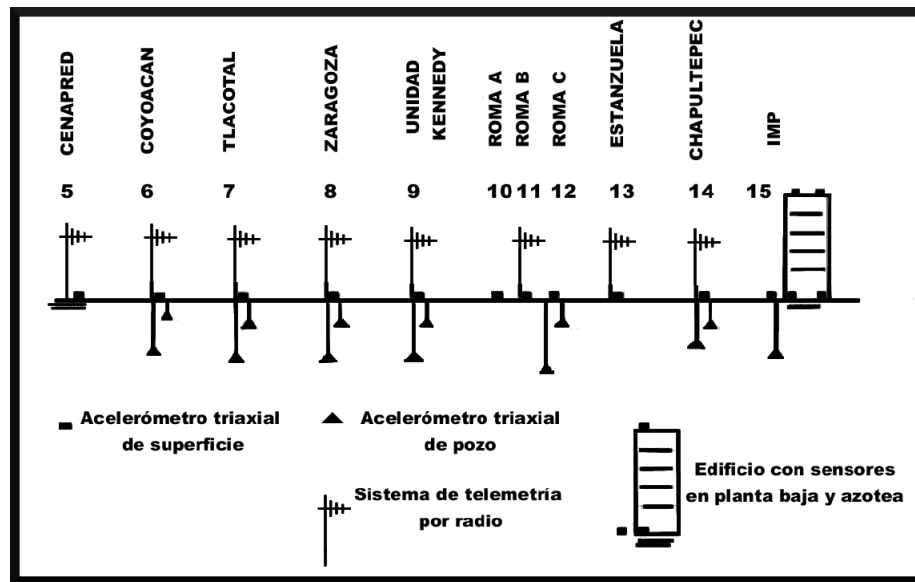


Figura 6.1: Estaciones de la red de Observación Sísmica de la Ciudad de México. Fuente: Autor.

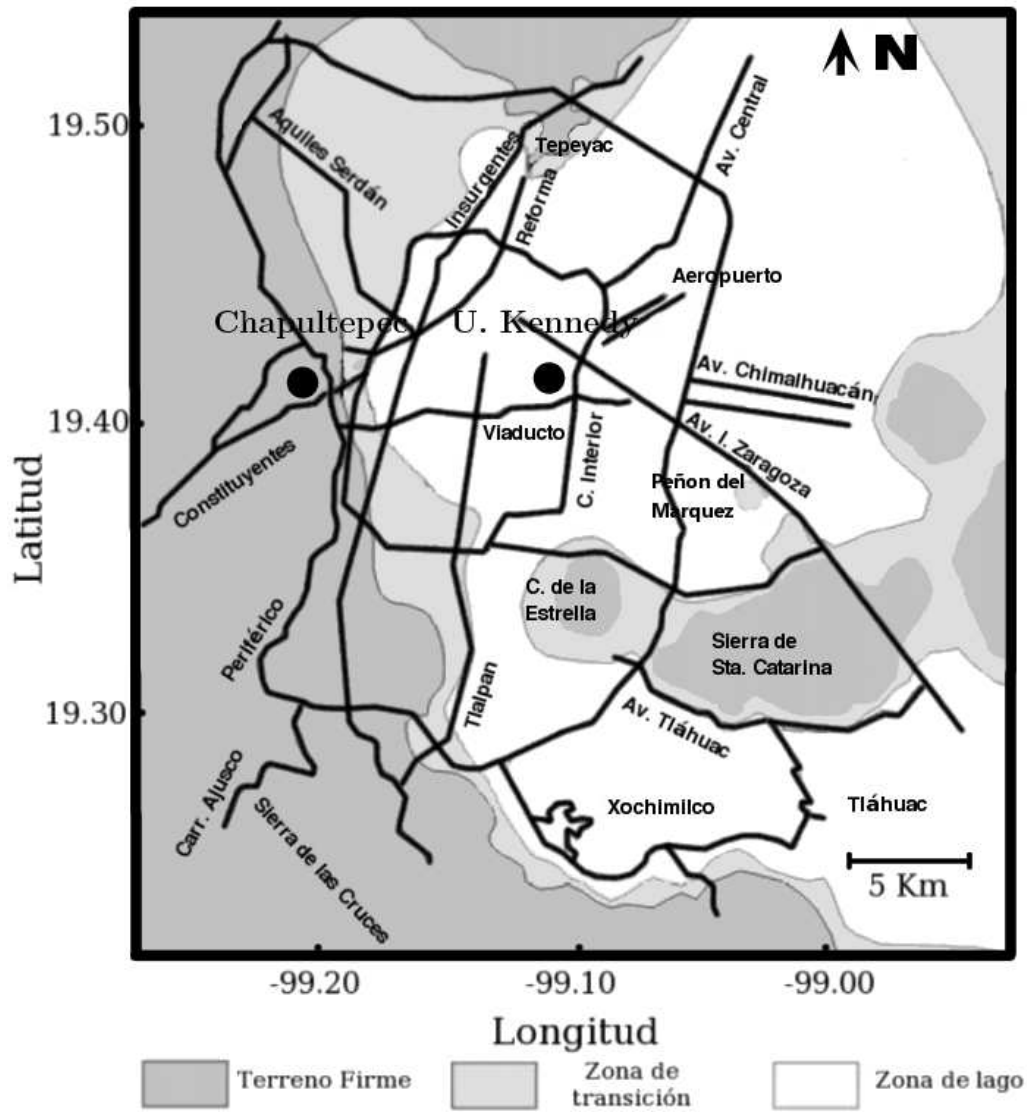


Figura 6.2: Estaciones de la Red Acelerográfica de la Ciudad de México (CENAPRED, CIRES, Instituto de Ingeniería, UNAM), la Unidad Kennedy está dentro del círculo gris en la zona del lago y el pozo Chapultepec dentro del círculo negro en la zona de terreno firme. Fuente: Autor.

Análisis y discusión de resultados

§7.1 Comparación de la solución aproximada con la solución de Pekeris

La solución aproximada dada por la ecuación (5.72) se comparó con la solución de Pekeris (ecuación (5.73)), utilizando los arreglos de receptores que se muestran en la Figura 7.1. Se utilizó un gradiente de velocidad constante de $a = 0.5$, para una fuente con una profundidad de $z_0 = 1.3$ km, los receptores están ubicados para el caso horizontal a una profundidad $z = 1.0$ km; y para el caso vertical a una distancia horizontal de la fuente $r = 0.1$ km, el intervalo entre los receptores es de 0.1 km, para ambos casos. El intervalo de muestreo es $dt = 0.05$ segundos.

Para obtener los sismogramas se convolucionaron las ecuaciones (5.72) y (5.73) con el pulso de Ricker; esto se validó en el dominio de la frecuencia. El periodo del pulso de Ricker es de 1.0 segundos, para realizar la convolución se transformó la ondícula de Ricker al dominio de la frecuencia utilizando la FFT; la señal obtenida se transformó al dominio del tiempo siguiendo la metodología descrita en la sección §6.2.1.

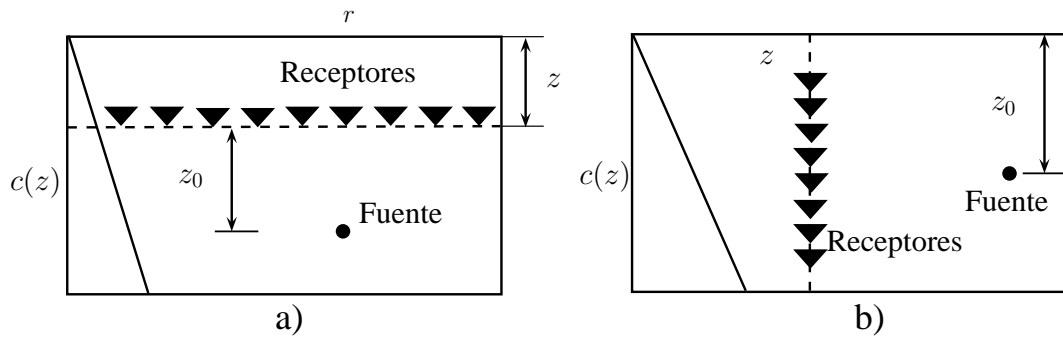


Figura 7.1: a) arreglo horizontal y b) arreglo vertical. Fuente: Autor.

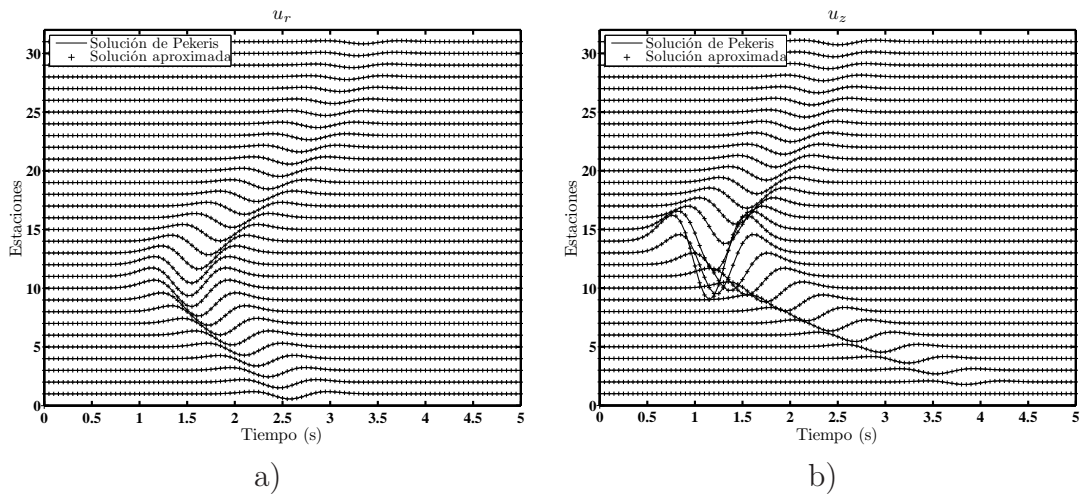


Figura 7.2: Comparación de la solución aproximada y la solución de Pekeris, para a) receptores horizontales y b) receptores verticales. Fuente: Autor.

Posteriormente, se variaron los parámetros de profundidad, el gradiente de velocidad a (Figura 7.3), el periodo del pulso de Ricker y el intervalo de muestreo $dt = 0.01$ segundos. Se utilizó un pulso de Ricker con $tp = 0.15$ segundos y $ts = 0.15$ segundos, un gradiente de la velocidad $a = 1.5$, la fuente sísmica está ubicada en $z_0 = 1.0$ km y $r_0 = 0$ km; para el caso de un arreglo de receptores verticales, el punto de observación z se encuentra a una profundidad de 1.0 km, para el arreglo horizontal, el punto de

observación está a una distancia $r = 0.15$ km; en ambos casos, se usaron 31 receptores con un espaciamiento entre ellos de 0.1 km.

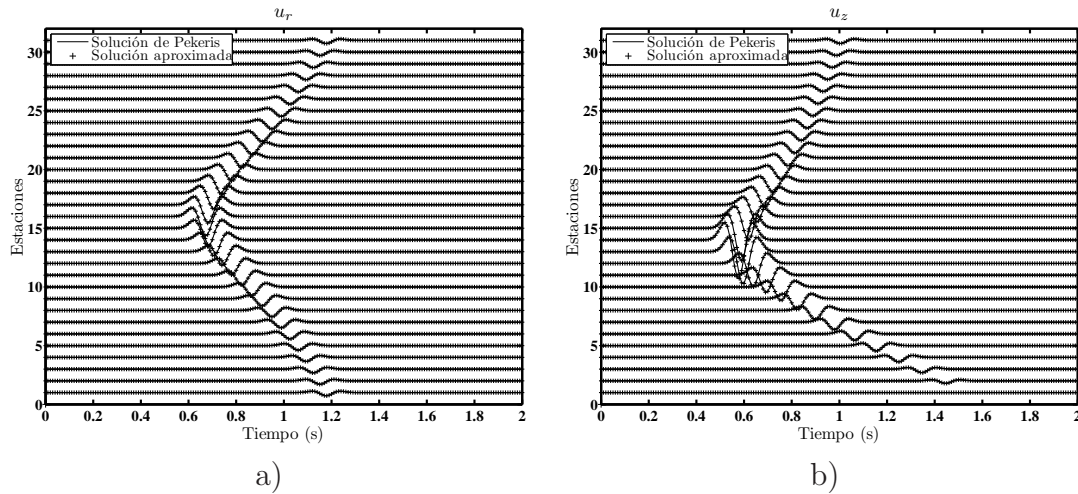


Figura 7.3: Comparación de la solución aproximada con la solución de Pekeris, para a) receptores horizontales y b) receptores verticales. Fuente: Autor.

La función de Green aproximada se puede utilizar en el proceso de migración de datos, para corregir amplitudes. También, se puede utilizar para modelar la respuesta de valles aluviales utilizando el Método indirecto de elementos de frontera (IBEM, por sus siglas en inglés; a diferencia de los métodos de dominio (elementos finitos y diferencias finitas), el IBEM representa la esperanza más realista para este tipo de simulaciones.

7.1.1 Migración de datos sísmicos

El método sísmico para la exploración del subsuelo, se fundamenta en las diferentes velocidades de propagación de las ondas que viajan a través de diferentes medios materiales. En la zona a explorar, se colocan receptores de onda llamados geófonos separados entre sí una distancia determinada. Con los geófonos, se captan los desplazamientos, y se transmiten a un sistema de registro. En un medio homogéneo e isótropo, el patrón definido por los tiempos de arribo de la onda sísmica es una hipérbola. Para la construcción de sismogramas sintéticos, se utiliza el arreglo conocido como *zero-offset* ó distancia cero (Figura 7.4).

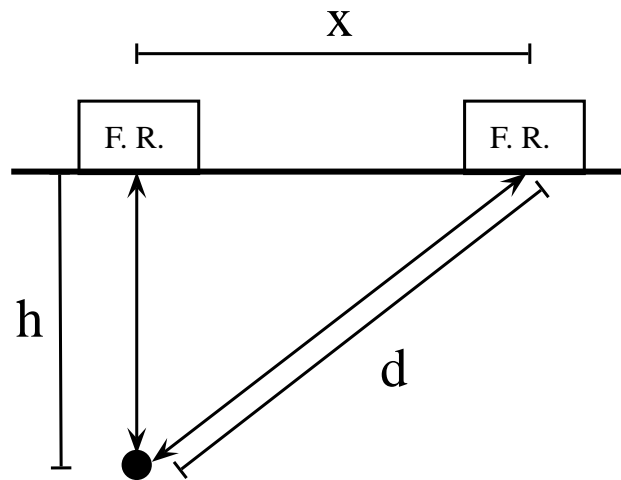


Figura 7.4: Arreglo zero-offset o distancia cero. El medio es homogéneo e isótropo. Las fuentes están ubicadas en las posiciones de los receptores. Fuente: Autor.

La migración de datos es el proceso por el medio del cual se obtiene la imagen del subsuelo colocando la energía reflejada en su posición verdadera (Bancroft, 2001). La tendencia es considerar que la trayectoria de las ondas reflejadas es aproximadamente vertical; aunque, esto sólo ocurre cuando los receptores que se encuentran localizados por encima del difractor.

Para cualquier otro punto de la superficie, la trayectoria reflejada es inclinada. El sobretiempo con respecto a la distancia puede calcularse si se conoce la velocidad del medio.

En la práctica es importante identificar hipérbolas; ya que la forma de éstas se ve afectada por la velocidad usada en la migración.

En un medio homogéneo, las ondas difractadas por un difractor inmerso en el subsuelo definen una hipérbola, como se observa en la Figura 7.5; durante el proceso de migración de datos, es posible recobrar la energía reflejada utilizando un perfil de velocidad constante (Figuras 7.5 y 7.6). Si el medio es heterogéneo y se efectúa el proceso de migración asumiendo que el medio presenta una velocidad constante, la posición obtenida después de la migración será incorrecta; así como también las amplitudes, ya que, la energía recobrada no corresponde a la totalidad de los arribos.

Esta es una de las razones por la cual es importante conocer la función de Green para medios heterogéneos.

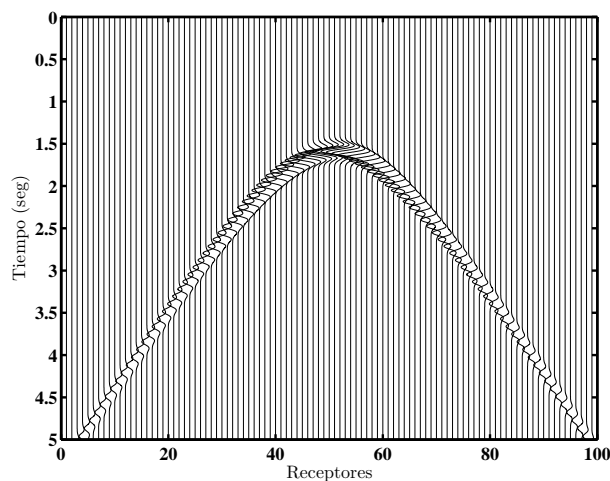


Figura 7.5: Sismogramas generados para un difractor inmerso en un medio homogéneo. Se utilizó un pulso de Ricker con una frecuencia dominante $f_p = 5$. Fuente: Autor.

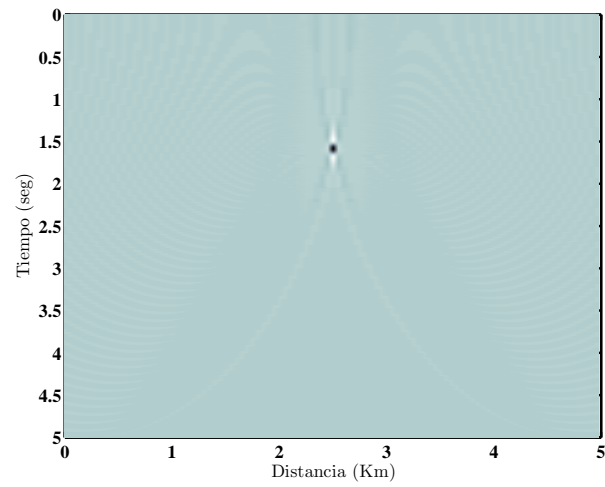


Figura 7.6: Migración de los datos ilustrados en la Figura 7.5. Se utilizó la migración de Kirchhoff. Fuente: Autor.

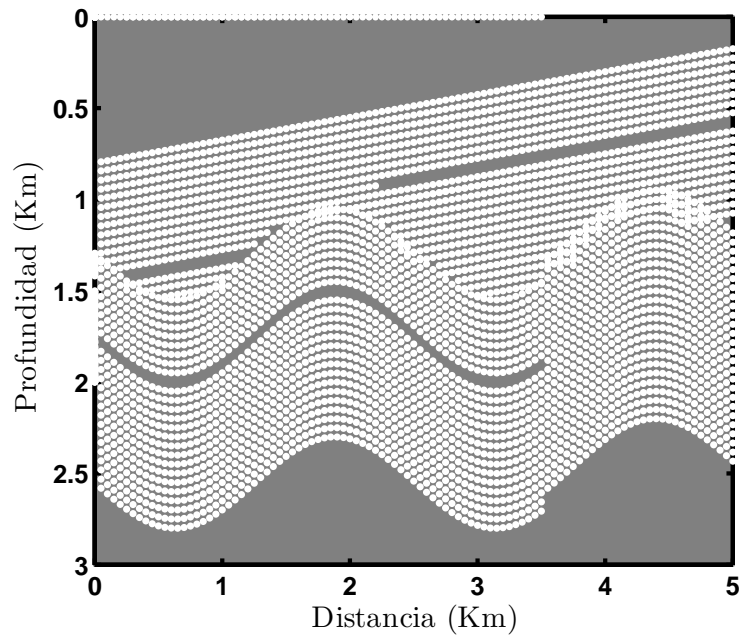


Figura 7.7: Disposición de los difractores en el subsuelo; la disposición de los difractores genera estratos en el subsuelo. Se puede apreciar también, la presencia de una falla en el lado derecho de la imagen. Los difractores se muestran en color blanco. Fuente: Autor.

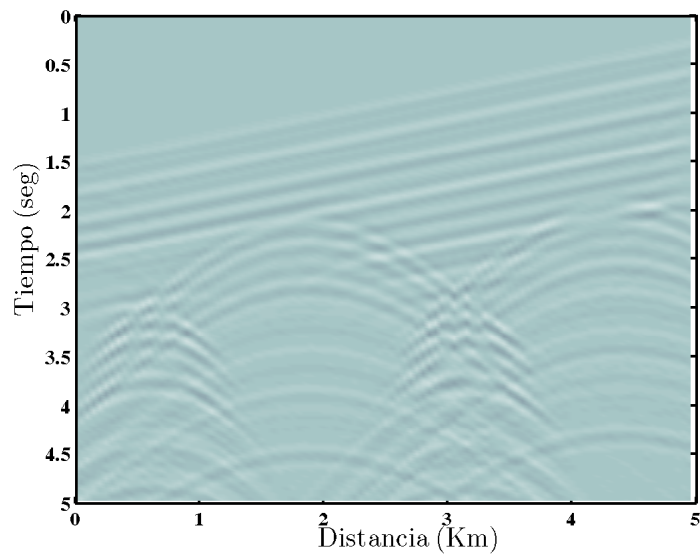


Figura 7.8: Sismogramas generados para el arreglo de la Figura 7.7. Para modelar estos datos, se utilizaron pulsos de Ricker con varias frecuencias dominantes; así como también, se utilizaron diversas amplitudes. Fuente: Autor.

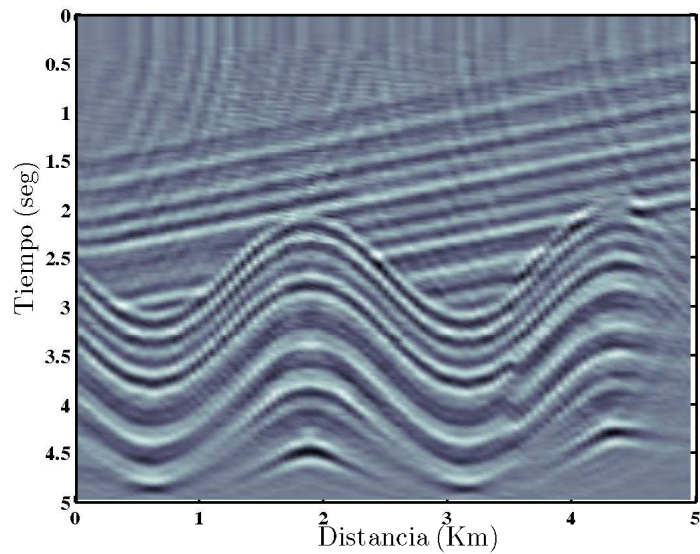


Figura 7.9: Migración de los datos ilustrados en la Figura 7.8. Se utilizó la migración de Kirchhoff. Fuente: Autor.

§7.2 Ondas deconvolucionadas

7.2.1 Relación entre registros sísmicos correspondientes a diferentes profundidades. Caso n-estratos

En esta sección, se muestra la deconvolución de las ecuaciones de movimiento en un medio estratificado. Las ecuaciones son evaluadas a diferentes profundidades y deconvolucionadas con respecto a la ecuación evaluada en la superficie ($z = 0$); también, se deconvolucionaron con respecto al movimiento registrado en $z = H$. El modelo utilizado en esta sección consiste de tres estratos y un semiespacio (ecuaciones descritas en la sección §4.1); los espesores de los estratos son h_1, h_2, h_3 , donde los subíndices 1, 2 y 3 denotan al primero, segundo y el tercer estrato.

El campo de desplazamientos en la superficie siguiendo la convención mostrada en la Figura 4.1 se expresa como:

$$u_1(0, \omega), \quad (7.1)$$

donde ω representa la frecuencia circular. Para realizar las deconvoluciones a diferentes profundidades se utilizaron campos de desplazamientos calculados según las profundidades que se deseen; como el estrato uno tiene un espesor igual a h_1 , entonces se utiliza una profundidad menor a h_1 , por ejemplo un valor a . Por lo que, el campo de desplazamientos en $z = a$ está definido por

$$u_1(a, \omega). \quad (7.2)$$

Utilizando profundidades tales que, los campos de desplazamientos calculados estén

dentro de los estratos subsecuentes resulta

$$u_2(h_1 + b, \omega), \quad (7.3)$$

donde $h_1 < h_1 + b < h_2$, para un punto ubicado dentro del segundo estrato y

$$u_3(h_1 + h_2 + c, \omega), \quad (7.4)$$

donde $h_1 + h_2 < h_1 + h_2 + c < h_1 + h_2 + h_3$, para un punto dentro del estrato tres; h_2 es el espesor del estrato dos, b y c son valores que permiten evaluar las ecuaciones dentro de los estratos dos y tres, respectivamente.

Puesto que las funciones evaluadas están en el dominio de la frecuencia, entonces para realizar la deconvolución sólo es necesario realizar una división algebraica. La deconvolución de los campos de desplazamientos evaluados en diferentes profundidades con respecto al movimiento registrado en la superficie se presenta a continuación:

$$\frac{u_1(a, \omega)}{u_1(0, \omega)} = \cos(ak_1), \quad (7.5)$$

esta ecuación representa la deconvolución de la función correspondiente al campo de desplazamientos del estrato uno, evaluada en $z = a$, con respecto al campo de desplazamientos registrado en la superficie ($z = 0$).

$$\frac{u_2(h_1 + b, \omega)}{u_1(0, \omega)} = \cos(h_1 k_1) \cos(bk_2) - \frac{\sin(h_1 k_1) \sin(bk_2) k_1 \beta_1^2 \rho_1}{k_2 \beta_2^2 \rho_2}, \quad (7.6)$$

la ecuación anterior define la deconvolución de $u_2(h_1 + b, \omega)$ con respecto a $u_1(0, \omega)$. En el caso de la deconvolución de $u_3(h_1 + h_2 + c, \omega)$ con respecto al movimiento registrado

en la superficie se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{u_3(h_1 + h_2 + c, \omega)}{u_1(0, \omega)} &= \cos(h_1 k_1) \cos(h_2 k_2) \cos(ck_3) - \frac{\cos(ck_3) \sin(h_1 k_1) \sin(h_2 k_2) k_1 \beta_1^2 \rho_1}{k_2 \beta_2^2 \rho_2} - \\ &- \frac{\sin(ck_3) (\cos(h_2 k_2) \sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1)}{k_3 \beta_3^2 \rho_3} + \\ &+ \frac{\sin(ck_3) (\cos(h_1 k_1) \sin(h_2 k_2) k_2 \beta_2^2 \rho_2)}{k_3 \beta_3^2 \rho_3}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

La deconvolución del campo de desplazamientos medido en algún punto del semiespacio ($u_3(h_1 + h_2 + h_3 + d, \omega)$) con respecto al movimiento registrado en la superficie da como resultado:

$$\begin{aligned} \frac{u_4(h_1 + h_2 + h_3 + d, \omega)}{u_1(0, \omega)} &= -\frac{1}{k_2 k_3 k_4 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2 \rho_2 \rho_3 \rho_4} (\sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1 (\sin(h_2 k_2) k_3 \beta_3^2 \rho_3 (-\sin(h_3 k_3) \\ &\sin(dk_4) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + \cos(h_3 k_3) \cos(dk_4) k_4 \beta_4^2 \rho_4) + \cos(h_2 k_2) k_2 \beta_2^2 \rho_2 \\ &(\cos(h_3 k_3) \sin(dk_4) k_3 \beta_3^2 \rho_3 + \cos(dk_4) \sin(h_3 k_3) k_4 \beta_4^2 \rho_4)) + \\ &\cos(h_1 k_1) k_2 \beta_2^2 \rho_2 (\cos(h_2 k_2) k_3 \beta_3^2 \rho_3 (\sin(h_3 k_3) \sin(dk_4) k_3 \beta_3^2 \rho_3 - \\ &\cos(h_3 k_3) \cos(dk_4) k_4 \beta_4^2 \rho_4) + \sin(h_2 k_2) k_2 \beta_2^2 \rho_2 (\cos(h_3 k_3) \sin(dk_4) \\ &k_3 \beta_3^2 \rho_3 + \cos(dk_4) \sin(h_3 k_3) k_4 \beta_4^2 \rho_4))). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Si se expresa la ecuación (7.5) en términos de funciones exponenciales se tiene :

$$\frac{u_1(a, \omega)}{u_1(0, \omega)} = \frac{1}{2} e^{-iak_1} + \frac{1}{2} e^{iak_1}, \quad (7.9)$$

la ecuación (7.9) representa dos ondas, que se pueden interpretar como una onda ascendente y una onda descendente; ambas con la misma amplitud. El mismo análisis realizado a la expresión (7.6) da como resultado

$$\begin{aligned} \frac{u_2(h_1 + b, \omega)}{u_1(0, \omega)} &= \frac{1}{4} (e^{-ih_1 k_1} + e^{ih_1 k_1}) (e^{-ibk_2} + e^{ibk_2}) + \\ &+ \frac{(e^{-ih_1 k_1} - e^{ih_1 k_1}) (e^{-ibk_2} - e^{ibk_2}) k_1 \beta_1^2 \rho_1}{4k_2 \beta_2^2 \rho_2}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

haciendo $k = \frac{\omega}{\beta}$ agrupando términos y simplificando se obtiene

$$\frac{u_2(h1 + b, \omega)}{u_1(0, \omega)} = \left(\frac{\beta_2 \rho_2 + \beta_1 \rho_1}{4\beta_2 \rho_2} \right) \left(e^{-i\omega \left(\frac{h_1}{\beta_1} + \frac{b}{\beta_2} \right)} + e^{i\omega \left(\frac{h_1}{\beta_1} + \frac{b}{\beta_2} \right)} \right) - \left(\frac{\beta_2 \rho_2 - \beta_1 \rho_1}{4\beta_2 \rho_2} \right) \left(e^{-i\omega \left(\frac{h_1}{\beta_1} - \frac{b}{\beta_2} \right)} + e^{i\omega \left(\frac{h_1}{\beta_1} - \frac{b}{\beta_2} \right)} \right), \quad (7.11)$$

donde se pueden apreciar dos pares de ondas, las dos primeras representan una onda ascendente y una descendente, mientras que las otras dos son de menor amplitud. Si se realiza el mismo análisis a los campos deconvolucionados correspondientes a los estratos dos y tres y al semiespacio, se observa que a mayor profundidad se obtiene un mayor número de ondas, por ejemplo, el campo deconvolucionado asociado con el estrato tres presenta ocho ondas; como consecuencia, el número de ondas resultante es igual a 2^n , donde n es el número del estrato. También, se puede observar que si $\beta_1 = \beta_2$ y $\rho_1 = \rho_2$, la ecuación (7.11) se reduce a la expresión (7.9).

El campo de desplazamientos evaluado en la base del modelo es

$$u_3(H, \omega), \quad (7.12)$$

donde H es el espesor total resultado de la suma de los espesores de los tres estratos. Deconvolucionando los campos de desplazamientos evaluados en la superficie y en las fronteras de los estratos con respecto al movimiento registrado en $z = H$, se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{u_1(0, \omega)}{u_3(H, \omega)} = - (k_2 k_3 \beta_2^2 \beta_3^2 \rho_2 \rho_3) / (\cos(h_1 k_1) k_2 \beta_2^2 \rho_2 (\sin(h_2 k_2) \sin(h_3 k_3) k_2 \beta_2^2 \rho_2 - \cos(h_2 k_2) \cos(h_3 k_3) k_3 \beta_3^2 \rho_3) + \sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1 (\cos(h_2 k_2) \sin(h_3 k_3) k_2 \beta_2^2 \rho_2 + \cos(h_3 k_3) \sin(h_2 k_2) k_3 \beta_3^2 \rho_3)), \quad (7.13)$$

$$\frac{u_1(h_1, \omega)}{u_3(H, \omega)} = \frac{(k_2 k_3 \beta_2^2 \beta_3^2 \rho_2 \rho_3) / (k_2 \beta_2^2 \rho_2 (-\sin(h_2 k_2) \sin(h_3 k_3) k_2 \beta_2^2 \rho_2 + \cos(h_2 k_2) \cos(h_3 k_3) k_3 \beta_3^2 \rho_3) - k_1 \beta_1^2 \rho_1 (\cos(h_2 k_2) \sin(h_3 k_3) k_2 \beta_2^2 \rho_2 + \cos(h_3 k_3) \sin(h_2 k_2) k_3 \beta_3^2 \rho_3) \tan(h_1 k_1))}{\tan(h_1 k_1)}, \quad (7.14)$$

$$\frac{u_2(h_1 + h_2, \omega)}{u_3(H, \omega)} = \frac{1}{\cos(h_3 k_3) + \frac{\sin(h_3 k_3) k_2 \beta_2^2 \rho_2 (\cos(h_2 k_2) \sin(h_1 k_1) k_1 \beta_1^2 \rho_1 + \cos(h_1 k_1) \sin(h_2 k_2) k_2 \beta_2^2 \rho_2)}{k_3 \beta_3^2 (\sin(h_1 k_1) \sin(h_2 k_2) k_1 \beta_1^2 \rho_1 - \cos(h_1 k_1) \cos(h_2 k_2) k_2 \beta_2^2 \rho_2)} \rho_3}. \quad (7.15)$$

Estas funciones de transferencia se utilizaron para generar sismogramas sintéticos.

7.2.2 Relación entre registros sísmicos correspondientes a diferentes profundidades, caso un estrato

En la sección §4.2, se obtuvo la ecuación que gobierna el campo de desplazamientos en un estrato, y se estableció la relación que existe entre la velocidad de las ondas de corte, el espesor y el periodo característico del estrato (ecuación (4.22)). Con la ecuación (4.22), se puede analizar el comportamiento del suelo y estudiar varios parámetros de respuesta, tales como desplazamientos, velocidad, aceleración, esfuerzos, entre otros. Dentro de los parámetros estudiados, el de mayor relevancia en la ingeniería sísmica es el periodo característico del suelo. La deconvolución de registros es una técnica desarrollada a partir del modelo convolutivo de una traza sísmica, la deconvolución nos permite separar los efectos de la fuente y de la trayectoria de la onda, y obtener únicamente la respuesta del sitio; el espectro de amplitudes de la traza deconvolucionada contiene las frecuencias características del sitio. En esta sección se analiza y describe la

relación que existe entre el movimiento registrado en la base del estrato y el movimiento detectado en la superficie.

Evalutando la ecuación (4.17) en $z = 0$, se tiene que

$$u_2(0, \omega) = \frac{2A_0 e^{i\omega t} \cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right) + i\left(\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)}, \quad (7.16)$$

esta ecuación representa el movimiento en la base del estrato; evaluando la ecuación (4.17) en $z = -H$, se obtiene

$$u_2(-H, \omega) = \frac{2A_0 e^{i\omega t}}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right) + i\left(\frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)}, \quad (7.17)$$

que define el movimiento en la superficie del estrato. Como las expresiones que definen los campos de desplazamientos están en el dominio de la frecuencia, para realizar la deconvolución sólo es necesario efectuar divisiones algebraicas; dividiendo la ecuación (4.17) entre la ecuación (7.17), se tiene

$$S(z, \omega) = \frac{u_2(z, \omega)}{u_2(-H, \omega)} = \cos\left(\omega \frac{z+H}{\beta_2}\right), \quad (7.18)$$

que representa la deconvolución del movimiento registrado en cualquier punto del estrato con respecto al movimiento de la superficie; deconvolucionando la ecuación (4.17) con respecto a la ecuación (7.16), se obtiene

$$B(z, \omega) = \frac{u_2(z, \omega)}{u_2(0, \omega)} = \frac{\cos\left(\omega \frac{z+H}{\beta_2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)}, \quad (7.19)$$

esta ecuación representa la deconvolución del movimiento registrado en cualquier punto del estrato con respecto al movimiento de la base. De la ecuación (7.19), se puede

establecer que el numerador de esta ecuación es igual a $S(z, \omega)$, por lo tanto

$$B(z, \omega) = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)} \right) S(z, \omega). \quad (7.20)$$

De la ecuación (7.20), la función entre paréntesis puede interpretarse como la función de transferencia de un estrato que se encuentra localizado encima de un semiespacio rígido. Esta función es una versión normalizada de la ecuación (4.21).

Simplificando la ecuación (7.20), se tiene que

$$\frac{B(z, \omega)}{S(z, \omega)} = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)} \right). \quad (7.21)$$

Definición de $S(z, \omega)$ y $B(z, \omega)$, ecuaciones (7.18) y (7.19), respectivamente, se puede establecer que

$$\frac{u_2(-H, \omega)}{u_2(0, \omega)} = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)} \right). \quad (7.22)$$

La ecuación (7.22) indica que la función de transferencia $\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{\beta_2}\right)} \right)$ puede ser obtenida deconvolucionando el evento registrado en la superficie con respecto al evento registrado en la base del estrato.

En la ecuación (7.22) no se incluye la atenuación del medio; la energía sísmica es disipada en sólidos y en las estructuras por diversos mecanismos, entre los que se encuentran: la fricción y el comportamiento plástico del medio. Cuando la onda se propaga, la energía asociada al movimiento ondulatorio es absorbida gradualmente por el medio, reapareciendo en última instancia en forma de calor, a este proceso se le conoce como absorción. Aunque para la deducción de la ecuación (7.16) se consideró que la atenuación era nula, ésta puede introducirse en el modelo a través de la expresión correspondiente al número de onda.

7.2.3 Propiedades de la deconvolución

La deconvolución del movimiento registrado en z con el movimiento registrado en z_0 está dado por la siguiente expresión

$$D(z, z_0, \omega) = \frac{u(z, \omega)}{u(z_0, \omega)}. \quad (7.23)$$

La relación entre las ondas deconvolucionadas y las ondas generadas por la fuente virtual depende del principio de causalidad (Snieder, 2006), el cual establece que las ondas no pueden propagarse con una velocidad mayor que la velocidad máxima β del medio, y de la linealidad del sistema invariante en el tiempo. Para que los campos deconvolucionados cumplan con el principio de causalidad, $D(z, z_0, \omega)$ debe satisfacer la ecuación de Helmholtz al igual que $u(z, \omega)$;

$$L(z, \omega)u(z, \omega) = 0, \quad (7.24)$$

donde L es un operador diferencial lineal y está representado por la siguiente expresión

$$L = \left(\nabla^2 + \frac{\omega}{\beta} \right). \quad (7.25)$$

La ecuación (7.24) es igual a cero debido a la ausencia de fuentes. Aplicando el operador L a la ecuación (7.23), se tiene

$$LD(z, z_0, \omega) = 0, \quad (7.26)$$

Sustituyendo las expresiones (7.23) y (7.25) en la ecuación (7.26), se tiene que

$$\left(\frac{\nabla^2 + \omega^2}{\beta} \right) \left(\frac{u(z, \omega)}{u(z_0, \omega)} \right) = 0. \quad (7.27)$$

Simplificando la ecuación (7.27), se obtiene

$$\nabla^2 \frac{u(z, \omega)}{u(z_0, \omega)} + \frac{\omega^2}{\beta^2} \frac{u(z, \omega)}{u(z_0, \omega)} = 0. \quad (7.28)$$

Asumiendo que la propagación es unidimensional

$$\frac{\partial^2 u(z, \omega)}{\partial z^2 u(z_0, \omega)} + \frac{\omega^2}{\beta} \frac{u(z, \omega)}{u(z_0, \omega)} = 0, \quad (7.29)$$

las expresiones (7.28) y (7.29) demuestran que $D(z, z_0, \omega)$ satisface la ecuación de onda (ecuación (3.42)); por consiguiente, esta expresión también satisface el principio de causalidad.

A continuación se presentan algunos comentarios acerca de la derivación de la ecuación (7.28):

1. La expresión (7.28) considera cualquier número de dimensiones.
2. El campo de ondas $u(z, \omega)$ podría ser un campo vectorial y el operador puede ser una matriz.
3. El campo deconvolucionado

$$D(z, z_0, \omega) = \frac{u(z, \omega)}{u(z_0, \omega)}, \quad (7.30)$$

satisface condiciones de frontera que difieren de las condiciones que cumplen $u(z, \omega)$ y $u(z_0, \omega)$.

4. Como se mencionó en el punto anterior, la deconvolución $D(z, z_0, \omega)$ no necesariamente satisface las condiciones de frontera de $u(z, \omega)$. Esto puede ser usado para crear fuentes virtuales en un sistema hipotético con condiciones de frontera particulares.

5. El razonamiento utilizado para la deconvolución de ondas también aplica para la correlación de ondas; la correlación se define en el dominio de la frecuencia como:

$$C(z, z_0, \omega) = u(z, \omega)u^\dagger(z_0, \omega), \quad (7.31)$$

donde $u^\dagger(z_0, \omega)$ es el conjugado de $u(z_0, \omega)$; de la ecuación (7.30), se puede establecer que $(C(z, z_0, \omega))$ es solución de la ecuación de Helmholtz.

Con respecto a la interpretación de las ondas deconvolucionadas, desde el punto de vista físico se tiene la siguiente condición de causalidad

$$d(z, z_0, t = 0) = 0, g \quad (7.32)$$

para $z \neq z_0$. Esta condición indica que la deconvolución entre los registros sísmicos es igual a cero para $t = 0$. Esto se ilustra en la Figura 7.12.

De la ecuación (7.23), se puede establecer que para el caso $z = z_0$

$$D(z_0, z_0, \omega) = \frac{u(z_0, \omega)}{u(z_0, \omega)} = 1, \quad (7.33)$$

de modo que en el dominio del tiempo

$$d(z_0, z_0) = \delta(t). \quad (7.34)$$

Esta propiedad de las ondas deconvolucionadas se ilustran en la Figura 7.12. La deconvolución de un registro consigo mismo da lugar a una función delta, como se observa en el registro denotado **F** en la Figura 7.12 (círculo línea continua); donde se observa un pulso unitario o fuente virtual en $t = 0$.

De la ecuación (7.34), se puede establecer que

$$d(z_0, z_0, t) = 0, \quad (7.35)$$

para $t \neq 0$, ya que la función $\delta(t)$ es igual a cero para $t \neq 0$.

La deconvolución de todos los registros con respecto al registro de la base, se puede interpretar como la creación de una fuente virtual. Este campo de ondas esta definido por

$$D(z, z_H, \omega) = \frac{u(z, \omega)}{u(z_H, \omega)}, \quad (7.36)$$

§7.3 Deconvolución de registros sísmicos sintéticos

Los ejemplos que se muestran a continuación se generaron convolucionando la ecuación (4.20) con un pulso de Ricker. Los acelerogramas están distribuidos en un arreglo vertical a través del estrato y se encuentran espaciados a intervalos regulares.

En este caso, se utilizó un pulso de Ricker (ecuación (2.3)) con un retraso temporal $ts = 2$ segundos y un periodo $tp = 0.8$. La ondícula de Ricker es la función fuente que se introduce al sistema; convolucionando el pulso con la ecuación (4.17) se obtienen los registros sísmicos sintéticos. Variando la velocidad y la densidad en el estrato, se puede observar como cambia la respuesta sísmica del medio.

Los sismogramas sintéticos tienen un total de 32768 muestras con un $\Delta t = 0.001$ segundos. El espesor del estrato es $h = 1$ km, los acelerogramas sintéticos son registrados a cada 100 m en un arreglo vertical como se muestra en la Figura 7.10. El estrato tiene una velocidad $\beta_1 = 0.5$ km/s y su densidad es $\rho_1 = 1.0$ kg/m³, la velocidad del semiespacio es $\beta_2 = 1.0$ km/s con una densidad $\rho_2 = 1.0$ kg/m³. Se utilizó un factor de calidad $Q_1 = 100$ para el estrato y $Q_2 = 10000$ para el semiespacio. Los acelerogramas

se muestran en la Figura 7.11.

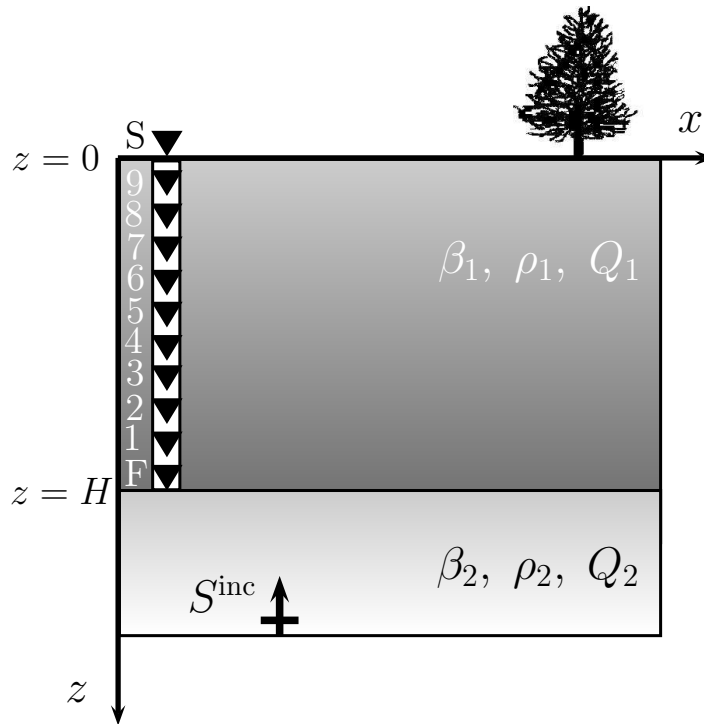


Figura 7.10: Distribución de los detectores en el estrato; estos se denotan por los triángulos. Fuente: Autor.

En la Figura 7.11 se observa claramente, siguiendo el movimiento del medio, la trayectoria de la onda que viaja por el estrato; la onda incidente viaja a través de éste, al llegar a la frontera libre (superficie), la amplitud de la onda se duplica y la onda es reflejada; una parte de la energía reflejada al llegar a la frontera con el semiespacio es transmitida y otra parte es reflejada; esta perturbación reflejada presenta polaridad invertida, debido a que la interfase es una frontera elástica; este proceso se repite hasta que la energía se disipa debido a la dispersión geométrica y a la atenuación introducida. La transmisión de ondas se revisó en la sección §3.9.

La deconvolución es una técnica que se le denomina filtro inverso, ya que permite

recuperar la respuesta sísmica del medio.

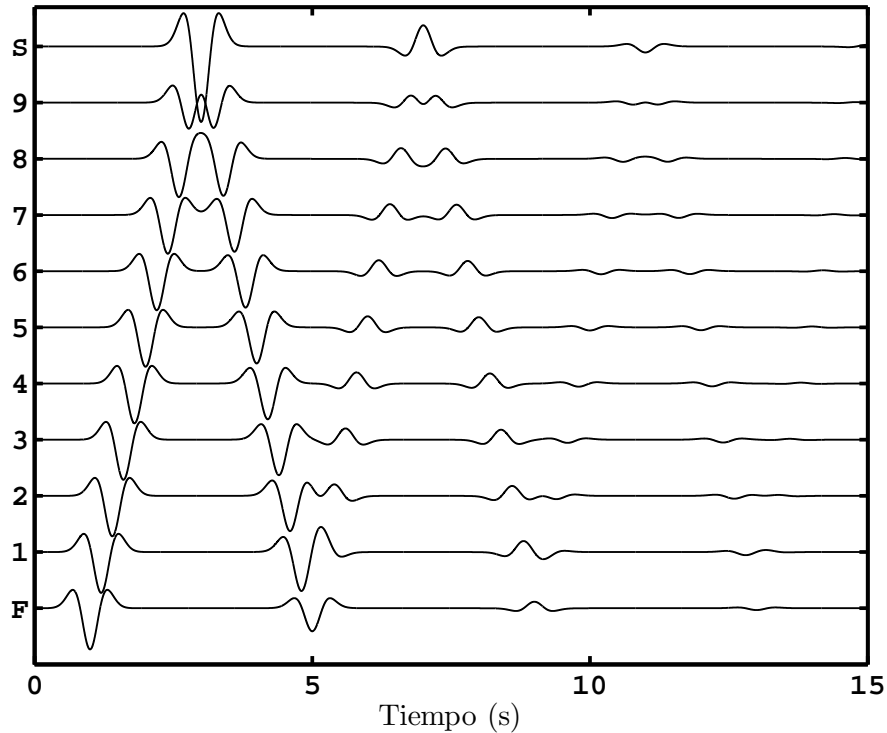


Figura 7.11: Arreglo vertical de acelerogramas sintéticos registrados a diferentes profundidades en un estrato. Fuente: Autor.

En la Figura 7.12, se presentan los registros de la Figura 7.11 deconvolucionados con respecto al acelerograma del fondo (F); los pulsos o “spikes” que se observan en esta figura se pueden interpretar como arribos de ondas. Con respecto a los campos deconvolucionados puede decirse que estos fueron generados por una fuente virtual localizada en la base del estrato.

La deconvolución es un proceso que cambia las condiciones de frontera, motivo por el cual, la interfase se comporta como una frontera rígida; los desplazamientos son nulos y no se observan otras ondículas, además, de la producida por la fuente virtual, lo cual significa que en el tiempo $t = 0$, el campo de ondas ha colapsado en un pulso. La

amplitud de la onda al reflejarse en la frontera rígida lo hace con polaridad invertida, y en la superficie se genera una interacción constructiva entre la onda que ascendente y la onda reflejada.

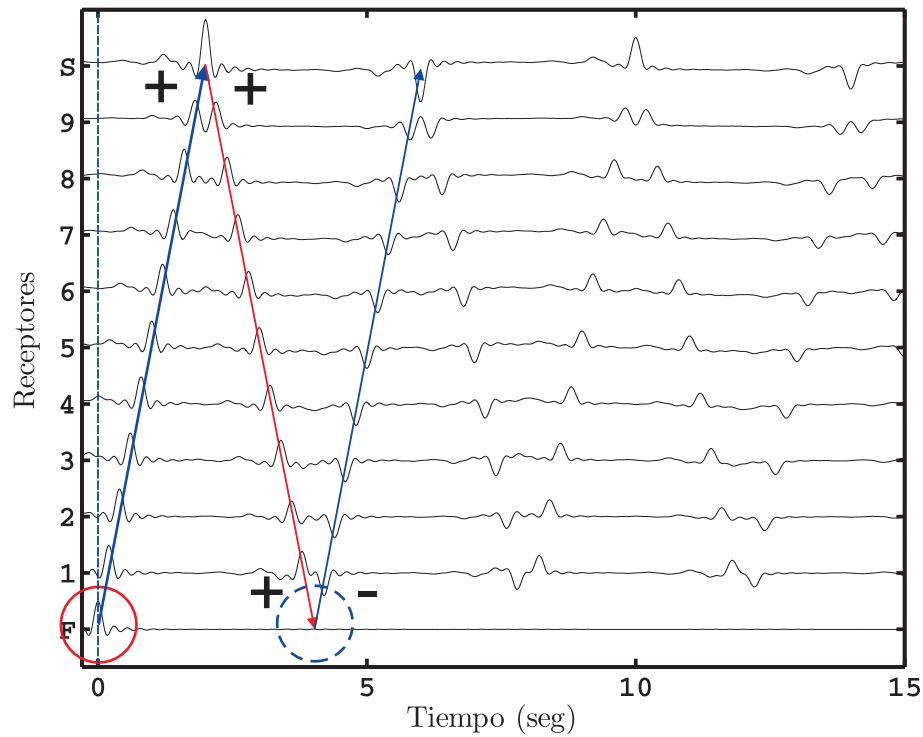


Figura 7.12: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma del fondo. Fuente: Autor.

El campo deconvolucionado mostrado en la Figura 7.12 representa el movimiento del estrato sobre un semiespacio rígido; la interfase que se define por el contacto el estrato y el semiespacio es rígida; en esta frontera, los desplazamientos son cero y los esfuerzos se duplican, lo que se observa en el registro deconvolucionado (**F**) de la Figura 7.12 (círculo línea discontinua).

La deconvolución extrae la función de Green entre dos receptores inmersos en un medio. La deconvolución con respecto al acelerograma de la superficie proporciona la

respuesta sísmica del estrato. El resultado de la deconvolución de un acelerograma ubicado a cualquier profundidad, dentro del estrato, con respecto al acelerograma de la superficie es un registro sísmico en el que se han eliminado los efectos de la fuente y de la trayectoria de la onda. La deconvolución con respecto al registro sísmico de la superficie da como resultado dos ondas que se propagan por el medio (ecuación (7.9)). Estas ondas se pueden interpretar como una onda ascendente y una descendente (Figura 7.13).

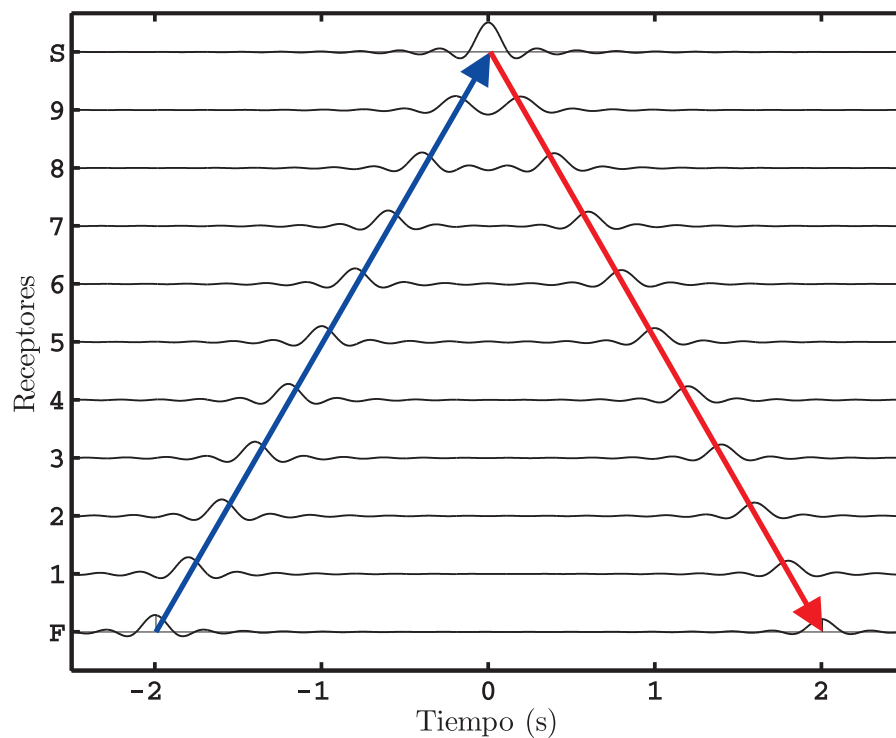


Figura 7.13: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma registrado en la superficie. Fuente: Autor.

Para analizar el comportamiento del campo deconvolucionado, se utiliza el método de la fuente virtual, el cual puede ser usado para obtener la respuesta al impulso unitario de un sistema (Snieder, 2006).

Se deconvolucionaron los registros mostrados en la Figura 7.11 con respecto a cada uno de los registros mostrados en esta figura. Los campos deconvolucionados resultantes se muestran en las Figuras 7.14 y 7.15.

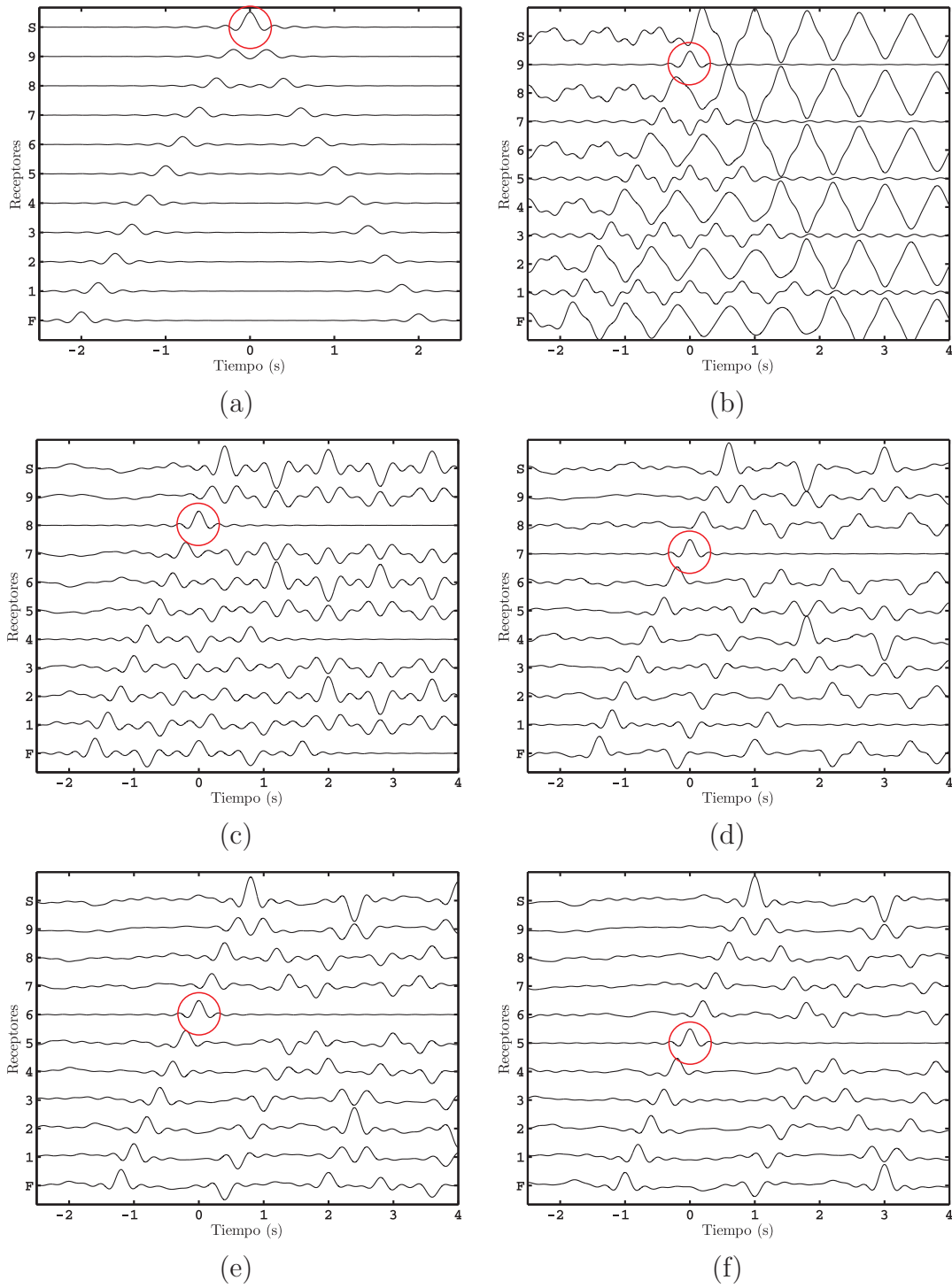


Figura 7.14: Deconvolución de los acelerogramas de la Figura 7.11 con respecto al a) registro de superficie, b) registro 9, c) registro 8, d) registro 7, e) registro 6 y f) registro 5. Fuente: Autor.

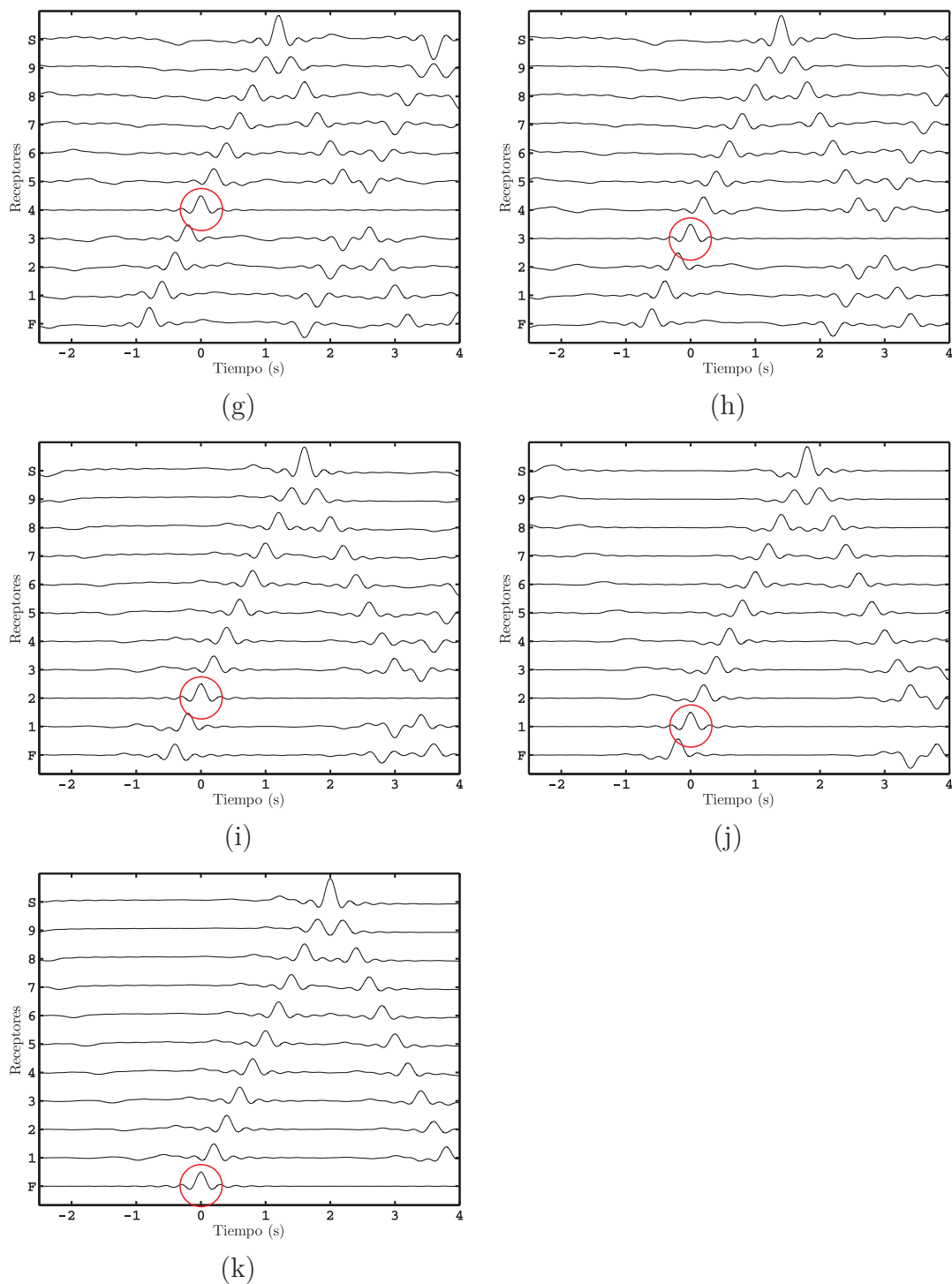


Figura 7.15: Deconvolución de los acelerogramas de la Figura 7.11 con respecto al g) registro 4, h) registro 3, i) registro 2, j) registro 2 y k) registro del fondo. Fuente: Autor.

En la Figura 7.14 se observa que el campo de ondas deconvolucionado es complejo cuando las reflexiones ocurren cerca de la superficie debido a la resonancia provocada por la presencia de un estrato virtual delgado.

El caso de un estrato sobre un semiespacio descrito en el ejemplo anterior, es el medio estratificado más simple. Como se observa en las Figuras 7.14 y 7.15, los campos deconvolucionados no necesariamente satisfacen las condiciones de frontera de $u(z, \omega)$, lo que hace posible crear fuentes virtuales en el sistema.

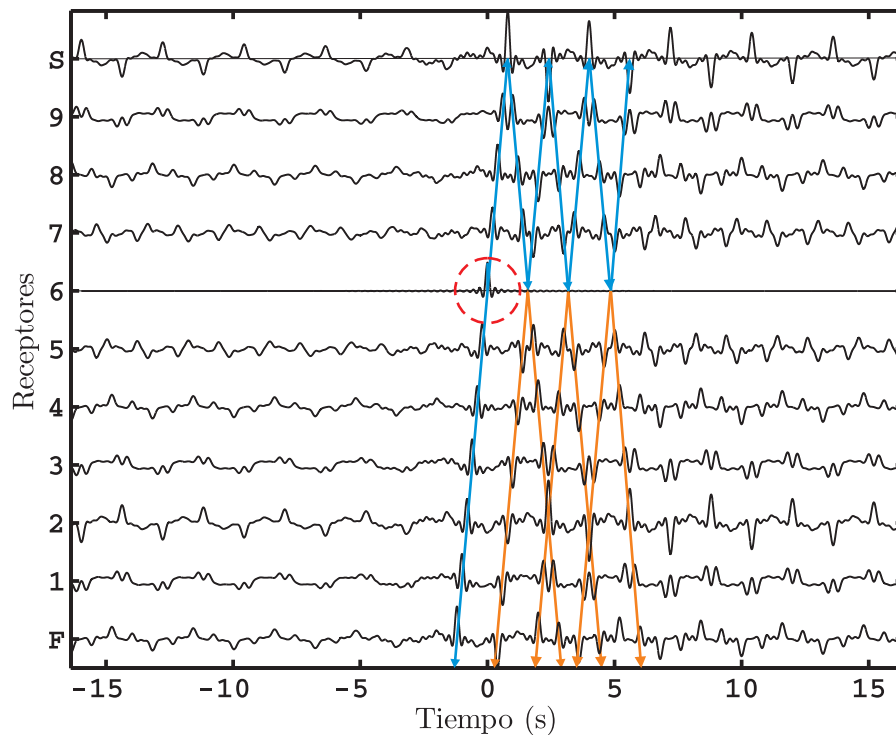


Figura 7.16: Análisis de los registros (Figura 7.11) deconvolucionados con respecto al acelerograma 6. La línea de deconvolución genera un par de ondas por cada reflexión sobre de ella. Fuente: Autor.

Cuando la onda es atenuada al viajar por el medio, no se observan ondas acausales con amplitudes importantes (Figura 7.16); si se utiliza un factor de calidad $Q_1 = 500$, la

onda se atenúa ligeramente y las ondas acausales en los registros deconvolucionados se observan con claridad (Figura 7.17). Esto comprueba que el campo deconvolucionado satisface la ecuación de Helmholtz; como no existen fuentes reales en el medio, el campo deconvolucionado es diferente de cero para tiempos negativos. Las propiedades de causalidad del campo de ondas deconvolucionado están relacionadas con la presencia o ausencia de una fuente real. El movimiento en la base del estrato actúa como una fuente externa, por lo que no se necesitan arribos acausales para generar un impulso unitario.

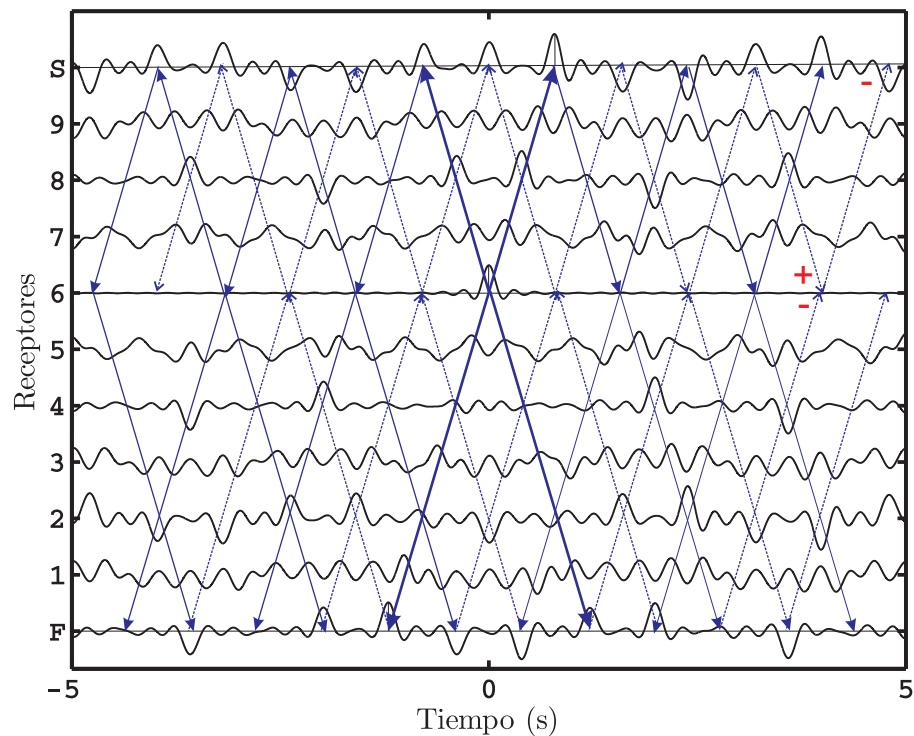


Figura 7.17: Registros sísmicos sintéticos mostrados en la Figura 7.11 deconvolucionados con respecto al registro 6. Las líneas gruesas indican la dirección de radiación de la onda generada por la fuente virtual, las líneas delgadas indican la trayectoria de la onda reflejada. Fuente: Autor.

En las Figuras 7.14, 7.15 y 7.17, se observa que la deconvolución de los registros con

respecto a un registro inmerso en el medio genera fuentes virtuales, en las dos primeras figuras mencionadas no se incluyó atenuación en las ecuaciones de movimiento, por lo que las ondas acausales en los registros cercanos a la superficie son casi nulas. La Figura 7.16 muestra una interpretación de los campos deconvolucionados de la Figura 7.14 e). En la Figura 7.17, se observa el campo de ondas deconvolucionado cuando la atenuación es pequeña; las ondas son radiadas por la fuente virtual en 6, y se observa la presencia de ondículas acausales. La deconvolución de los registros sísmicos mostrados en la Figura 7.11 con respecto al registro 6, de la misma figura, genera una frontera rígida en 6, motivo por el cual los esfuerzos en esta frontera son nulos.

En un medio estratificado, los campos deconvolucionados son más complejos de interpretar debido a la presencia de reflexiones internas generadas por las interfases. Para analizar y estudiar la propagación de ondas en medio estratificados, se obtuvieron las ecuaciones que gobiernan los campos de desplazamientos en un medio de tres estratos sobre un semiespacio (ver sección §4.1).

En la Figura 7.18 se ilustra el modelo utilizado. Los campos de desplazamientos para este modelo están definidos por las ecuaciones (4.11), (4.12), (4.13) y (4.14), los cuales se describen en la sección §4.1.

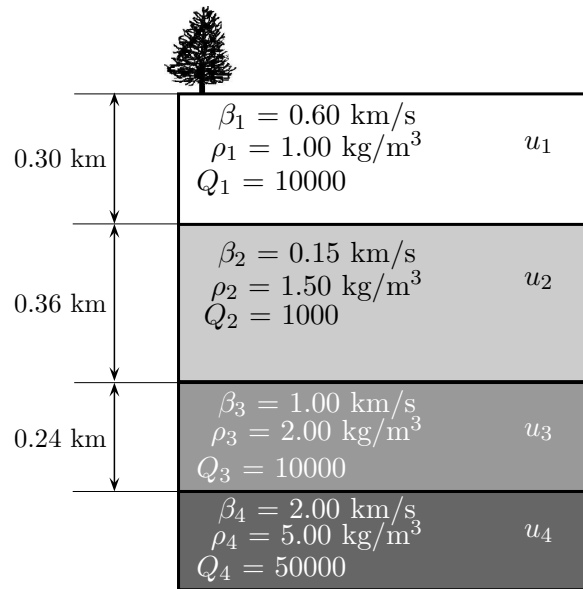


Figura 7.18: Modelo de un medio estratificado sobre un semiespacio, el modelo consta de tres estratos con características diferentes entre sí. Fuente: Autor.

Los registros sísmicos sintéticos se generaron utilizando un pulso de Ricker con un retraso temporal $ts = 2.0$ segundos y un periodo $tp = 0.25$. Se utilizaron las ecuaciones 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14, para la generación de los registros. Para comprobar que las soluciones obtenidas eran correctas, se utilizó el método de Thomson-Haskell para comparar la respuesta obtenida en la superficie para el medio anteriormente descrito.

Aki y Richards en su texto “Quantitative Seismology” (1980) dedican el capítulo 7 al estudio de la propagación de ondas en medios verticalmente heterogéneos y abordan conceptos como el vector desplazamiento-esfuerzo y el de la matriz propagadora, bases del método de Thomson-Haskell.

Para la comparación de la respuesta en superficie, del medio propuesto, se evaluó la ecuación (4.11) en $z = 0$, y se convolucionó con el pulso de Ricker descrito anteriormente; la respuesta obtenida se comparó con aquella calculada usando el método de Thomson-Haskell, esta respuesta se generó con la subrutina creada por Sánchez Sesma.

El resultado obtenido se muestra en la Figura 7.19.

En la Figura 7.20 se muestra la comparación de los espectros de amplitudes de ambas soluciones. Como se observa en las Figuras 7.19 y 7.20, los campos de desplazamientos definidos por la ecuación (4.11) son correctos.

En la Figura 7.21, se muestran los sismogramas sintéticos que se obtuvieron convolucionando las funciones de transferencia correspondientes a los tres estratos y al semiespacio con el pulso de Ricker.

En un medio estratificado la energía de la onda es modificada al pasar de un estrato a otro. En la Figura 7.21, debido a la naturaleza de la fuente, se pueden observar cambios en los tiempos de arribo de la onda producidos por las variaciones de velocidad que existen entre los estratos. El estrato dos, es un medio de baja velocidad en comparación con los dos estratos restantes y el semiespacio.

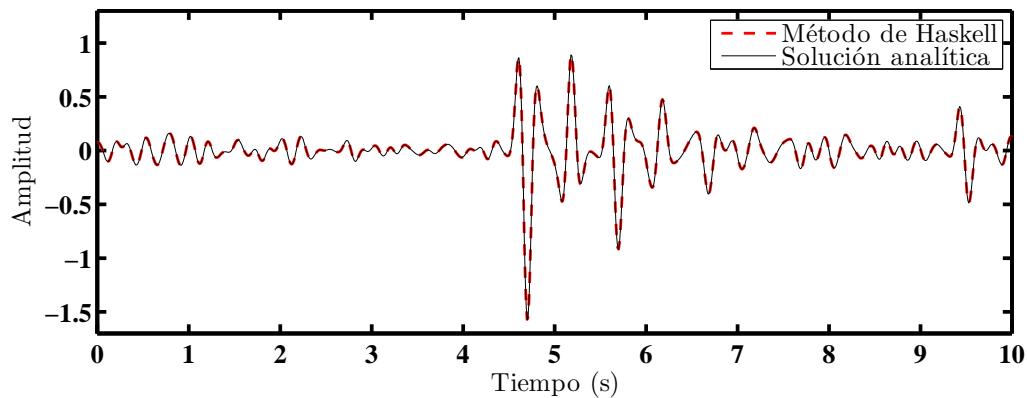


Figura 7.19: Comparación de la respuesta sísmica en superficie para un medio compuesto de tres estratos y un semiespacio, con las características mostradas en la Figura 7.18. La solución obtenida a partir de la ecuación (4.11) se ilustra en línea continua, y la solución generada usando el método de Thomson-Haskell se muestra en línea discontinua. Fuente: Autor.

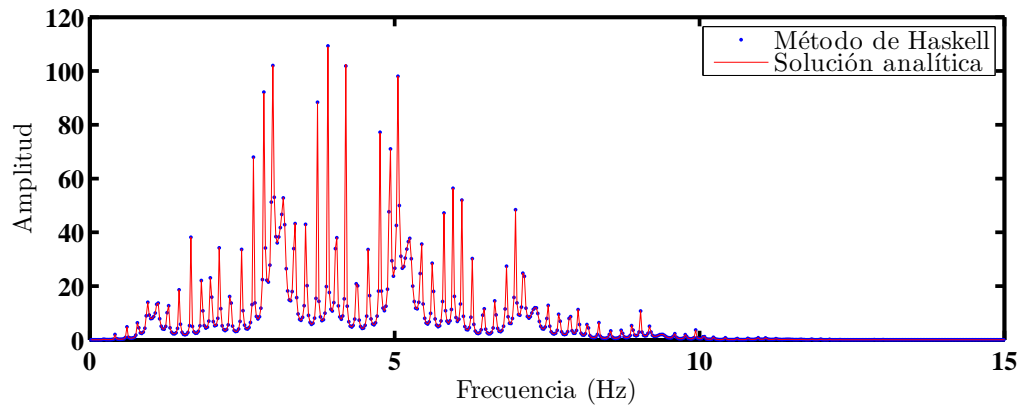


Figura 7.20: Comparación de los espectros de amplitudes. En línea continua se ilustra el espectro obtenido con la ecuación (4.11), y en línea segmentada se muestra el espectro generado con la solución de Thomson-Haskell. Fuente: Autor.

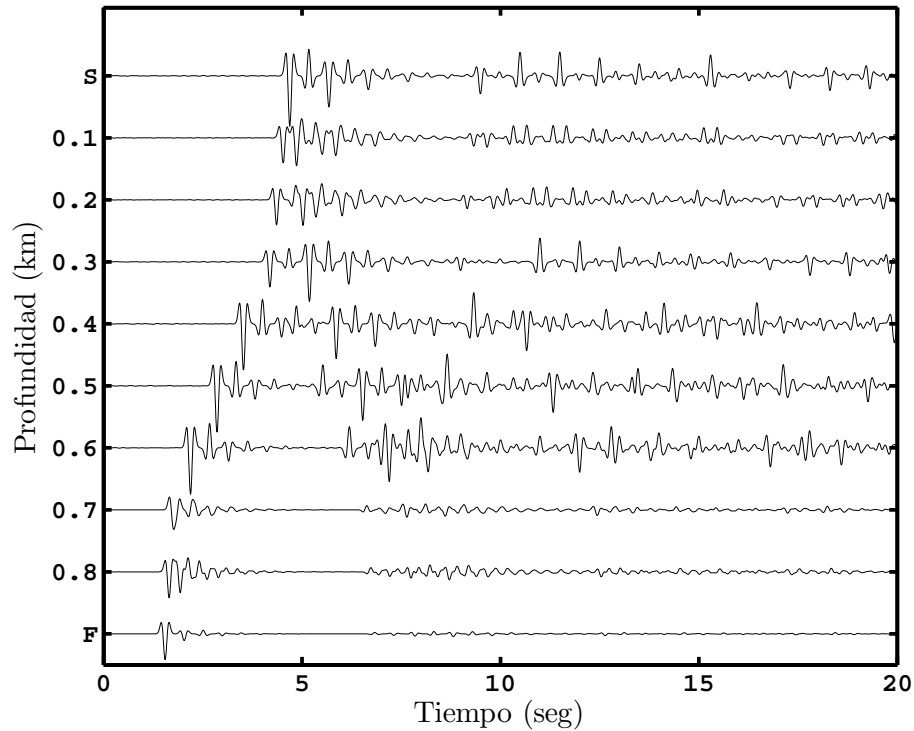


Figura 7.21: Sismogramas sintéticos para un medio estratificado, sin atenuación. El medio corresponde al modelo ilustrado en la Figura 7.18. Fuente: Autor.

Los registros sísmicos generados se deconvolucionaron con respecto al registro de la superficie, para estimar velocidades de propagación a partir de las trazas deconvolucionadas. Los registros de la Figura 7.21, también se deconvolucionaron con respecto a cada registro de misma figura. El resultado de estas deconvoluciones se observa en las Figuras 7.22 y 7.23.

Como se analizó en la Figura 7.16, la deconvolución de eventos genera una fuente virtual en el punto en el cual se deconvoluciona; la fuente virtual irradia energía con una velocidad igual a la velocidad de propagación del medio.

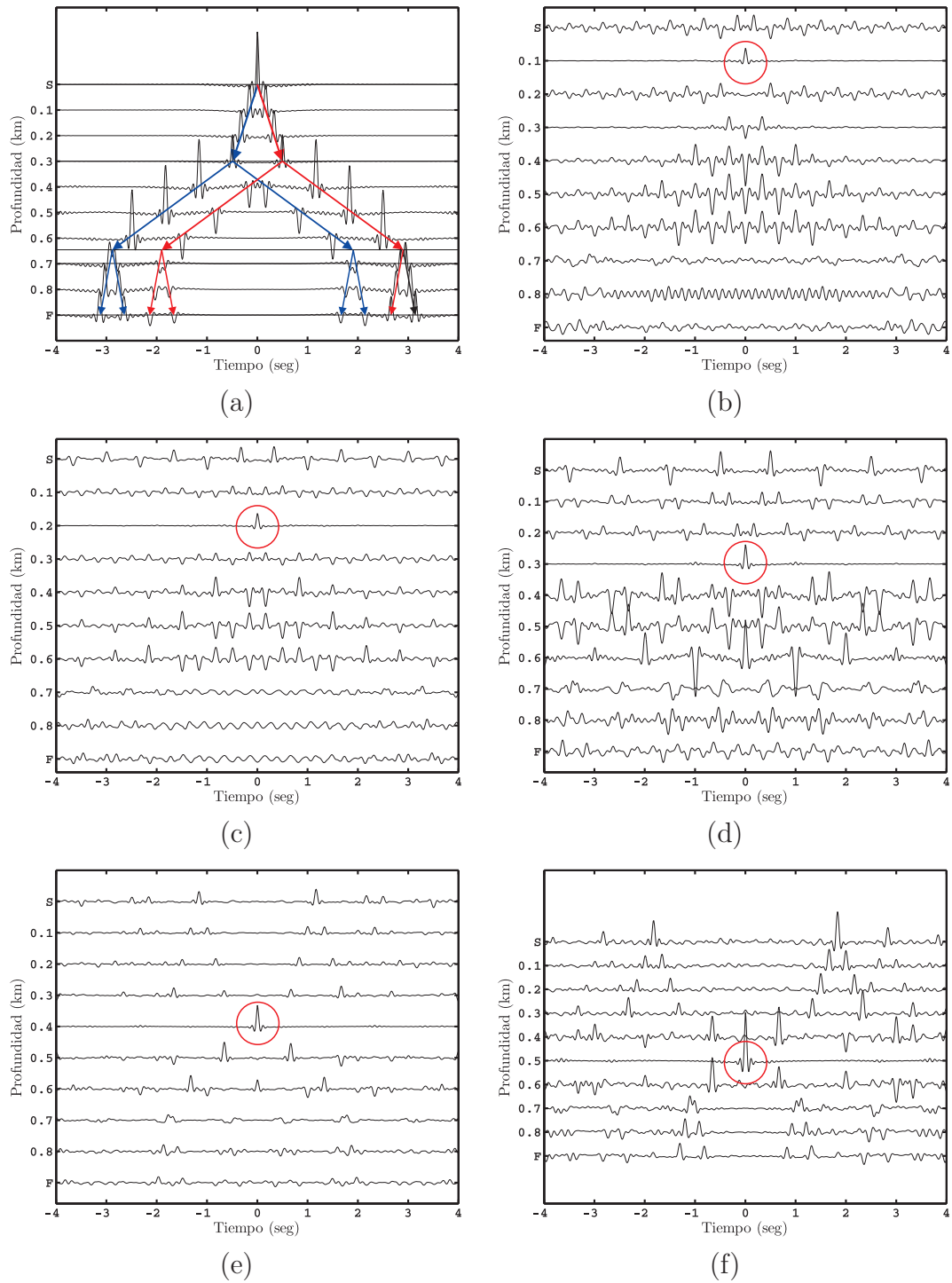


Figura 7.22: Deconvolución de los registros de la Figura 7.11 con respecto al a) registro de superficie, b) registro 9, c) registro 8, d) registro 7, e) registro 6 y f) registro 5. Fuente: Autor.

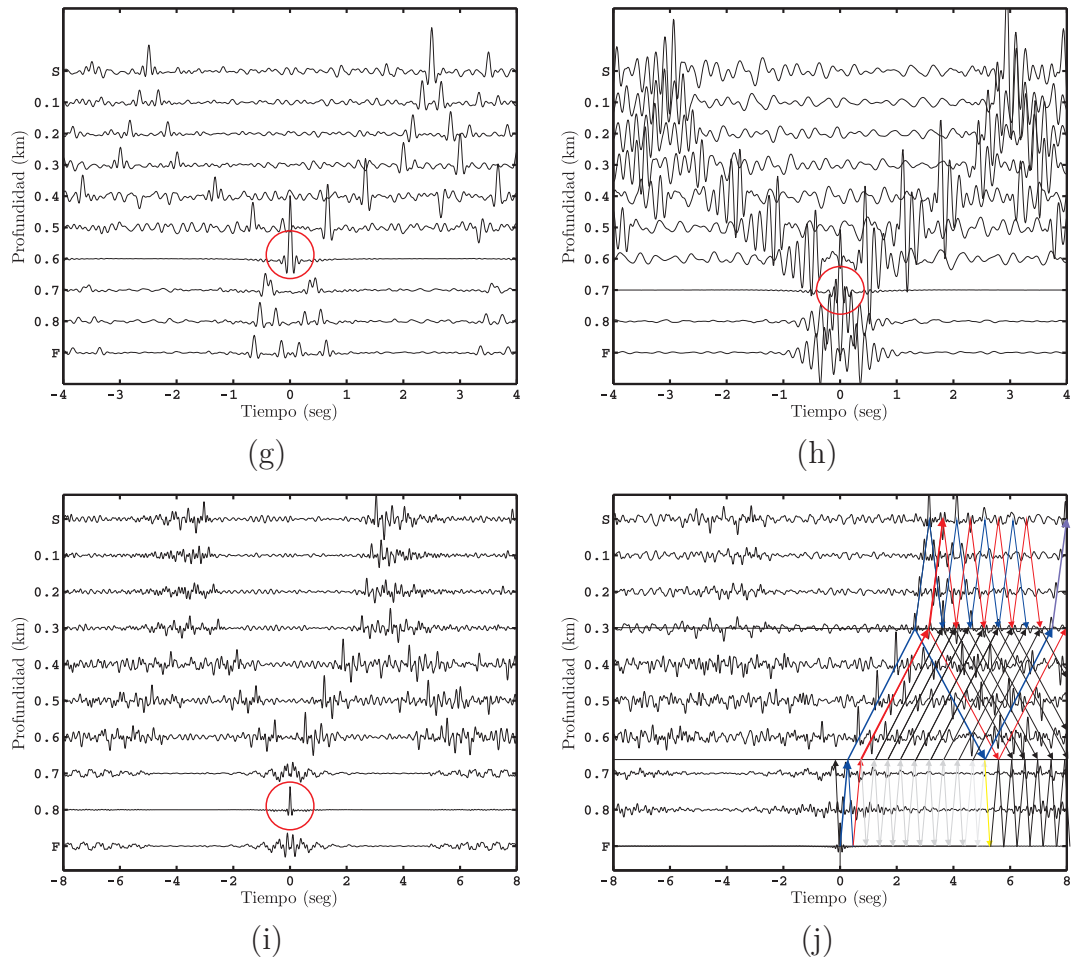


Figura 7.23: Deconvolución de los registros de la Figura 7.11 con respecto al g) registro 4, h) registro 3, i) registro 2, j) registro 2. Fuente: Autor.

En un medio estratificado, como se observa en las Figuras 7.22 y 7.23, los efectos son más complejos de identificar. Para observar el comportamiento de la deconvolución de los acelerogramas con respecto a un registro inmerso en un estrato determinado se generaron registros para un medio con las características mostradas en la Figura 7.18, pero con $Q_1 = 100$, $Q_2 = 100$, $Q_3 = 100$ y $Q_4 = 50000$; es decir, se incluyó atenuación en los estratos.

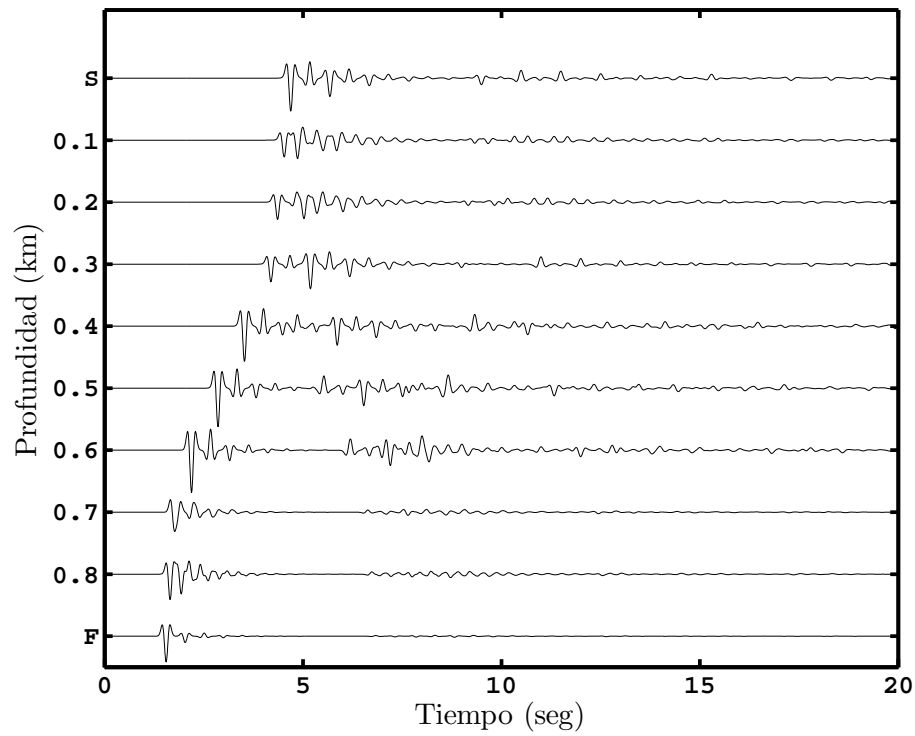


Figura 7.24: Sismogramas sintéticos para un medio estratificado, con atenuación. Fuente: Autor.

Comparando las Figuras 7.21 y 7.24 se puede ver que la energía se disipa más rápido cuando el factor de calidad Q es más pequeño. Con lo cual se pretende demostrar que en las ondas deconvolucionadas, la atenuación puede ser estimada con el registro de superficie deconvolucionado con un registro inferior.

La Figura 7.25 muestra los registros sintéticos de la Figura 7.24, deconvolucionados con respecto al registro ubicado a los 0.6 km de profundidad, de la misma figura. Comparando la Figura 7.23 g), con la Figura 7.25 se puede ver, en el registro de la superficie, que cuando existe atenuación los pulsos causales corresponden a la onda incidente y las ondículas acausales corresponden a la onda atenuada.

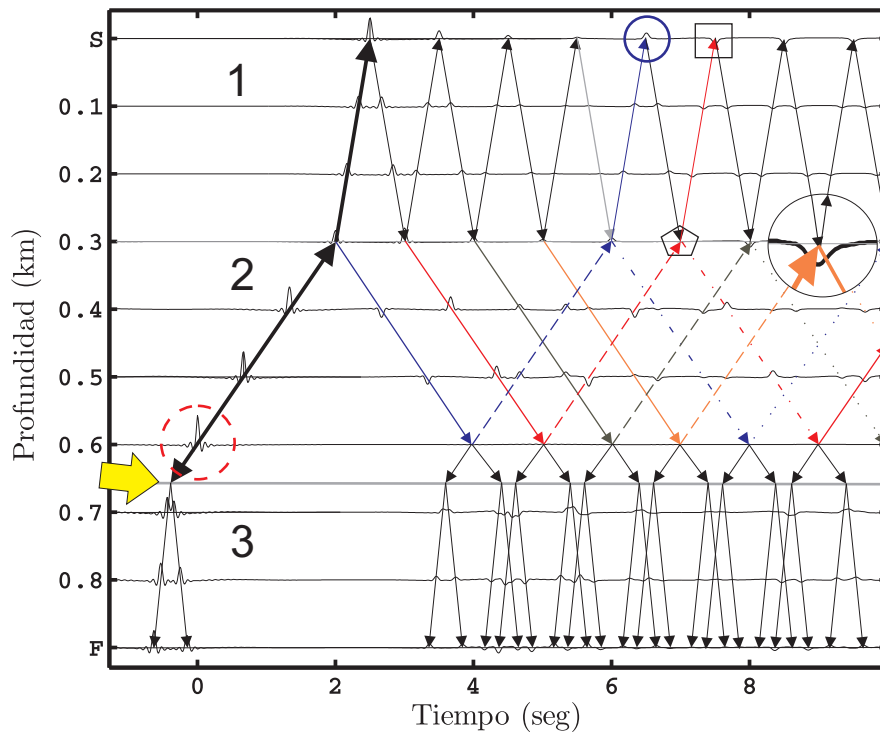


Figura 7.25: Interpretación de las ondas deconvolucionadas. En el segundo estrato, las flechas continuas indican la primera reflexión, en línea discontinua se muestra la segunda reflexión y en línea punteada se presenta la tercera reflexión. Fuente: Autor.

La Figura 7.25 se puede explicar de la siguiente forma: una fuente virtual (círculo en línea discontinua) se genera debido a la deconvolución del registro con si mismo (a este punto se le llamará línea de deconvolución), esta fuente irradia energía hacia el medio (flecha negra gruesa); en la línea de deconvolución se genera una frontera rígida, en la cual los desplazamientos son nulos y la amplitud de la onda reflejada se invierte. La energía generada por la fuente se propaga hacia arriba produciendo arribos causales y hacia abajo dando lugar a ondas causales y acausales. La onda al reflejarse con la interfase definida por la base del estrato dos en contacto con el estrato tres (línea gris) genera una fuente en dicha frontera, ocasionado que se produzcan dos ondas más (flecha amarilla).

Como se observa en la Figura 7.25, en la frontera entre el estrato dos y el estrato tres no existe reflexión de ondas, sólo transmisión. Este fenómeno se puede atribuir a la presencia de la línea de deconvolución.

A una profundidad de 0.3 km, existe una frontera definida por el estrato uno y el estrato dos; cuando la onda incidente llega a esta interfase parte de la energía de la onda es transmitida hacia el primer estrato, se puede ver claramente que las velocidades de arribo de la onda cambian, esto es debido al principio de causalidad; el cual indica que la onda no puede viajar con una velocidad diferente a la del medio. La otra parte de la energía que incide en la interfase es reflejada (flecha azul).

La línea azul señala la trayectoria de la onda reflejada. Siguiendo la trayectoria marcada por la flecha azul, se puede observar que la onda al ser reflejada en la frontera rígida cambia su polaridad; al llegar a la interfase ubicada entre el estrato uno y dos, parte de la energía de la onda es reflejada (flecha azul punteada), y otra parte es transmitida hacia la capa uno, en ese punto la onda reflejada en el estrato uno (flecha gris) y la onda transmitida (flecha azul punteada) se suman, lo que se puede apreciar en la amplitud de la onda reflejada en la superficie (círculo en línea continua).

De igual forma, siguiendo la trayectoria marcada con la flecha naranja, se puede ver que la reflexión de la primera capa se suma con la reflexión de la segunda capa (pentágono); como las amplitudes son contrarias se tiene una interacción destructiva; por lo que, al ser de mayor amplitud la onda en el segundo estrato, la onda resultante tiene polaridad negativa (pulso hacia abajo), esto se puede observar en la onda reflejada por la superficie, esta onda se indica con el cuadrado.

En el círculo donde se amplifica la ondícula, se puede ver que como la amplitud de la onda reflejada en el estrato dos es menor que la amplitud de la onda reflejada en el estrato uno; y puesto que en la frontera la amplitud de la onda reflejada en el estrato dos es invertida, la suma tiene la polaridad de la onda transmitida del estrato uno al

estrato dos.

En conclusión, la flecha azul indica que existe reflexión en el estrato dos, la flecha roja indica que existe transmisión de energía del estrato uno al estrato dos; la ondícula encerrada en el círculo azul demuestra que hay transmisión de energía del estrato dos al estrato uno y que las amplitudes son el resultado de la suma de la onda reflejada en el estrato uno más la onda transmitida del estrato dos. La línea de deconvolución es una frontera rígida donde cada reflexión de la capa superior genera una fuente virtual.

§7.4 Acelerogramas de pozo

El valle de México es una región geográfica ubicada en la actual Ciudad de México. Esta región se caracteriza por ser relativamente plana y estar rodeada, casi por completo, por diversas cadenas montañosas.

Estudios realizados por Marsal y Mazari indican que la secuencia de los suelos de la antigua zona lacustre está integrada por:

1. Una costra superficial, la cual en muchas partes está cubierta con rellenos artificiales de espesor variable. Los más gruesos se encuentran en el Centro Histórico y tienen varios metros de espesor. Es prácticamente inexistente en las orillas del lago.
2. La formación arcillosa superior, con arcillas blandas a muy blandas.
3. Una capa dura, que separa las dos formaciones arcillosas.
4. Una formación arcillosa inferior, con arcillas más consolidadas.
5. Depósitos profundos, constituidos por materiales granulares.

Los estratos de arcilla están interrumpidos o intercalados por lentes duros que pueden ser costras de secado solar, arcilla basáltica o vidrio pómez cuyo espesor va desde unos centímetros hasta cerca de 2 metros.

La zona de terreno firme o zona de lomas se localiza al poniente de la ciudad, hasta los límites con el Estado de México. En el sur incluye las faldas de la Sierra de Chichinautzin hasta el valle de Chalco y en el norte el Peñon de los Baños, la Sierra de Guadalupe, los cerros del Chiquihuite y del Tigre, así como el cerro de la Estrella y la Sierra de Santa Catarina, los cuales separan a la subcuenca de Xochimilco-Chalco de la de México-Texcoco.

En las zonas de terreno firme, se presentan condiciones irregulares de compacidad y cementación. En la formación de las Lomas del poniente se observan elementos litológicos producto de erupciones de grandes volcanes andesíticos estratificados. Los depósitos más antiguos presentan fracturamientos y fallamientos tectónicos que en general no están asociados a inestabilidades locales. Los materiales que se encuentran en las Lomas del poniente son:

1. Tobas y lahares fracturados.
2. Depósitos de arenas pumínicas y lahares de arenas azules.
3. Lahares poco compactados y depósitos glaciales y fluvioglaciales.

Los temblores que afectan al Valle de México provienen principalmente de la costa del Pacífico y del propio Valle, cuyas magnitudes son bajas (3° aproximadamente). Las observaciones con instrumentos de alta amplificación y resolución en el Valle de México son muy difíciles, debido al alto nivel de ruido en el suelo producido por la actividad industrial y el transporte vehicular. Adicionalmente, la mayor parte del Valle está cubierto por una gruesa capa de sedimentos que dificulta disponer de puntos de observación sobre roca firme.

El Valle de México cuenta con un monitoreo continuo de los sismos que lo afectan. El monitoreo está a cargo del CENAPRED. La red de observación sísmica del CENAPRED se compone de dos subredes: la red de atenuación instalada en la línea Acapulco-México y la red de observación sísmica de la Ciudad de México. Además, cuenta con una red para el estudio de la respuesta sísmica de edificios y estructuras. En la Figura 6.2 se muestra la localización de las estaciones utilizadas en este trabajo.

Los sensores de la red sísmica del valle de México se encuentran en su gran mayoría ubicados en la superficie del terreno; sin embargo, existen estaciones con sensores situados en pozos con acelerómetros en la superficie y a diferentes profundidades. En este trabajo, se presenta el análisis realizado a registros sísmicos de la estación Chapultepec y de la Unidad Kennedy.

Los registros sísmicos utilizados se encuentran disponibles en la Base Mexicana de Sismos Fuertes (BMSF). Esta base de datos cuenta con acelerogramas de pozos instrumentados en la ciudad de México. Se utilizaron los acelerogramas del pozo Chapultepec que cuenta con acelerógrafos en la superficie del pozo, a 22 metros y a 52 m de profundidad; también, se usaron los registros del pozo Unidad Kennedy que cuenta con acelerógrafos ubicados en la superficie, a 30 m y a 83 m de profundidad.

7.4.1 Estación Chapultepec

La estación Chapultepec es una estación que cuenta con acelerómetros en la superficie, a 22 m y a 52 m de profundidad. Está ubicada en Av. Panteón de Dolores y el cementerio, Col. Lomas de Chapultepec, Del. Miguel Hidalgo, México D. F., en las coordenadas 19.4157 lat. N, 99.2048 long. W. Corresponde a la estación 14 de la Figura 6.1, y se encuentra ubicada en la parte de terreno firme (Figura 6.2). El tipo de suelo reportado es :

- Arena limosa en la superficie,
- Arena con grava a 22 m,
- Arena poco limosa a 52 m.

Los acelerogramas correspondientes a esta estación disponibles en la BMSF se muestran en la Tabla (7.1). De los eventos seleccionados sólo se usaron con los eventos marcados con un asterisco (*).

15 de mayo de 1993	23 de mayo de 1994*
10 de diciembre de 1994*	14 de septiembre de 1995*
25 de febrero de 1996	26 de febrero de 1996
13 de marzo de 1996	19 de marzo de 1996
27 de marzo de 1996	31 de marzo de 1996
10 de abril de 1996	13 de abril de 1996
18 de abril de 1996	23 de abril de 1996
15 de julio de 1996*	31 de diciembre de 1996
11 de enero de 1997*	16 de enero de 1997
21 de enero de 1997*	20 de abril de 1998*
21 de junio de 1999	30 de septiembre de 1999

Tabla 7.1: Sismos registrados en el pozo Chapultepec. Fuente: Autor.

7.4.2 Unidad Kennedy

La estación Unidad Kennedy está ubicada en la calle de Fray Servando Esq. Nicolás León, Col. Jardín Balbuena, Del. Venustiano Carranza, México D. F., en las coordenadas 19.4186 lat N, 99.1111 long. W, a 2225 msnm. La estación cuenta con acelerómetros en la superficie, a 30 m y a 83 m de profundidad. Corresponde a la estación 9 de la Figura 6.1, y se encuentra ubicada en la zona del lago (Figura 6.2).

El tipo de suelo reportado es:

- Arcilla en la superficie,
- Arcilla a 30 m,
- Arcilla limosa con grava a 83 m.

Los registros sísmicos seleccionados de la Unidad Kennedy corresponden a las fechas que se muestran en la Tabla (7.2).

31 de mayo de 1990	12 de febrero de 1992
7 de junio de 1992	15 de mayo de 1993
24 de octubre de 1993	23 de mayo de 1994
10 de diciembre de 1994	27 de abril de 1995
19 de julio de 1995	14 de septiembre de 1995
6 de octubre de 1995	9 de octubre de 1995
12 de octubre de 1995	21 de octubre de 1995
30 de octubre de 1995	13 de marzo de 1996
19 de marzo de 1996	20 de marzo de 1996
9 de abril de 1996	13 de abril de 1996
18 de abril de 1996	23 de abril de 1996
18 de julio de 1996	31 de diciembre de 1996
11 de enero de 1997	16 de enero de 1997
21 de enero de 1997	27 de enero de 1997
8 de mayo de 1997	20 de abril de 1998
20 de septiembre de 1999	

Tabla 7.2: Sismos registrados en el pozo de la Unidad Kennedy. Fuente: Autor.

Ordaz (1991), estudió la respuesta sísmica de suelos usando datos sísmicos de pozos; generó registros sintéticos con el método de Thomson-Haskell, para este propósito utilizó un perfil de velocidad de propagación de ondas S del pozo Unidad Kennedy dado por Yamashita Architects & Engineers Inc.; así como, perfiles de densidad y atenuación, proporcionados por el Instituto de Ingeniería de la UNAM. Estos valores fueron ligeramente modificados por Ordaz (1991) para generar los sismogramas sintéticos. La

Tabla 7.3 muestra las estratigrafía modificada por Mario Ordaz para el pozo Unidad Kennedy.

Profundidad (m)	Estrato	Espesor (m)	Densidad	Velocidad (m/s)	Amortiguamiento
5.0	1	5.0	1.5	105.0	0.03
9.0	2	4.0	1.15	45.0	0.05
25.0	3	16.0	1.15	35.0	0.05
30.0	4	5.0	1.15	85.0	0.05
36.0	5	6.0	1.15	85.0	0.05
39.0	6	3.0	1.6	200.0	0.03
52.0	7	13.0	1.25	100.0	0.03
58.0	8	6.0	1.65	530.0	0.03
62.0	9	4.0	1.5	440.0	0.03
66.0	10	4.0	1.35	250.0	0.03
70.0	11	4.0	1.25	130.0	0.03
76.0	12	6.0	1.35	55.0	0.03
79.0	13	3.0	1.4	380.0	0.03
83.0	14	4.0	1.6	500.0	0.03
90.0	15	7.0	1.6	500.0	0.03
semiespacio	—	—	2.1	1100.0	0.01

Tabla 7.3: Estratigrafía de la estación Unidad Kennedy. Fuente: Ordaz, 1991.

7.4.3 Deconvolución de acelerogramas del pozo Chapultepec

Los acelerogramas que se utilizaron para efectuar las deconvoluciones se muestran en el Apéndice A. Para realizar la deconvolución de acelerogramas de pozo, se utilizó la metodología descrita en la sección §6.2.3. A diferencia de los sismogramas sintéticos, los cuales se deconvolucionaron usando los registros completos, para la deconvolución de los acelerogramas de pozo se seleccionaron ventanas en tiempo, el número de puntos de las ventanas satisfizo con la condición 2^n muestras. Debido a la presencia de ruido en los registros, fue necesario utilizar un filtro pasa-bajas, antes de deconvolucionar. .

En los registros deconvolucionados se observan dos ondículas que se pueden interpretar como una onda ascendente y una onda descendente. La velocidad de propagación de la onda en el subsuelo se obtuvo utilizando la siguiente fórmula

$$v = \frac{d}{t}, \quad (7.37)$$

donde v es la velocidad, d es la distancia entre dos registros y t es el tiempo de arribo de la onda; este se obtuvo promediando los tiempos de arribo de las ondas ascendentes y descendentes.

En la Figura 7.26, se pueden observar los registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie, en los cuales se distinguen dos ondículas de mayor amplitud; éstas corresponden a la onda ascendente (A) y la onda descendente (D). En este caso, la velocidad estimada a 22 metros de profundidad, se calculó promediando los valores absolutos de los tiempos t_1 y t_2 . La velocidad estimada a 52 metros se obtuvo con el promedio de la suma de los valores absolutos de los tiempos t_3 y t_4 .

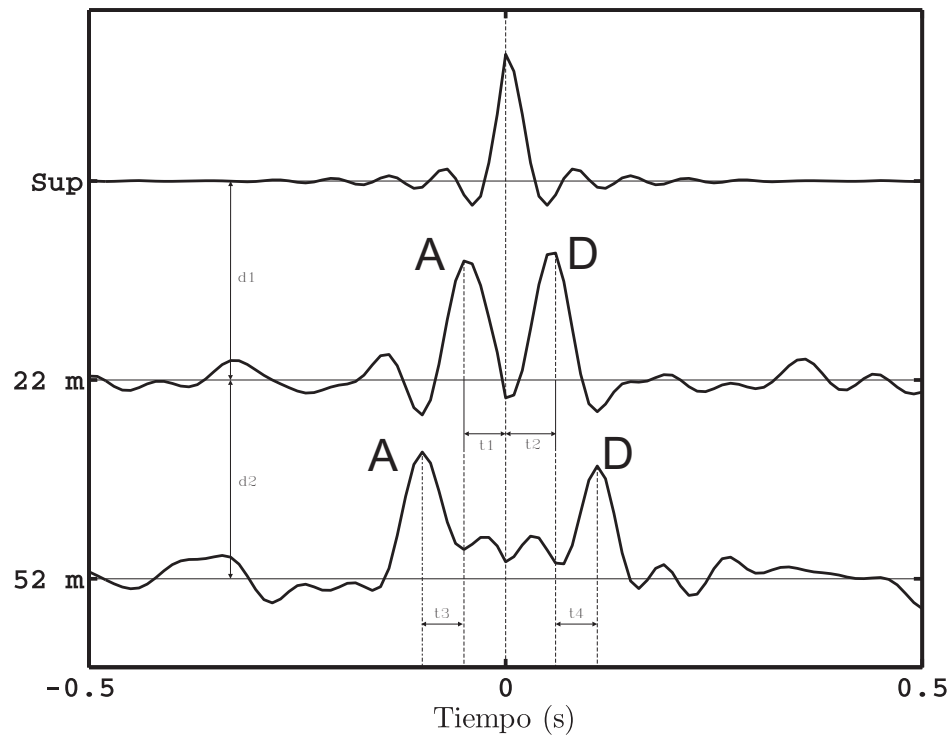


Figura 7.26: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 60.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 15$ Hz. Fuente: Autor.

Para calcular las velocidades de las ondículas obtenidas en la Figura 7.26, se usaron los tiempos medidos en cada registro: $t_1 = -0.05$ s, $t_2 = 0.06$ s para el registro a 22 metros; $t_3 = -0.1$ s, $t_4 = 0.11$ s para el registro a 52 metros; por lo tanto, la velocidad a 22 metros es

$$v = \frac{0.022 \text{ km}}{(0.05+0.06)/2 \text{ s}} = 0.4 \text{ km/s};$$

la velocidad a 52 metros se calculó de la siguiente forma:

$$v = \frac{0.052-0.022 \text{ km}}{((0.1-0.05) + (0.11-0.06))/2 \text{ s}} = 0.6 \text{ km/s}.$$

La deconvolución con respecto al acelerograma de superficie permite estimar las velocidades de propagación de ondas a diferentes profundidades. Las ventanas deben de contener el movimiento de la onda SH ; por lo que, un aspecto importante es la selección adecuada de las ventanas en los acelerogramas; el tamaño de la ventana puede influir en los valores estimados de la velocidad. Esto se analiza más adelante.

Si el medio por el que se propagan las ondas cambia, la velocidad también es alterada. Esto permite monitorear el comportamiento sísmico del subsuelo, analizando las variaciones en las velocidades de propagación. Motivo por el cual, se deconvolucionaron los registros indicados en la Tabla 7.1, siguiendo la metodología descrita en la sección §6.2.3. Para este propósito se seleccionaron ventanas que contienen el arribo de la onda SH . Los acelerogramas utilizados se muestran en el Apéndice A. Los resultados de las deconvoluciones se muestran en las Figuras 7.27-7.32, y las velocidades estimadas para la onda SH se presentan en la Tabla 7.4. Estas velocidades pueden ser utilizadas para obtener información adicional sobre las propiedades del medio. Las velocidades estimadas pueden ser sustituidas en la ecuación (3.43) para obtener el modulo de cortante. En la Figura 7.33, se presenta la comparación de registros deconvolucionados correspondientes a tres eventos sísmicos diferentes; esto es conocido como interferometría sísmica. Esta comparación permite determinar si hubo un cambio significativo en la respuesta sísmica del medio.

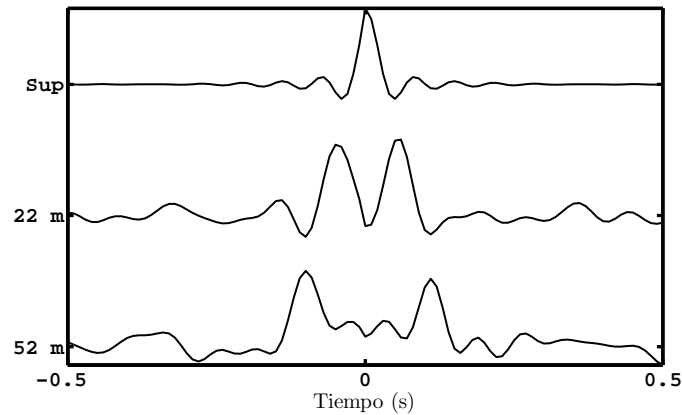


Figura 7.27: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 60.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 15$ Hz. Fuente: Autor.

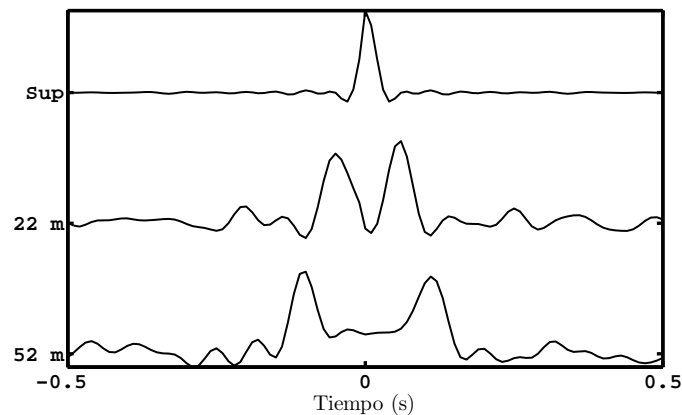


Figura 7.28: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 14 de septiembre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 101.91 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 20$ Hz. Fuente: Autor.

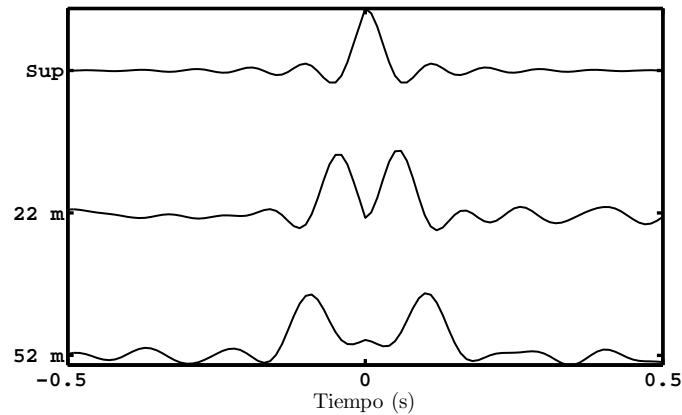


Figura 7.29: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 13 de marzo de 1996. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 60 s a 100.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 10$ Hz. Fuente: Autor.

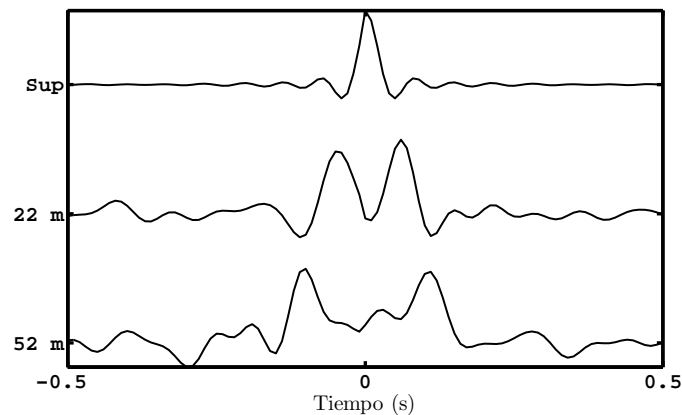


Figura 7.30: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 15 de julio de 1996. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 24 s a 64.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 15$ Hz. Fuente: Autor.

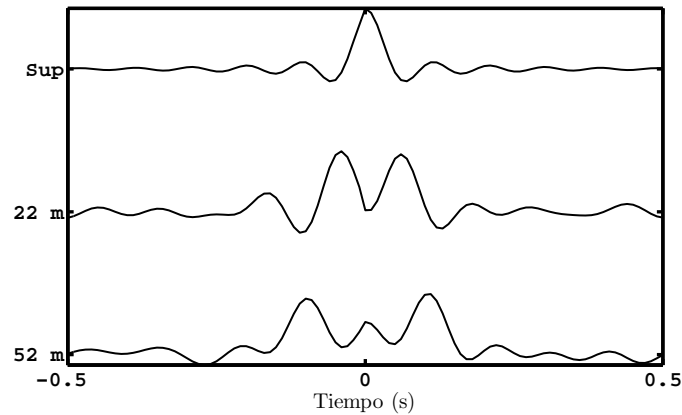


Figura 7.31: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 11 de enero de 1997. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 80 s a 120.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 10$ Hz. Fuente: Autor.

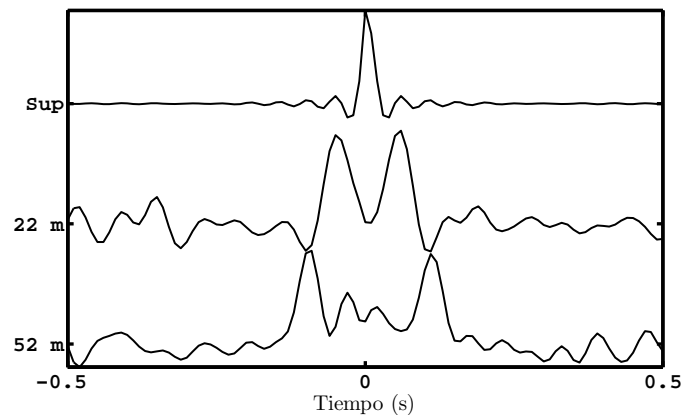


Figura 7.32: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 20 de abril de 1998. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 10 s a 50.95 s. Las ventanas seleccionadas se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 20$ Hz. Fuente: Autor.

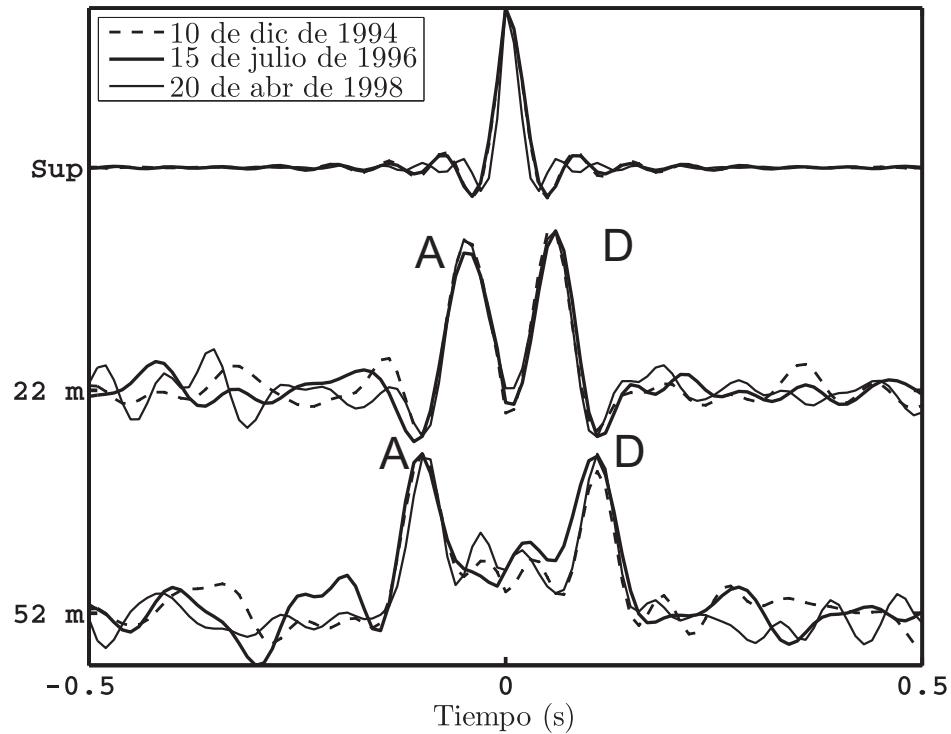


Figura 7.33: Deconvolución de registros sísmicos con respecto al registro de la superficie del pozo Chapultepec, usando tres eventos sísmicos. Fuente: Autor.

No	Fecha	Velocidad (km/s) a 22m	Velocidad (km/s) a 52m
1	10/12/94	0.440	0.546
2	14/09/95	0.400	0.600
3	13/03/96	0.400	0.750
4	15/06/96	0.440	0.546
5	11/01/97	0.440	0.545
6	20/04/98	0.400	0.600

Tabla 7.4: Velocidades estimadas para la estación Chapultepec usando diferentes eventos, se seleccionó el intervalo correspondiente a la onda *SH*. Fuente: Autor.

Se puede observar que las variaciones en las velocidades estimadas de los registros deconvolucionados mostrados en la Tabla 7.4 son mínimas; por lo que, se puede decir

que el subsuelo no ha sufrido cambios significativos del 10 de diciembre de 1994 al 20 de abril de 1998.

Se realizó un análisis de error para estudiar la influencia del tamaño de la ventana en las velocidades estimadas; esto para cada evento sísmico indicado en la Tabla 7.4, los datos obtenidos se muestran en el Apéndice B. Para cada evento sísmico se realizaron mediciones de este tipo y se obtuvieron desviaciones estándar, las cuales se muestran en la Tabla 7.5. Las gráficas de error se muestran en las Figuras 7.34 y 7.35, donde se observan las velocidades promedio, obtenidas en cada evento sísmico, y las barras de error calculadas con la desviación estándar.

No	Fecha	22 m		52 m	
		Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar
1	10/12/94	0.4360	0.0126	0.5836	0.0264
2	14/09/95	0.4160	0.0207	0.6212	0.0425
3	13/03/96	0.4686	0.0408	0.5942	0.0813
4	15/06/96	0.4267	0.0207	0.6040	0.0543
5	11/01/97	0.4453	0.0247	0.5771	0.0454
6	20/04/98	0.4583	0.0253	0.5879	0.0417

Tabla 7.5: Media y desviación estándar para las velocidades estimadas de eventos sísmicos diferentes, que corresponden a la estación Chapultepec. Fuente: Autor.

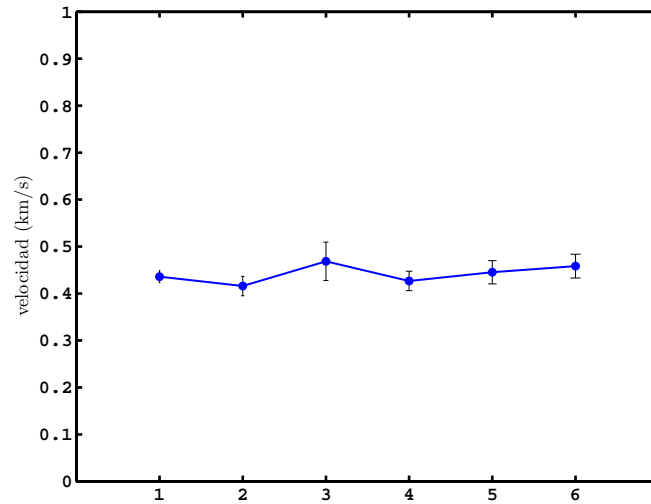


Figura 7.34: Velocidades estimadas a 22 m de profundidad en la estación Chapultepec; los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.4). Fuente: Autor.

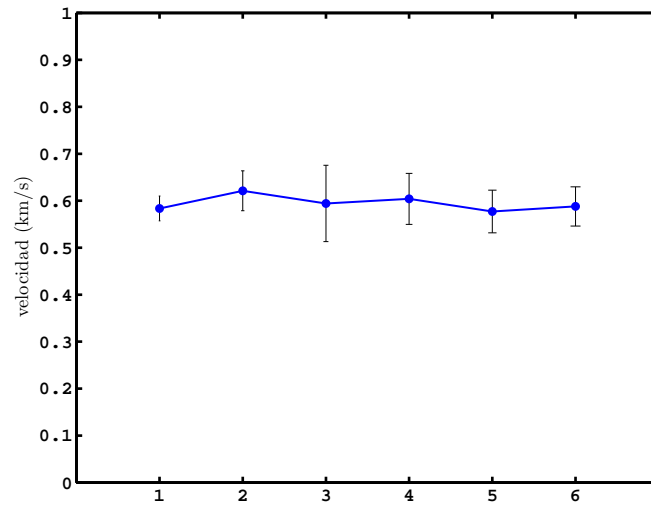


Figura 7.35: Velocidades estimadas a 52 m de profundidad en la estación Chapultepec; los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.4). Fuente: Autor.

Como los instrumentos de grabación son triaxiales, es posible medir la velocidad de

la onda compresional utilizando la componente vertical de los acelerogramas.

Para cada evento, se deconvolucionaron los registros sísmicos que corresponden a las tres componentes. La Figura 7.36 presenta la comparación del resultado de la deconvolución con respecto al registro de superficie obtenido utilizando las tres componentes sísmicas del evento del 10 de diciembre de 1994. En la Tabla 7.6 se muestran las velocidades obtenidas utilizando las tres componentes para cada evento sísmico, la velocidad de la onda de cortante en las componentes N-S y E-O se obtuvieron utilizando las mismas características en las ventanas seleccionadas y la velocidad de la onda compresional se obtuvo, en algunos casos, con una ventana de diferentes características y utilizando la componente vertical. Las velocidades estimadas, así como las características de las ventanas utilizadas se muestran en la Tabla 7.6. Estos valores pueden ser utilizados para estimar el porcentaje de anisotropía del medio utilizando las velocidades estimadas con las componentes horizontales.

En la Tabla 7.6, se puede ver que las velocidades de la componente E-O son muy similares a las velocidades estimadas con la componente N-S, en algunos casos son iguales.

De los datos presentados en la Tabla 7.6 se puede concluir que el subsuelo en la vecindad del pozo Chapultepec no ha sufrido cambios importantes. Cabe mencionar que el pozo Chapultepec se encuentra en la zona de terreno firme.

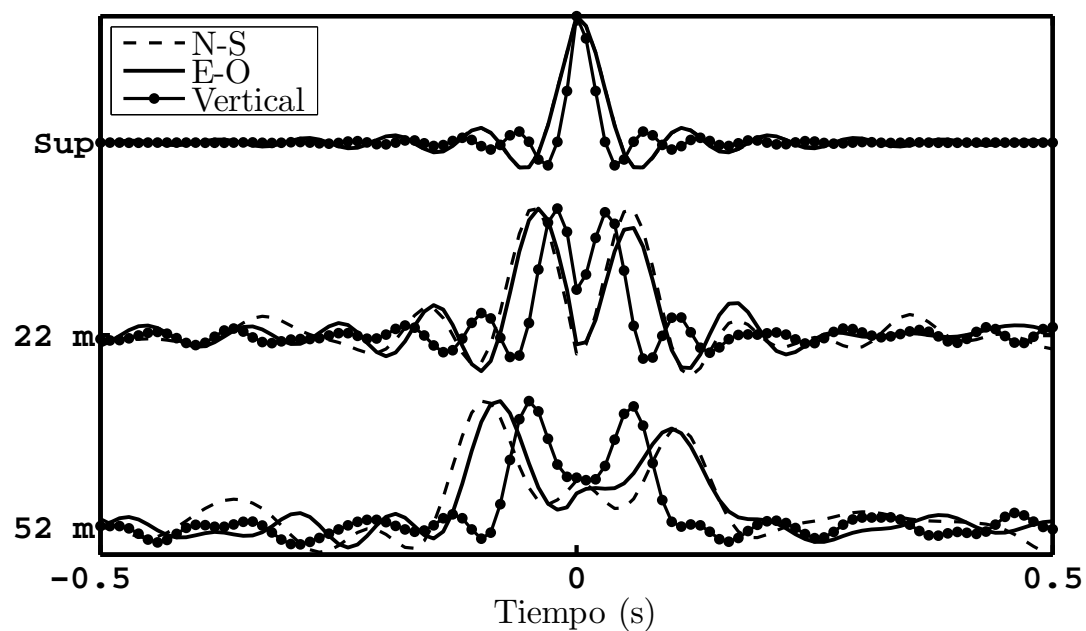


Figura 7.36: Resultado de la deconvolución con respecto al registro de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994, usando las tres componentes: N-S (en línea segmentada), E-O (en línea continua) y vertical (en línea punteada). Fuente: Autor.

Fecha	Comp.	Ventana (Segundos)	ω_c	n	Vel. 22 m (km/s)	Vel. 52 m (km/s)	Velocidad
10/12/94	N-S	20-60.95	10	10	0.440	0.546	onda de corte β
	E-O	20-60.95	10	10	0.440	0.750	onda de corte β
	Vert.	20-60.95	17	10	0.880	1.000	onda $P \alpha$
14/09/95	N-S	20-101.91	20	10	0.400	0.600	onda de corte β
	E-O	20-101.91	20	10	0.440	0.600	onda de corte β
	Vert.	20-101.91	20	10	0.880	1.200	onda $P \alpha$
13/03/96	N-S	60-141.91	10	10	0.440	0.600	onda de corte β
	E-O	60-141.91	10	10	0.489	0.750	onda de corte β
	Vert.	60-141.91	10	10	4.400	0.750	onda $P \alpha$
15/06/96	N-S	24-64.95	15	10	0.440	0.546	onda de corte β
	E-O	24-64.95	15	10	0.489	0.546	onda de corte β
	Vert.	1-41.95	20	10	1.100	1.000	onda $P \alpha$
11/01/97	N-S	80-120.95	10	10	0.440	0.546	onda de corte β
	E-O	80-120.95	10	10	0.440	0.600	onda de corte β
	Vert.	30-70.95	15	10	0.880	1.000	onda $P \alpha$
20/04/98	N-S	10-50.95	20	10	0.400	0.600	onda de corte β
	E-O	10-50.95	20	10	0.440	0.667	onda de corte β
	Vert.	10-50.95	20	10	0.880	1.200	onda $P \alpha$

Tabla 7.6: Velocidades estimadas usando las tres componentes sísmicas para la estación Chapultepec. Fuente: Autor.

7.4.4 Deconvolución de acelerogramas del pozo de la estación Unidad Kennedy

Los acelerogramas que se utilizaron para efectuar las deconvoluciones se muestran en el Apéndice C. Como en el caso de las deconvoluciones de la estación Chapultepec, los acelerogramas de la estación Unidad Kennedy se deconvolucionaron con respecto al acelerograma de superficie utilizando ventanas en tiempo que contienen movimientos correspondientes a ondas SH (Figuras 7.37-7.47).

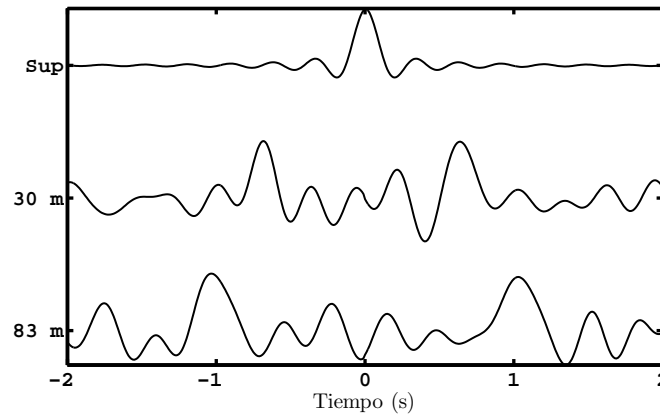


Figura 7.37: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 12 de febrero de 1992. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 1s a 21.47 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor.

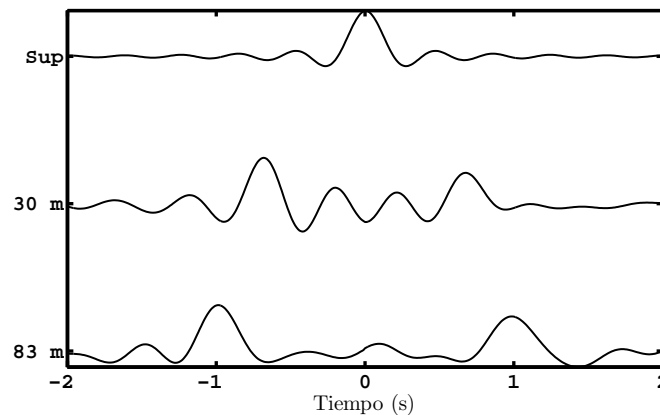


Figura 7.38: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 15 de mayo de 1993. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 5 s a 45.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor.

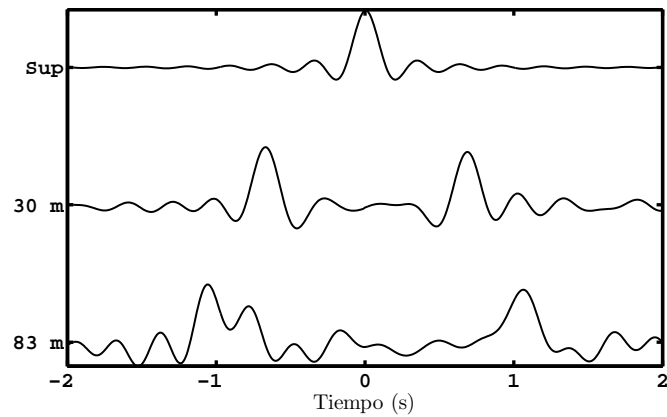


Figura 7.39: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 24 de octubre de 1993. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 20 s a 101.91 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor.

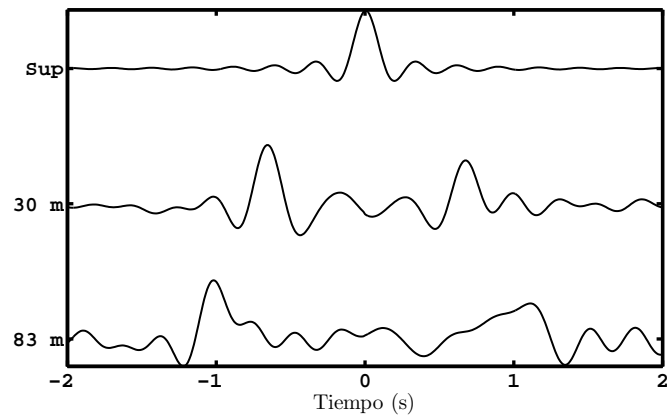


Figura 7.40: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 23 de mayo de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 30 s a 111.91 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor.

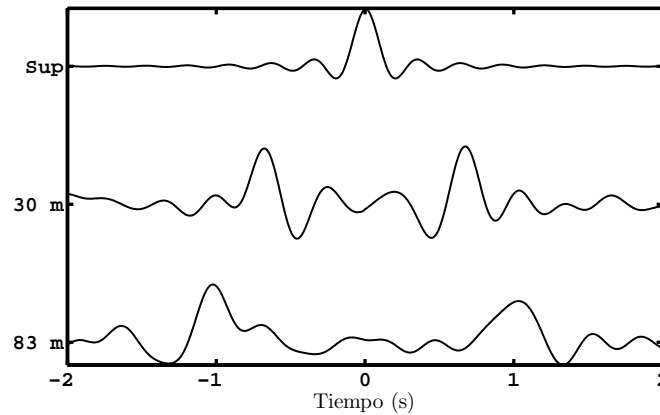


Figura 7.41: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 10 de diciembre de 1994. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 35 s a 75.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 3$ Hz. Fuente: Autor.

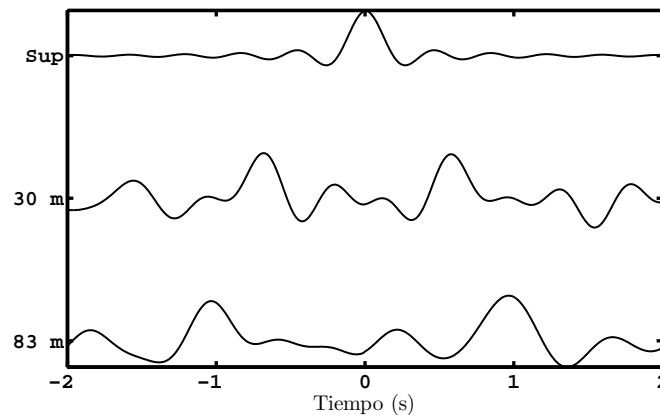


Figura 7.42: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 19 de julio de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 70 s a 233.83 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2,0$ Hz. Fuente: Autor.

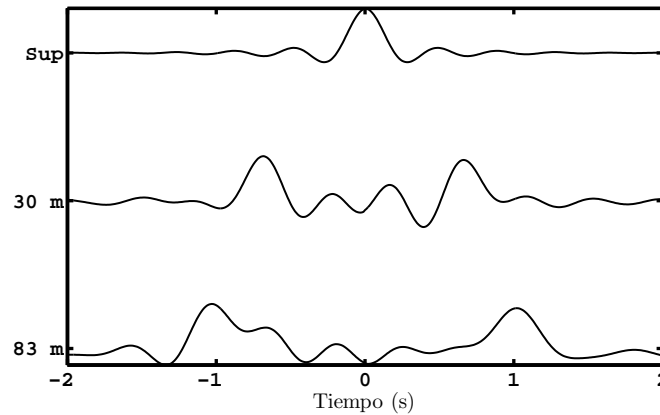


Figura 7.43: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 14 de septiembre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 90 s a 253.83 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2,0$ Hz. Fuente: Autor.

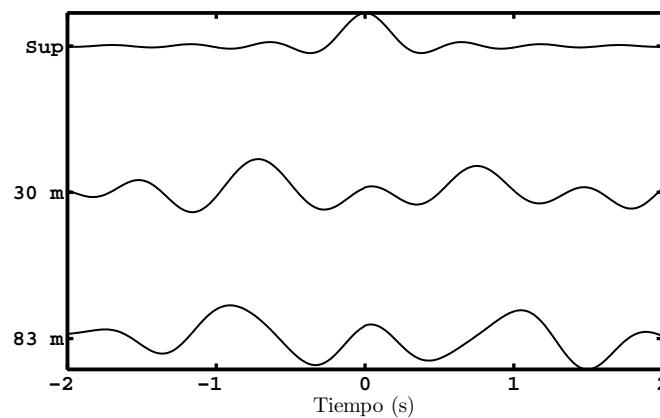


Figura 7.44: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 6 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 98 s a 138.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 1,5$ Hz. Fuente: Autor.

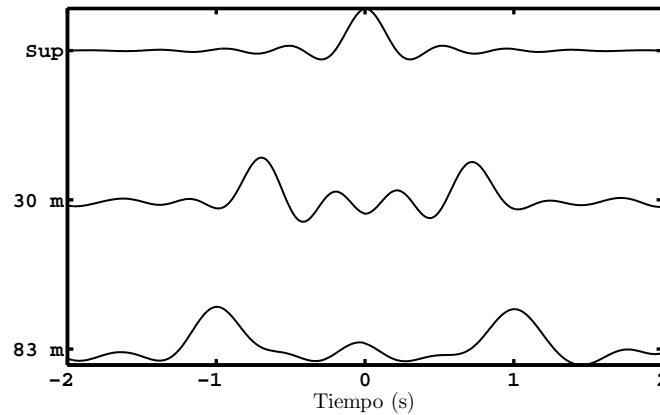


Figura 7.45: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 9 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 100 s a 140.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor.

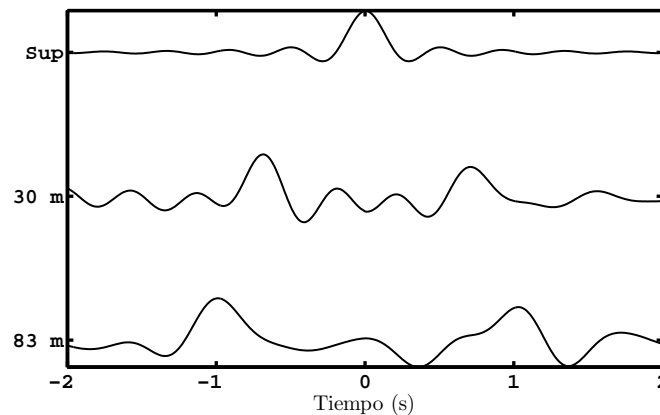


Figura 7.46: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 12 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 83 s a 123.95 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor.

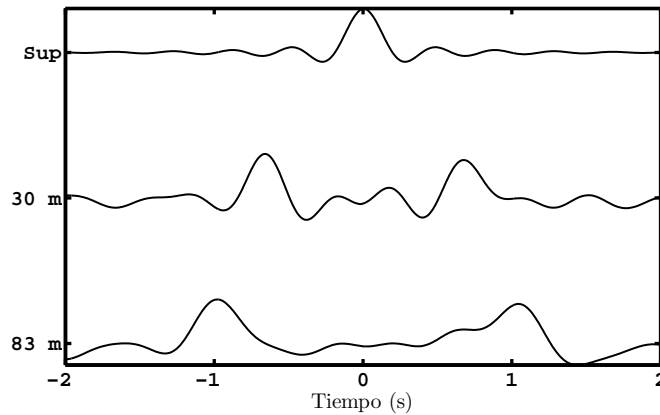


Figura 7.47: Registros deconvolucionados con respecto al acelerograma de la superficie del evento del 21 de octubre de 1995. Los acelerogramas corresponden a la componente horizontal orientación norte-sur, de donde se seleccionaron ventanas en tiempo de 90 s a 253.83 s. Las ventanas seleccionadas, se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas Butterworth de grado $n = 10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$ Hz. Fuente: Autor.

No	Fecha	Velocidad (km/s) a 30m	Velocidad (km/s) a 83m
1	12/02/92	0.0455	0.143
2	15/05/93	0.0441	0.171
3	24/10/93	0.0444	0.140
4	23/05/94	0.0455	0.133
5	10/12/94	0.0444	0.145
6	19/06/95	0.0469	0.147
7	14/08/95	0.0435	0.161
8	6/10/95	0.0408	0.230
9	9/10/95	0.0417	0.177
10	12/10/95	0.0426	0.180
11	21/10/95	0.0441	0.158

Tabla 7.7: Velocidades estimadas para la estación Unidad Kennedy utilizando ventanas que incluyen el movimiento por ondas *SH*. Fuente: Autor.

La velocidad de propagación de la onda de corte estimada a 30 m de profundidad corresponde a una velocidad muy baja que está asociada al tipo de suelo en la zona (Tabla 7.7). Las velocidades estimadas indican que el medio no ha sufrido cambios

significativos. Cabe recordar que la estación Unidad Kennedy está ubicada en un medio compuesto de arcillas y arcillas limosa con gravas a mayor profundidad.

Por otra parte, las velocidades estimadas a 83 metros son mucho mayores que las velocidades estimadas en la capa superior. Esto se puede explicar fácilmente debido a que a mayor profundidad el material se encuentra más consolidado (Tabla 7.7).

También se realizó un análisis para determinar la relación existente entre el tamaño de la ventana y la velocidad estimada. A partir de este estudio, se obtuvieron velocidades promedio y barras de error (Tabla 7.8). Las características de las ventanas utilizadas se presentan en las Tablas D.1-D.11 del apéndice D.

Fecha	30 m		83 m	
	Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar
12/02/92	0.045	0.000	0.144	0.004
15/05/93	0.044	0.001	0.158	0.018
24/10/93	0.044	0.000	0.149	0.012
23/05/94	0.044	0.001	0.161	0.018
10/12/94	0.044	0.001	0.166	0.020
19/06/95	0.044	0.001	0.168	0.007
14/08/95	0.043	0.001	0.186	0.017
6/10/95	0.043	0.004	0.222	0.045
9/10/95	0.044	0.002	0.159	0.020
12/10/95	0.043	0.000	0.189	0.022
21/10/95	0.044	0.000	0.156	0.005

Tabla 7.8: Media y desviación estándar correspondientes a velocidades estimadas de eventos sísmicos registrados en la estación Unidad Kennedy. Fuente: Autor.

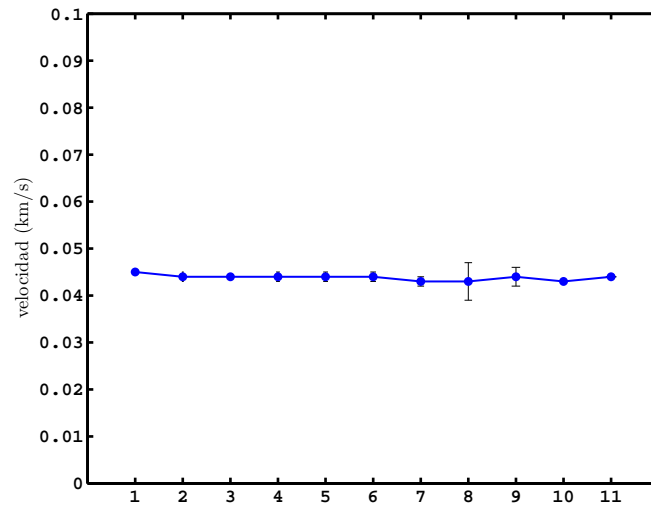


Figura 7.48: Velocidades estimadas a 30 m de profundidad en la estación Unidad Kennedy. Los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.7). Fuente: Autor.

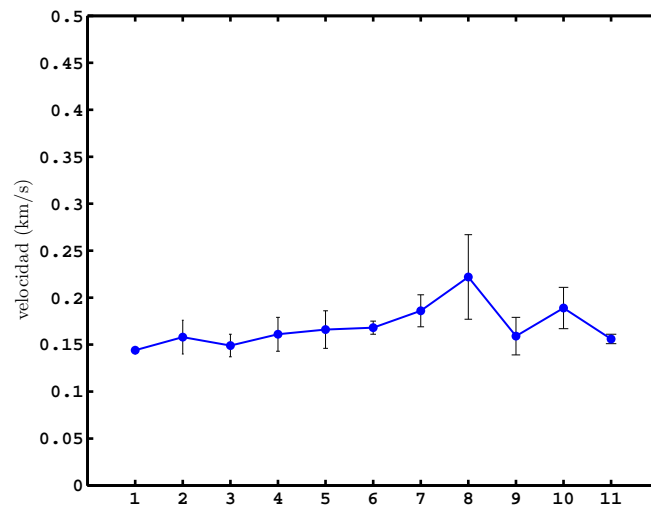


Figura 7.49: Velocidades estimadas a 83 m de profundidad en la estación Unidad Kennedy. Los números en el eje horizontal denotan a los eventos analizados (Tabla 7.7). Fuente: Autor.

La velocidad a 30 m de profundidad oscila entre 0.045 y 0.043 km/s, lo que indica

que la respuesta sísmica no ha variado del 12 de febrero de 1992 al 21 de octubre de 1995; se puede observar en la Figura 7.48 que en este caso, las estimaciones correspondientes a la velocidad son robustas. A 83 m de profundidad se observa un incremento significativo en la velocidad obtenida del registro del 6 de octubre de 1995. Sin embargo, este valor puede ser descartado debido a la baja calidad de los registros correspondientes a este evento; además, como se observa en la Figura 7.49, la barra de error para este evento denota una alta dispersión en las estimaciones.

Se calcularon las velocidades de la onda de corte utilizando la componente E-O, estos valores se presentan en la Tabla 7.10. Las velocidades estimadas con la componente E-O sólo se pudieron calcular a 30 m, debido a que en 83 m de profundidad no se tienen registros en la componente E-O, por falla en el sensor. Por la misma razón, la componente vertical tampoco fue registrada a partir del 10 de diciembre de 1994, por lo que sólo se obtuvieron estimaciones para los registros anteriores a esta fecha.

En la Tabla 7.10, se puede observar que las velocidades estimadas a 30 m con las componentes N-S y E-O son muy similares, lo cual es un indicio de que el medio es isótropo. Las velocidades de la onda P , estimadas a una profundidad de 83 m, oscilan entre 1.2 y 1.5 km/s.

A partir de los registros deconvolucionados y de las propiedades mostradas en la Tabla 7.3 se estimaron velocidades de propagación promedio, y utilizando las ecuaciones (3.41) y (3.43) se estimaron el módulo de cortante y el módulo volumétrico; los que a su vez, se sustituyeron en las ecuaciones (3.29) y (3.28) para obtener la relación de Poisson y el módulo de Young (Tablas 7.9 y 7.11).

Profundidad: 30 metros			
Fecha	ρ (kg/m ³)	β (m/s)	$\mu = \beta^2 \rho$ (N/m ²)
12/02/92	1240	45	2511000
15/05/93	1240	44	2400640
24/10/93	1240	44	2400640
23/05/94	1240	44	2400640
10/12/94	1240	44	2400640
19/06/95	1240	44	2400640
14/08/95	1240	43	2292760
06/10/95	1240	43	2292760
09/10/95	1240	44	2400640
12/10/95	1240	43	2292760
21/10/95	1240	44	2400640

Tabla 7.9: Propiedades estimadas utilizando las velocidades calculadas de los registros deconvolucionados. Fuente: Autor.

Fecha	Comp.	Ventana (S)	ω_c	n	Vel. 30 m (km/s)	Vel. 83 m (km/s)
12/02/92	N-S	1-21.47	3	10	0.0455	0.143
	E-O	–	–	–	–	–
	Vert.	–	–	–	–	–
15/05/93	N-S	5-45.95	2	10	0.044	0.171
	E-O	–	–	–	–	–
	Vert.	5-25.47	10	10	-	1.514
24/10/93	N-S	20-101.91	3	10	0.044	0.140
	E-O	20-101.91	3	10	0.0448	–
	Vert.	1-82.91	15	10	–	1.178
23/05/94	N-S	30-111.91	3	10	0.046	0.133
	E-O	30-111.91	3	10	0.044	–
	Vert.	30-111.91	10	10	–	1.325
10/12/94	N-S	35-75.95	3	10	0.044	0.145
	E-O	35-75.96	3	10	0.044	–
	Vert.	–	–	–	–	–
19/06/95	N-S	70-233.83	2	10	0.0469	0.147
	E-O	70-233.83	2	10	0.0448	–
	Vert.	–	–	–	–	–
14/08/95	N-S	90-253.83	2	10	0.0435	0.161
	E-O	90-253.83	2	10	0.0438	–
	Vert.	–	–	–	–	–
6/10/95	N-S	98-138.95	1.5	10	0.0408	0.230
	E-O	98-138.95	1.5	10	0.0432	–
	Vert.	–	–	–	–	–
9/10/95	N-S	100-140.95	2	10	0.0417	0.177
	E-O	100-140.95	2	10	0.0448	–
	Vert.	–	–	–	–	–
12/10/95	N-S	83-123.95	2	10	0.0426	0.180
	E-O	83-123.95	2	10	0.0432	–
	Vert.	–	–	–	–	–
21/10/95	N-S	90-253.83	2	10	0.0442	0.158
	E-O	90-253.83	2	10	0.0438	–
	Vert.	–	–	–	–	–

Tabla 7.10: Velocidades estimadas en las tres componentes sísmicas, utilizando los eventos indicados para la estación Unidad Kennedy. Fuente: Autor.

Profundidad: 83 metros							
Fecha	ρ (kg/m ³)	β (m/s)	$\mu = \beta^2 \rho$ (N/m ²)	α (m/s)	$K = \alpha^2 \rho - \frac{3}{4} \mu$ (N/m ²)	$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}$	$E = 3K(1 - 2\nu)$ (N/m ²)
12/02/92	1360	144	28200960	–	–	–	–
15/05/93	1360	158	33951040	1510	3075472720	0.49	101479699
24/10/93	1360	149	30193360	1180	1871018980	0.49	90095445
23/05/94	1360	161	35252560	1330	2379264580	0.49	105237925
10/12/94	1360	166	37476160	–	–	–	–
19/06/95	1360	168	38384640	–	–	–	–
14/08/95	1360	186	47050560	–	–	–	–
06/10/95	1360	222	67026240	–	–	–	–
09/10/95	1360	159	34382160	–	–	–	–
12/10/95	1360	189	48580560	–	–	–	–
21/10/95	1360	156	33096960	–	–	–	–

Tabla 7.11: Propiedades estimadas utilizando las velocidades calculadas de los registros deconvolucionados.

Conclusiones y recomendaciones

- Se validó la metodología usada para obtener la función de Green aproximada para medios acústicos, donde la velocidad cambia linealmente con la profundidad. Dicha validación se efectuó comparando la solución aproximada con la solución de Pekeris.
- Mediante la deconvolución de eventos sísmicos registrados en pozos localizados en el valle de México, fue posible estimar la respuesta sísmica del subsuelo de este valle.
- Se comprobó que la respuesta sísmica del subsuelo, donde se ubican las estaciones Chapultepec y Kennedy, es elástica y lineal; incluso para sismos de magnitudes mayores a 6 grados en la escala de Richter.
- La deconvolución aísla la respuesta sísmica de los efectos de la fuente y del instrumento; esto se corroboró a partir de los registros deconvolucionados correspondientes a las estaciones Kennedy y Chapultepec.
- Con relación al pozo Chapultepec, se obtuvieron velocidades efectivas para ondas *SH* de 0.441 km/s y 0.595 km/s a 22 y 52 m de profundidad, respectivamente.

- En el pozo de la Unidad Kennedy, se estimaron velocidades efectivas para ondas SH ; de 0.044 km/s y 0.167 km/s a 30 y 83 m de profundidad, respectivamente.
- En el pozo Chapultepec, se estimaron velocidades efectivas para ondas P ; a 22 m de profundidad, la velocidad efectiva obtenida fue de 1.5 km/s, y a 52 m de profundidad, la velocidad calculada fue de 1.03 km/s.
- En el pozo de la estación Kennedy, se estimó una velocidad efectiva para ondas P a 83 m de profundidad de 1.34 km/s. Las velocidades estimadas serán usadas en estudios de microzonificación sísmica, efectos de sitio y respuesta sísmica de estructuras.
- Se comprobó que la deconvolución cambia condiciones de frontera; la deconvolución genera fuentes virtuales de las cuales la energía es irradiada.
- Utilizando las velocidades estimadas de los registros deconvolucionados, se obtuvieron módulos elásticos, para la Unidad Kennedy se calculó a 83 m un módulo de elasticidad efectivo $E = 98937689 \text{ N/m}^2$, un módulo de Poisson $\nu = 0.49$ y un módulo volumétrico efectivo $K = 2441918760 \text{ N/m}^2$. Con los módulos estimados se caracterizó el suelo donde se localiza la estación Kennedy.

§8.1 Recomendaciones

- Regularizar la función de Green elástica asintótica con la finalidad de obtener una función de Green elástica heterogénea válida en alta y baja frecuencia.
- Usar la función Green heterogénea en la migración de Kirchhoff para obtener amplitudes verdaderas.

- Estimar la respuesta sísmica de valles aluviales usando el Método indirecto de elementos de frontera (IBEM) para medios heterogéneos.
- Caracterizar otros sitios de la República Mexicana mediante la deconvolución de eventos registrados en pozos.

- Realizar la deconvolución en tiempo y comparar los resultados obtenidos con la deconvolución en frecuencia.
- Interpretar registros deconvolucionados utilizando las funciones de transferencia correspondientes a medios estratificados.

- Estimar atenuaciones de ondas a partir de la deconvolución de datos sísmicos de pozo.

Referencias

- [1] Ammon C. J. (1992). *A Comparison of Deconvolution Technique*, Pure and Applied Geophysics, University of California-Santa Cruz.
- [2] Aki K. y Richards P. G. (1980). *Quantitative seismology*. Ed. W. H. Freeman and Company. Volumen 1, USA.
- [3] Alkhalifah, T. (1997). *Prestack time migration for anisotropic media*. SEP-94, 263-298.
- [4] Bancroft, Jonh C. (2001). *Review of seismic imaging: poststack*. CSEG Recorder. CREWES Research Report, Vol. 13.
- [5] Bender, C. M. y S. A. Orszag (1978). *Advanced mathematical methods for Scientist and engineers, 2a ed., Mc Graw-Hill Book Co., New York*.
- [6] Bustamante J. (1964). *Response spectra of earthquakes on very soft clay*. Bulletin of the Seismological Society of America. 54, 855-866.
- [7] Borchardt, R.D. (1970). Effects of local geology on ground motion near San-Francisco Bay. Bull. Seismol. Soc. Am. 60 29-61-2213.
- [8] Claerbout Jon F., Fomel S. (2005). *Geophysical Estimation by Example*.

- [9] Clayton R. W., and Wiggins. (1976). R. A., *Source shape Estimation and Deconvolution of Teleseismic, Body Waves*, Geophys. J. R. Astron. Soc (1976) 47, 151-177.
- [10] *Diseño por sismo*, Cap. C13 del Manual de Diseño de Obras Civiles, Comisión Federal de Electricidad, México. D. F.
- [11] Dimitriu, P. Theodulidis, N., Hatzidimitriou, P., Anastasiadis, A. (2001). *Sediment non-linearity and attenuation of seismic waves: a study of accelerograms from Lefkas, western Greece*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Volumen 21, 63-73.
- [12] Dix C. H. (1952). *Seismic prospecting for oil*. Harper and Brothers.
- [13] Graizer, V. and A. Shakal (2001, 14 y 15 de Octubre) *Analisis of some of CSMIP strong-motion geotechnical array recordings*. Proceeding of the International Workshop for Site Selection, Instalation and Operation of Geotechnical Strong-Motion Arrays: Workshop 1, Inventory of Current and Planner Arrays. COSMOS, SCEC and USC.
- [14] Grêt, A. and Snieder, R., Scales, J. (2006). *Time-lapse monitoring of rock properties with coda wave interferometry*. Journal of Geophysical Research, vol. 111.
- [15] Johnson, L. R. (1979). *Seismic sonree theory*. Reviews of Ceophys. and Space Phys. 17, 328-336.
- [16] Jongmans D., Demanet D., Horrent C., Campillo M., Sanchez-Sesma F.J. (1996). *Dynamic soil parameters determination by geophysical prospecting in Mexico City: Implication for site effect modeling*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 15 (8), pp. 549-559.
- [17] Kasahara K. (1981). *Earthquake mechanics*. Cambridge University Press, Malta.

-
- [18] Lindseth, R. O. (1971). *Recent advances in digital processing of geophysical data*. Soc. of Expl. Geophys.
- [19] Love, A. E. H. (1927). *Some problems of geodynamics*. Londres, Cambridge Univ. Press.
- [20] Mallet, R. (1848). *On the dynamics of earthquakes; being an attempt to reduce their observed phenomena to the known laws of wave motion in solids and fluids*. Trans. Roy. Irish Acad., **21**, 50-106.
- [21] Marsal, R. J. y M. Mazari (1959). *El subsuelo de la ciudad de México/The subsoil of Mexico City*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F., México.
- [22] Meli Piralla (2002). *Diseño estructural*. Limusa, 2da ed. México.
- [23] Mehta, K., Snieder, R., y Graizer, V. (2007). *Downhole receiver function: a case study*. Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 97, No 5. pp. 1396-1403.
- [24] Miranda, R. (2005). *Simplified analysis tools for rapid seismic evaluation of existing buildings in urban areas*. Submitted for publication to J. of Structural Engineering, ASCE.
- [25] Oldenburg, D. W. (1981). *A Comprehensive Solution to the Linear Deconvolution Problem*. Geophys. J. R. Astron Oc. Vol 65, pp 331-357.
- [26] Olsen, K. B. y R. J. Archuleta. (1996). *Three-dimensional simulation of earthquakes on Los Angeles fault system*. Bull Seism. Soc. Am. 86, 575-596.
- [27] Osman, O. M. (1994). *Efficient algorithms for deconvolution problem in reflection seismology*, Ain Shams Unyversity, Cairo Egipto.

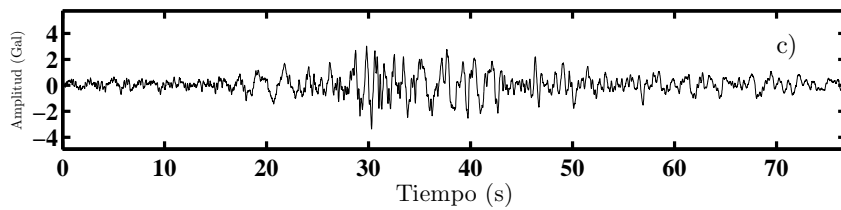
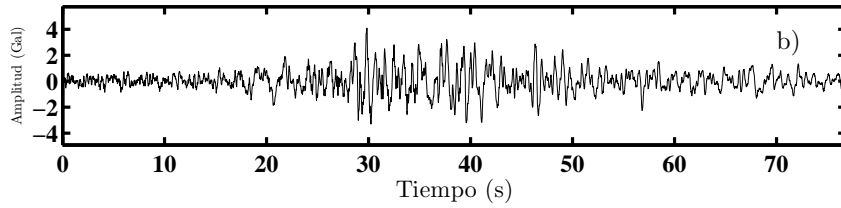
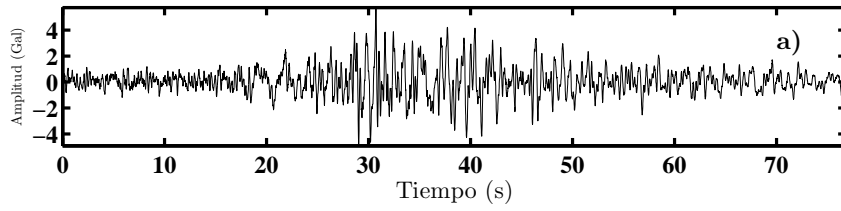
-
- [28] Ordaz, S. M., Santoyo, M. A., Shigh, K. S., Quaas, R. (1993). *Análisis preliminar de los acelerogramas de pozo obtenidos el 31 de mayo de 1990 en la ciudad de México*. Coordinación de Investigación, Riesgos Geológicos.
- [29] Papageorgiou, A.S. and Kim, J. (1993). *Propagation and amplification of seismic waves in 2D valleys excited by obliquely incident P and SV waves*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 22, 167-182.
- [30] Pech, P. A. (1998). *Modelación matemática de propagación de ondas sísmicas en medios heterogéneos*. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México. México D. F.
- [31] Rayleigh, Lord (1885). *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*. Proc. London Math. Soc., 17, 4-11.
- [32] Rice, R. B., *Inverse convolution filters*, Geophysics, 27, 4-18.
- [33] Richart, F. E., J. R. Hall, and R. D. Woods (1970). *Vibrations of soils and foundations*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- [34] Robinson, E. A. (1954). *Predictive decomposition of time series with applications to seismic exploration*, Ph. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology; (Reprinted in Geophysics, 32, 418-484, 1967).
- [35] Robinson, E. A. y Treitel, S. (1980). *Geophysical signal analysis*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.
- [36] Robinson E. A. (1985). *Seismic time-invariant convolutional model*. Geophysics, 50, 2742-2752.
- [37] Rosenblueth, E. (1952). *Teoría del diseño sísmico sobre mantos blandos*. Ediciones ICA, Serie B, México, D. F., México, Vol. 14, 3-12.

- [38] Şafak E. (2001). *Local site effects and dynamic soil behavior*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 21, 453-458.
- [39] Sánchez Sesma, F.J. and Esquivel, J.A. (1979). *Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves*. Bulletin of the Seismological Society of America. 1979; 69: 1107-1120
- [40] Sánchez Sesma, F. J., Ramos Martínez, J. and Campillo, M. (1993). *An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 22, 279-295.
- [41] Snieder R., E. Şafak (2006). *Extracting the building response using seismic interferometry: theory and application to the Millikan Library in Pasadena, California*. Bulletin of Seismological Society of America. 96, No. 2, 586-598.
- [42] Snieder R., Sheiman J. y Calvert R. (2006). *Equivalence of the virtual-source method and wave-field deconvolution in seismic interferometry*. Physical Review E **73**, 066620.
- [43] Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, Base Mexicana de Datos de Sismos Fuertes, Vol. 2, 1996.
- [44] Stonley, R. (1924). *Elastic waves at the surface of separation of two solids*. Proc. Roy. Soc. (Londres), A-106, 416-28.
- [45] Treitel, S. y Robinson, E. A. (1964). *The stability of digital filters: IEEE Transactions on Geoscience Electronics* vol. **GE-2**, pp. 6-18.
- [46] Trifunac, M. D. (1970). *Ambient vibration test of a thirty-nine story steel frame building*. EERL 70-02, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, 40 pp.

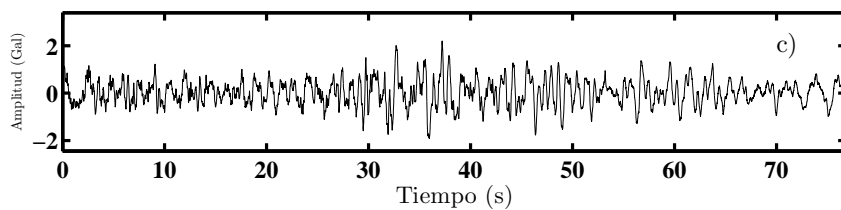
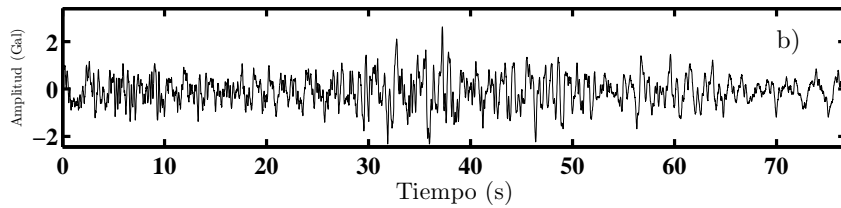
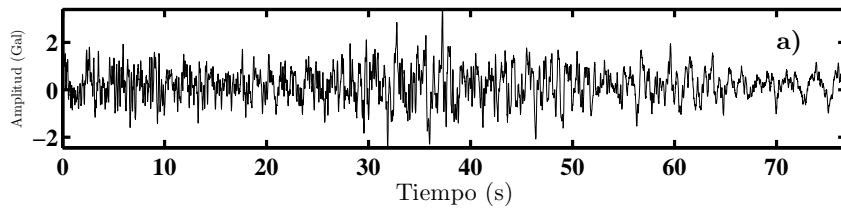
- [47] Tsai, N. (1969). *Influence of local geology on earthquake motion*. Tesis doctoral, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- [48] Tsvankin Ilya (2001). *Seismic signatures and analysis of reflection data in anisotropic media*. Pergamon, USA.
- [49] Uzcategui, O. (1995). *2-D depth migration in transversely isotropic media using explicit operators*. Geophysics, 60, no. 20, 780-806.
- [50] Webster, G. M. (1978). *Deconvolution*. Soc. Expl. Geophys.
- [51] Zeevaert, L. (1964). *Strong ground motions recorded during earthquakes of May the 11th and 19th, 1962 in Mexico City*. Bulletin of Seismological Society of America. 54, 209-231.
- [52] Ziolkowski, A. (1991). *Why don't we measure seismic signatures?*. Geophysics, 56, 190-201.
- [53] CENAPRED (2008). *Sismología y riesgo sísmico*. En cenapred.unam.mx. [En línea]. Disponible en: <http://www.cenapred.unam.mx/es/Investigacion/RGeologicos/Sismologia/#opcion2>

Registros pozo Chapultepec

EL pozo Chapultepec está ubicado en las coordenadas 19.4157 lat. N, 99.2048 long. W; la clave de la estación es CHA1; es la estación número 14 de observación sísmica de la ciudad de México y se encuentra en la zona de terreno firme. Todos los registros utilizados tienen tiempo absoluto completo, con un intervalo de muestreo de 0.01 segundos; por lo tanto la máxima frecuencia es de 50 Hz. Los registros mostrados en este apéndice están ordenados de forma descendente presentando 1) la componente horizontal con orientación NS y 2) la componente vertical, siendo: a) el acelerograma registrado en la superficie, b) es el acelerograma registrado a 22 metros de profundidad y c) el acelerograma registrado a 52 metros de profundidad. El material que se reporta en el archivo de los acelerogramas es arena limosa en la superficie, arenas con grava a 22 m y arena poco limosa a 52 m.

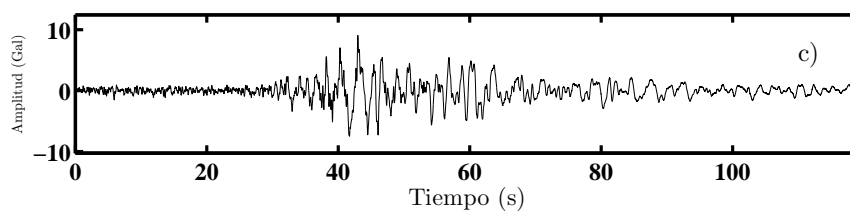
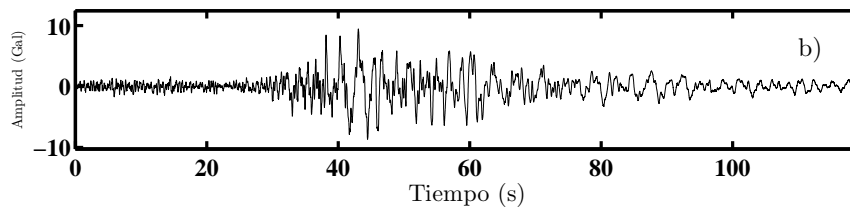
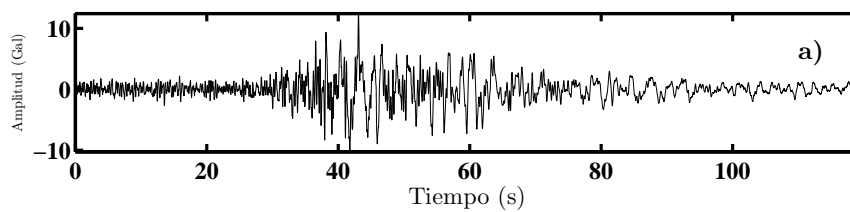


1) Componente N-S

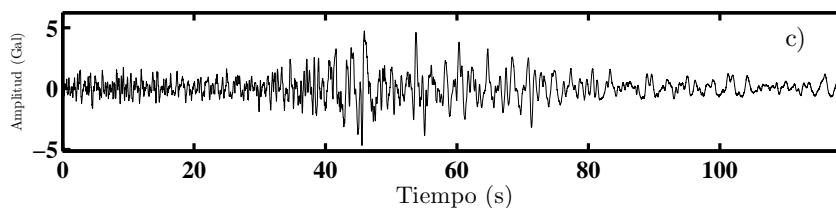
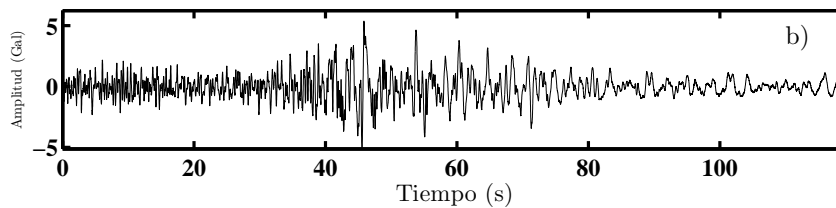
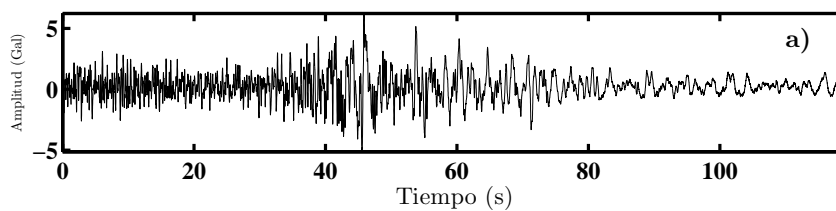


2) Componente vertical

Figura A.1: Acelerogramas del 10 de diciembre de 1994, la magnitud del sismo es $M_c = 6,3$. Fuente: Autor.

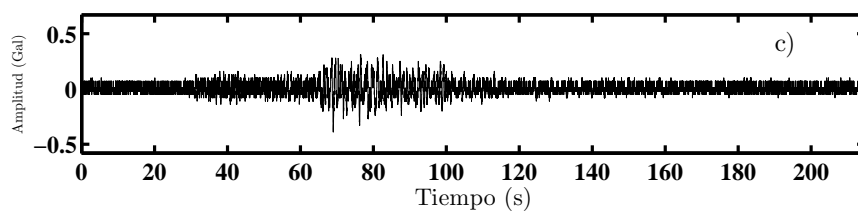
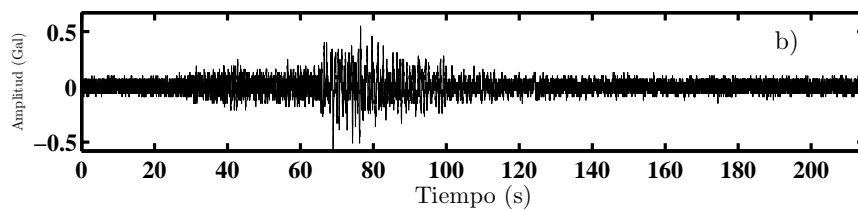
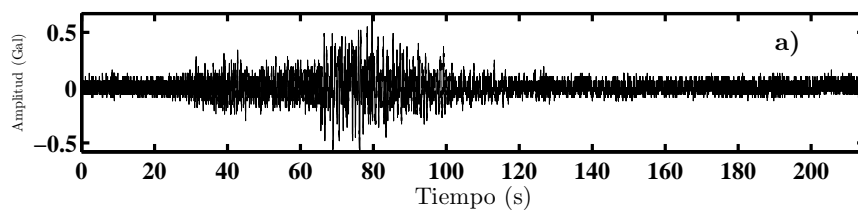


1) Componente N-S

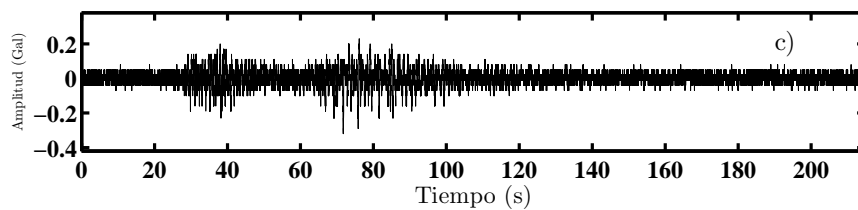
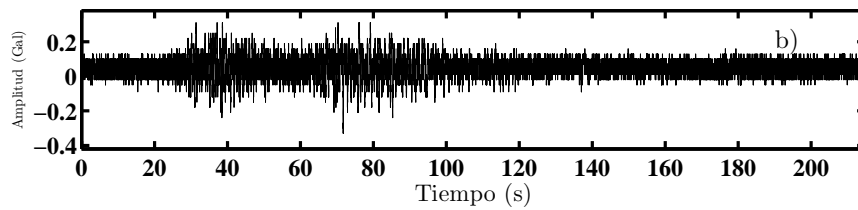
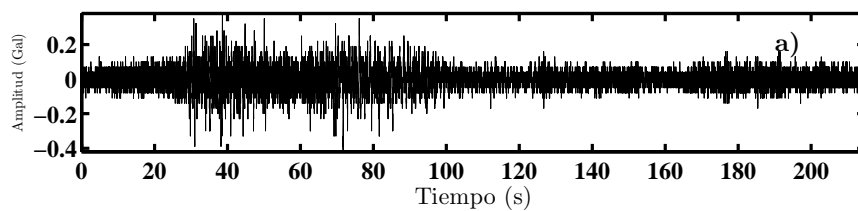


2) Componente vertical

Figura A.2: Acelerogramas del 14 de septiembre de 1995, la magnitud del sismo es $M_s = 6,4$. Fuente: Autor.

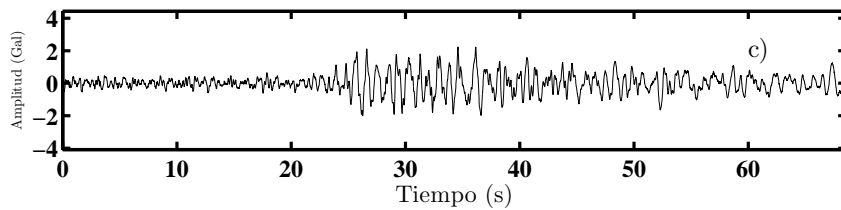
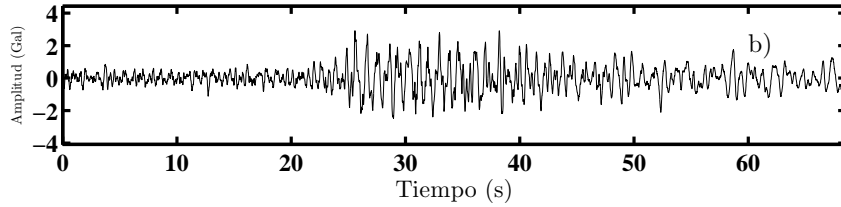
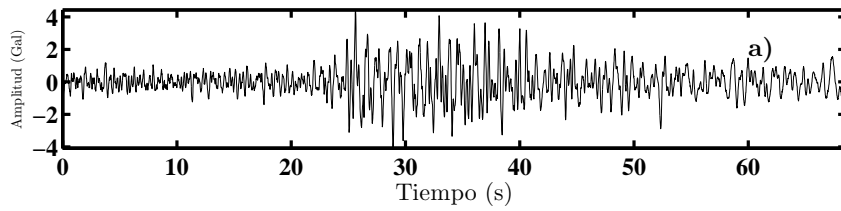


1) Componente N-S

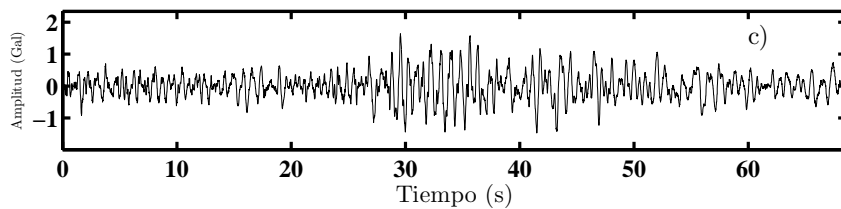
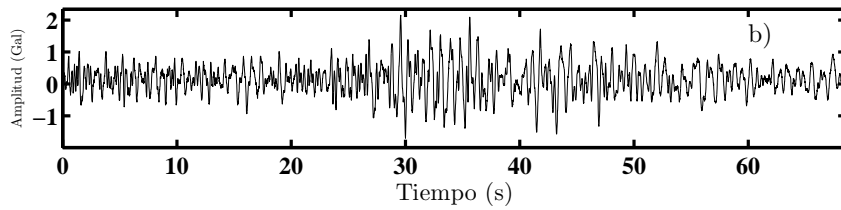
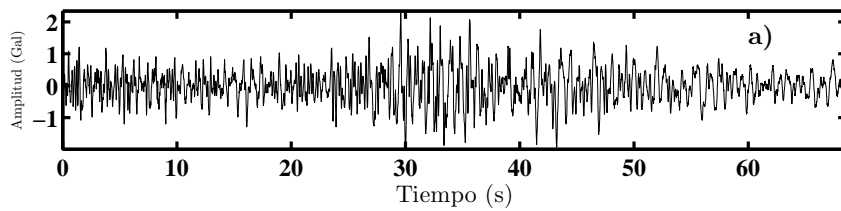


2) Componente vertical

Figura A.3: Acelerogramas del 13 de marzo de 1996, la magnitud del sismo es $M_s = 4,4$. Fuente: Autor.

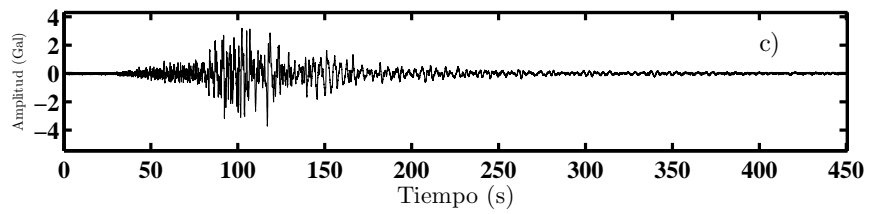
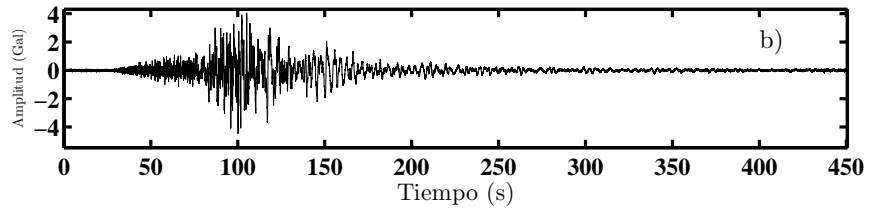
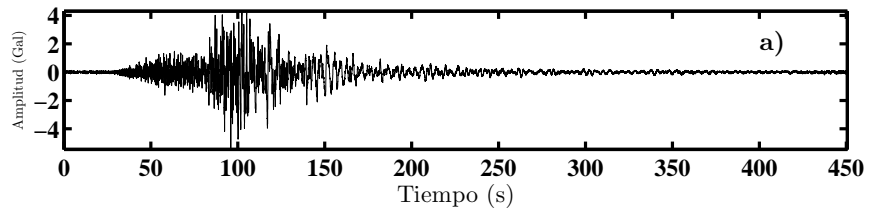


1) Componente N-S

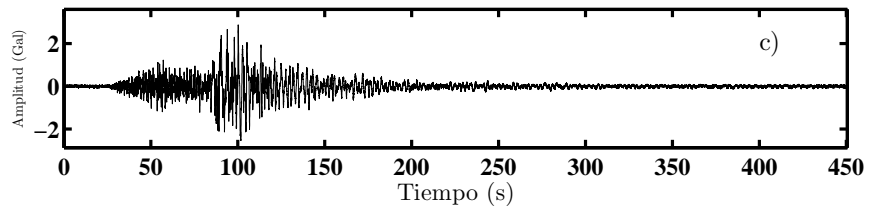
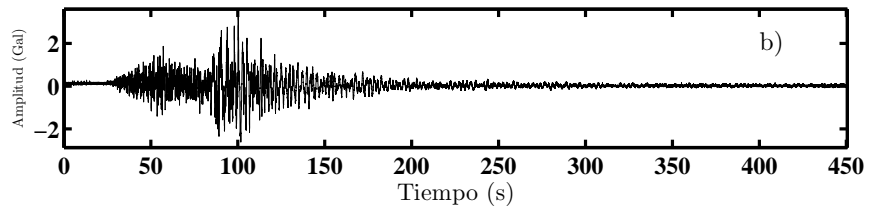
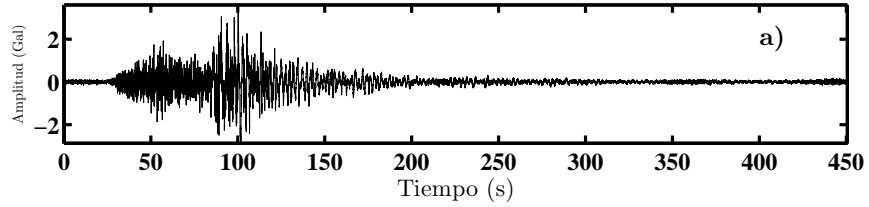


2) Componente vertical

Figura A.4: Acelerogramas del 15 de julio de 1996, la magnitud del sismo es $M_s = 6,5$. Fuente: Autor.

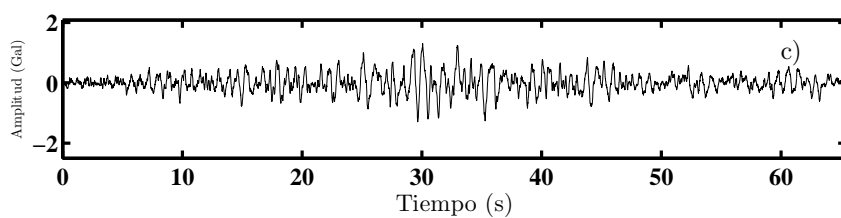
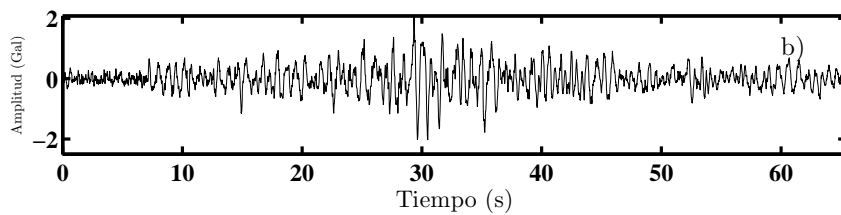
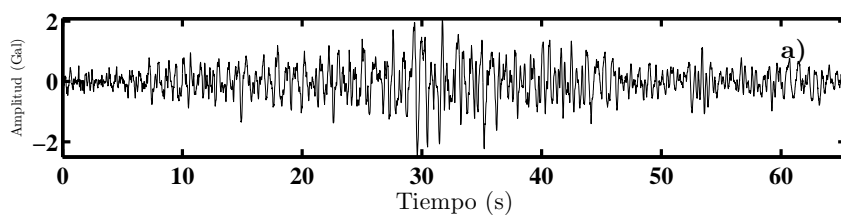


1) Componente N-S

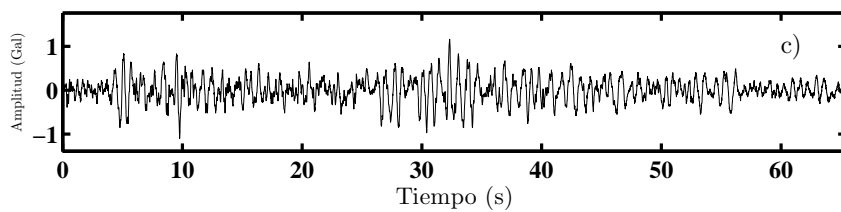
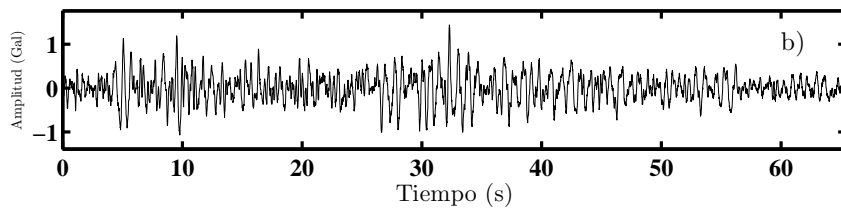
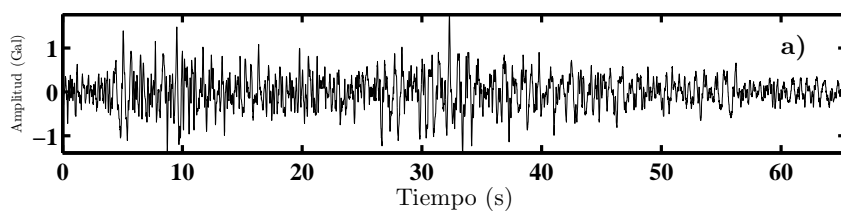


2) Componente vertical

Figura A.5: Acelerogramas del 11 de enero de 1997, la magnitud del sismo es $M_s = 5,9$. Fuente: Autor.



1) Componente N-S



2) Componente vertical

Figura A.6: Acelerogramas del 20 de abril de 1998, la magnitud del sismo es $M_c = 5,0$. Fuente: Autor.

Tablas pozo Chapultepec

En esta sección se presentan las velocidades estimadas correspondientes a la estación Chapultepec. Las ventanas utilizadas se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas tipo Butterworth, con una frecuencia de corte ω_c y de grado n . Los límites indican el inicio y el final de la ventana seleccionada del acelerograma.

10 de diciembre de 1994					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
10.00	30.48	10.00	10.00	0.440	0.600
10.00	50.96	10.00	10.00	0.440	0.545
20.00	40.48	10.00	10.00	0.440	0.600
20.00	60.96	10.00	10.00	0.440	0.545
25.00	45.48	10.00	10.00	0.440	0.545
25.00	65.96	10.00	10.00	0.440	0.600
40.00	60.48	10.00	10.00	0.440	0.600
35.00	75.96	10.00	10.00	0.440	0.600
35.00	45.24	10.00	10.00	0.440	0.600
30.00	40.24	10.00	10.00	0.400	0.600

Tabla B.1: Velocidades estimadas para el evento del 10 de diciembre de 1994. Fuente: Autor.

14 de septiembre de 1995					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
20.00	101.92	20.00	10.00	0.400	0.600
30.00	50.48	10.00	10.00	0.400	0.600
30.00	70.96	10.00	10.00	0.440	0.545
30.00	111.92	10.00	10.00	0.440	0.600
25.00	45.48	10.00	10.00	0.400	0.667
25.00	65.96	10.00	10.00	0.400	0.667
25.00	106.92	10.00	10.00	0.400	0.600
50.00	90.96	10.00	10.00	0.440	0.600
20.00	30.24	10.00	10.00	0.440	0.667
20.00	60.96	10.00	10.00	0.400	0.667

Tabla B.2: Velocidades estimadas para el evento del 14 de septiembre de 1995. Fuente: Autor.

13 de marzo de 1996					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
60.00	70.24	10.00	10.00	0.489	0.500
60.00	80.48	10.00	10.00	0.440	0.667
60.00	100.96	10.00	10.00	0.400	0.750
60.00	141.92	10.00	10.00	0.440	0.600
20.00	183.84	15.00	10.00	0.550	0.462
20.00	101.92	10.00	10.00	0.489	0.600
20.00	183.84	10.00	10.00	0.489	0.600
70.00	80.24	10.00	10.00	0.489	0.545
70.00	90.48	10.00	10.00	0.489	0.545
70.00	110.96	10.00	10.00	0.440	0.667
70.00	151.92	10.00	10.00	0.440	0.600

Tabla B.3: Velocidades estimadas para el evento del 13 de marzo de 1996. Fuente: Autor.

15 de julio de 1996					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
20.00	30.24	10.00	10.00	0.440	0.600
20.00	40.48	10.00	10.00	0.400	0.667
20.00	60.96	10.00	10.00	0.400	0.667
25.00	35.24	10.00	10.00	0.440	0.545
25.00	65.96	10.00	10.00	0.440	0.600
24.00	64.96	10.00	10.00	0.440	0.545

Tabla B.4: Velocidades estimadas para el evento del 15 de julio de 1996. Fuente: Autor.

11 de enero de 1997					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
40.00	80.96	10.00	10.00	0.440	0.667
40.00	60.48	10.00	10.00	0.489	0.600
40.00	121.92	10.00	10.00	0.440	0.545
80.00	90.24	10.00	10.00	0.440	0.545
80.00	100.48	10.00	10.00	0.400	0.600
80.00	120.96	10.00	10.00	0.440	0.545
80.00	161.92	10.00	10.00	0.440	0.600
115.00	125.24	10.00	10.00	0.440	0.545
115.00	135.48	10.00	10.00	0.440	0.600
115.00	155.96	10.00	10.00	0.489	0.500
40.00	203.84	10.00	10.00	0.440	0.600

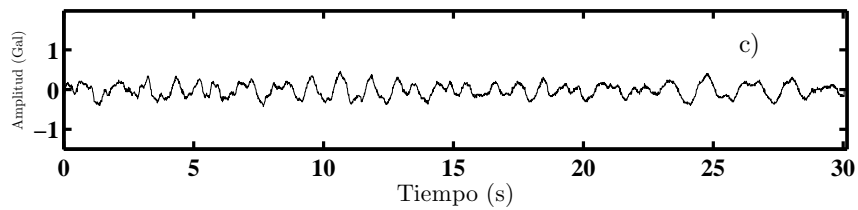
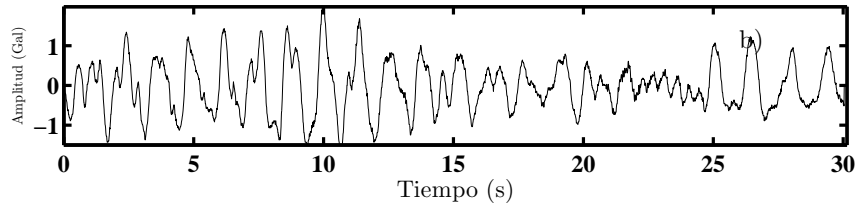
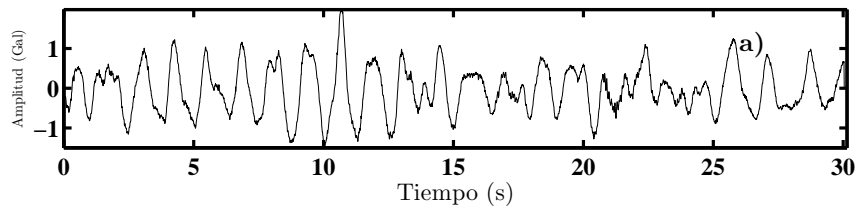
Tabla B.5: Velocidades estimadas para el evento del 11 de enero de 1997. Fuente: Autor.

20 de abril de 1998					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
10.00	20.24	10.00	10.00	0.440	0.600
10.00	30.48	10.00	10.00	0.440	0.545
10.00	50.96	10.00	10.00	0.489	0.545
20.00	60.96	10.00	10.00	0.440	0.600
20.00	40.48	10.00	10.00	0.489	0.545
29.00	49.48	10.00	10.00	0.489	0.600
29.00	39.24	10.00	10.00	0.440	0.600
40.00	60.48	10.00	10.00	0.440	0.667

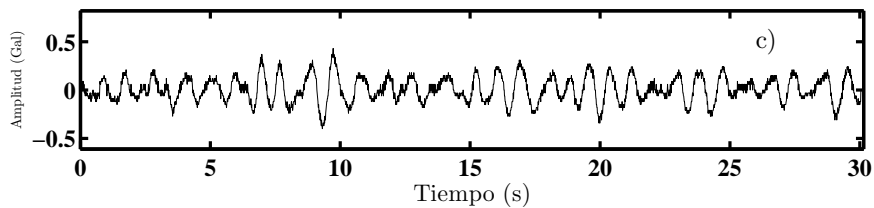
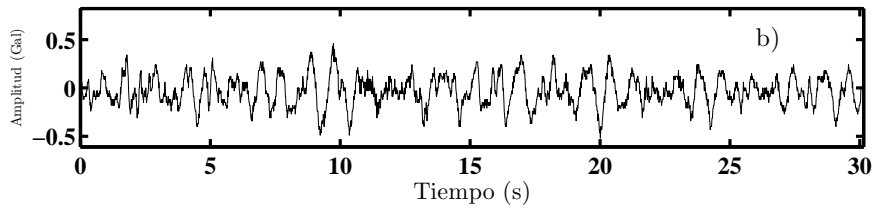
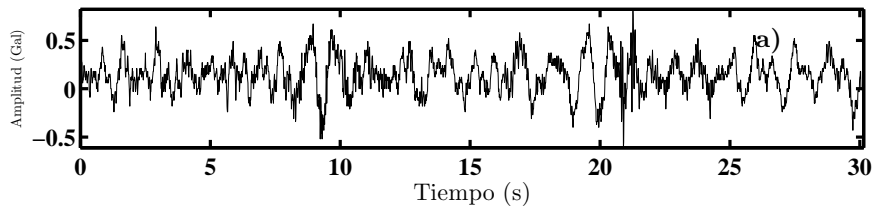
Tabla B.6: Velocidades estimadas para el evento del 20 de abril de 1998. Fuente: Autor.

Registros Unidad Kennedy

EL pozo Chapultepec está ubicado en las coordenadas 19.4186 lat. N, 99.1111 long. W; la clave de la estación es UNK1; es la estación número 9 de la red de observación sísmica de la ciudad de México y se encuentra dentro de la zona lago. Todos los registros utilizados tienen tiempo absoluto completo, con un intervalo de muestreo de 0.01 segundos; por lo tanto la máxima frecuencia es de 50 Hz. Los registros mostrados en este apéndice están ordenados de forma descendente presentando 1) la componente horizontal con orientación NS y la componente vertical, siendo: a) el acelerograma registrado en la superficie, b) es el acelerograma registrado a 30 metros de profundidad y c) el acelerograma registrado a 83 metros de profundidad. El material que se reporta en el archivo de los acelerogramas es arcilla en la superficie, arcilla a 30 m y arcilla limosa con grava a 83 m.

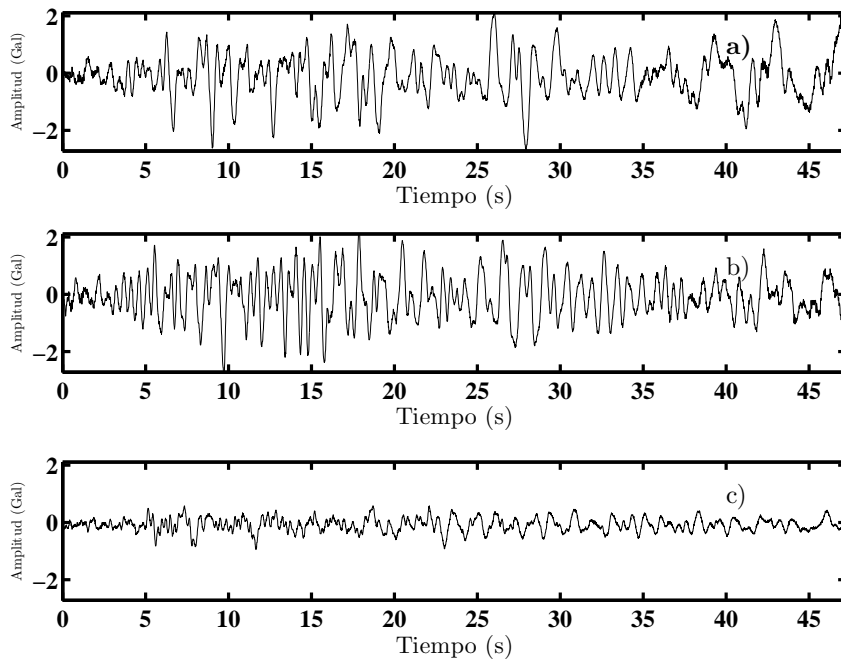


1) Componente N-S

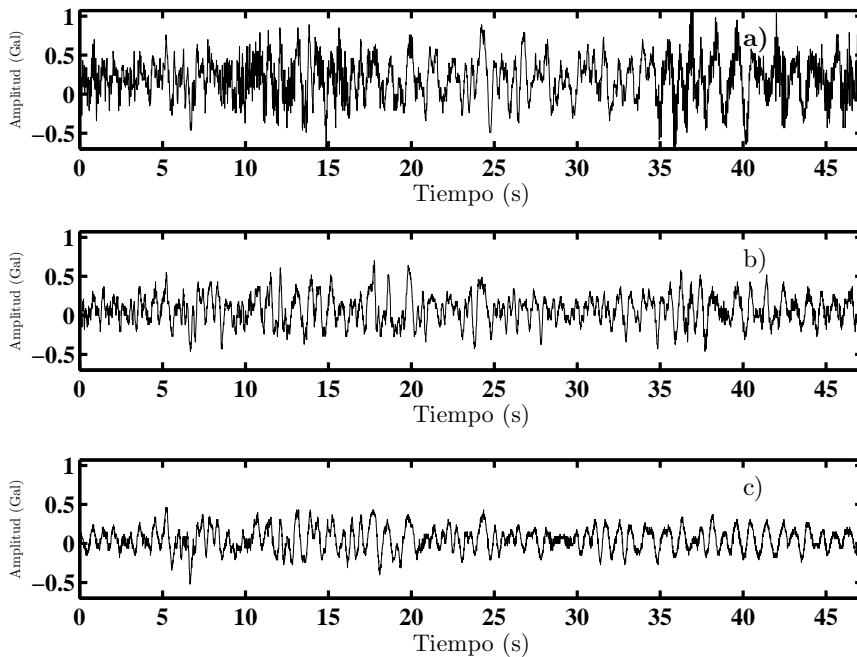


2) Componente vertical

Figura C.1: Acelerogramas del 12 de febrero de 1992, la magnitud del sismo es $M_c = 5,26$. Fuente: Autor.

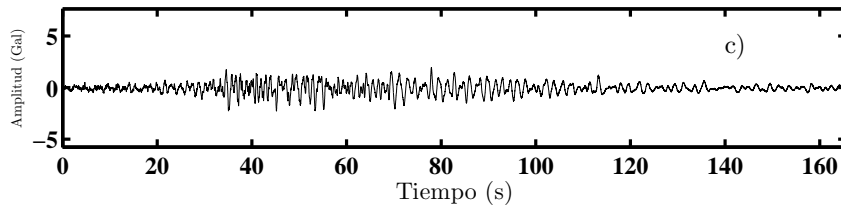
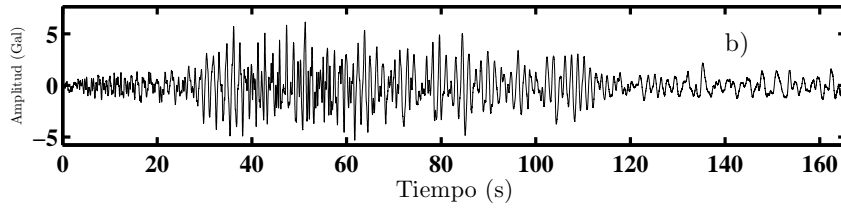
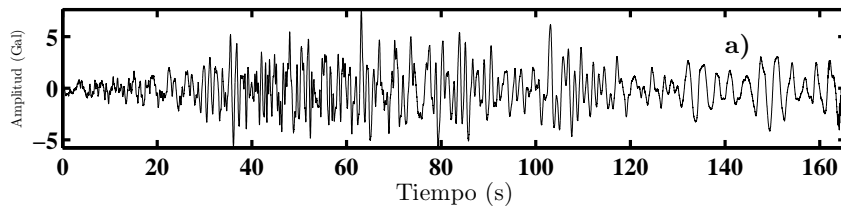


1) Componente N-S

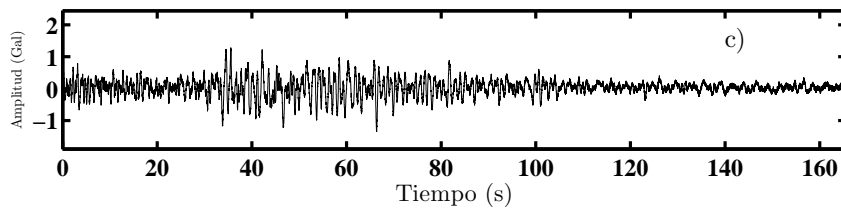
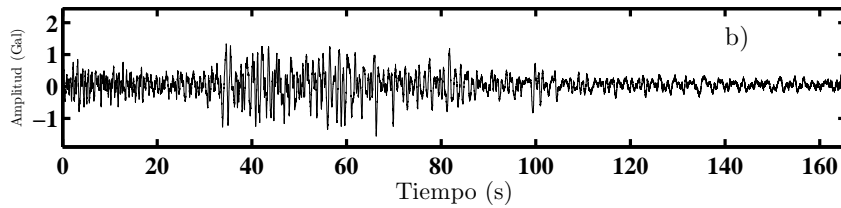
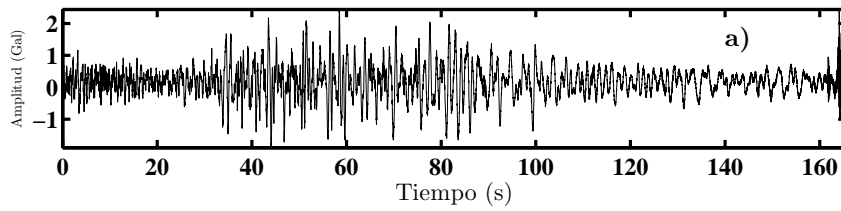


2) Componente vertical

Figura C.2: Acelerogramas del 15 de mayo de 1993, la magnitud del sismo es $M_c = 5,7$.
Fuente: Autor.

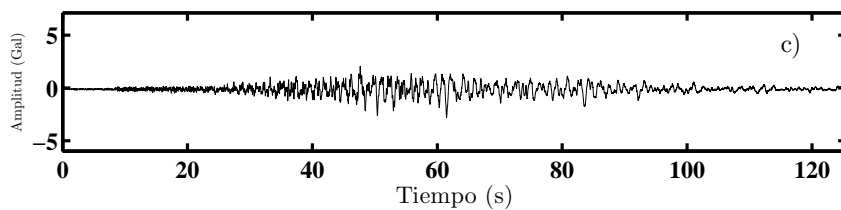
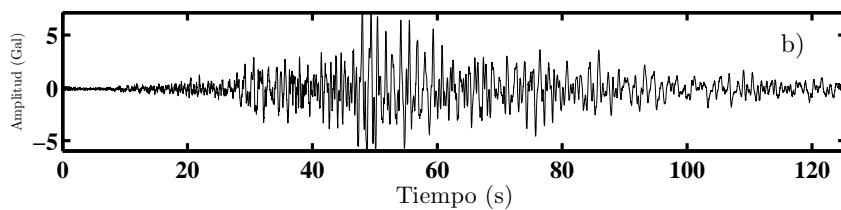
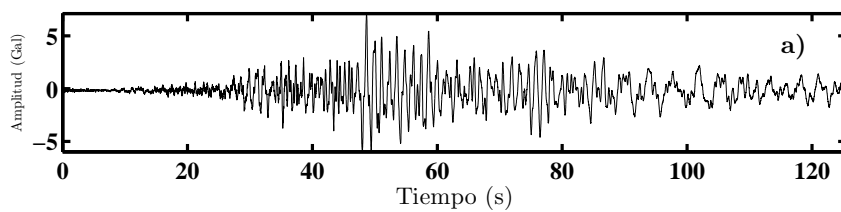


1) Componente N-S

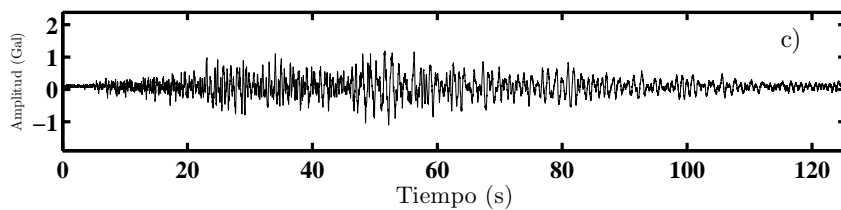
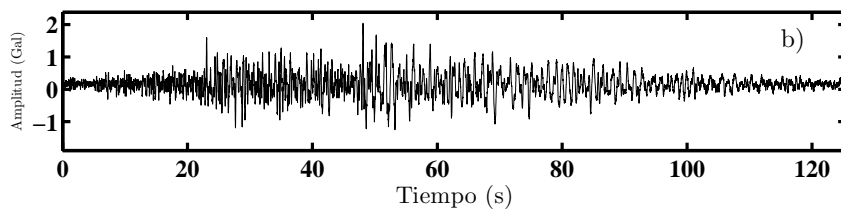
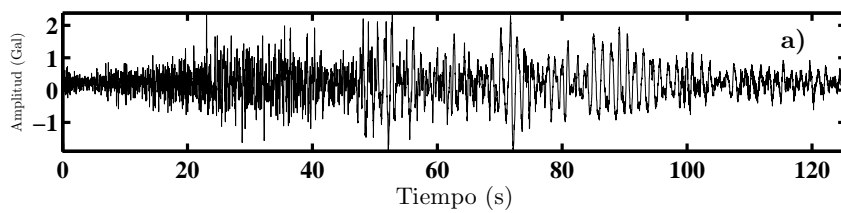


2) Componente vertical

Figura C.3: Acelerogramas del 24 de octubre de 1993, la magnitud del sismo es $M_c = 6,7$. Fuente: Autor.

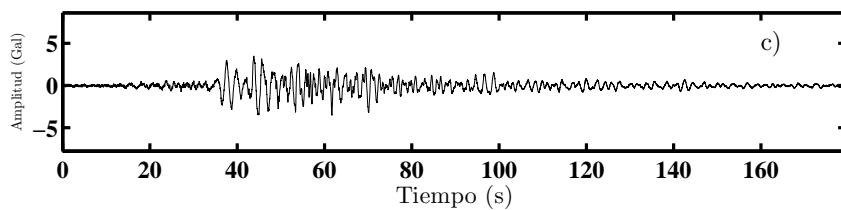
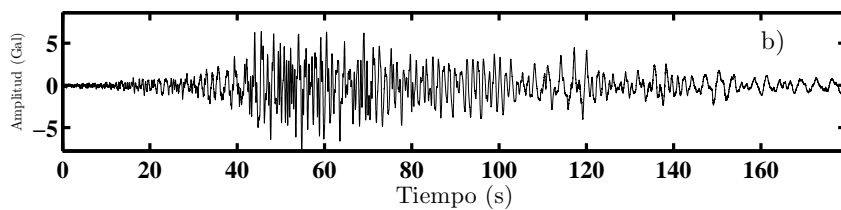
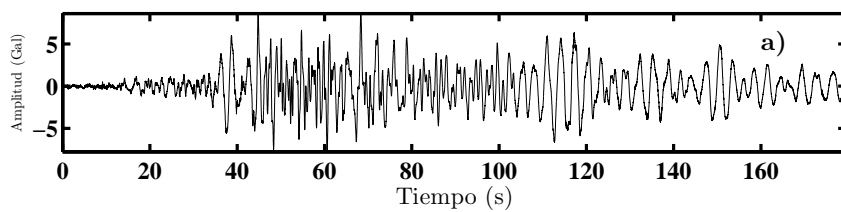


1) Componente N-S

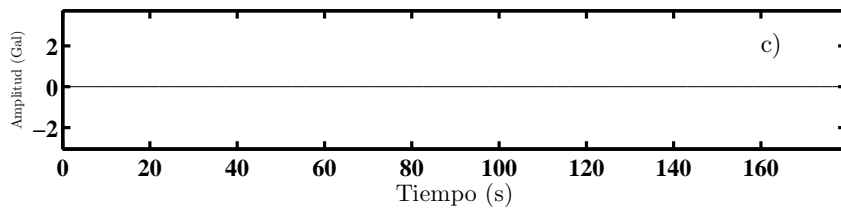
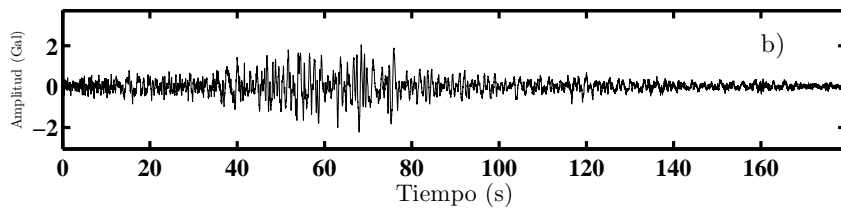
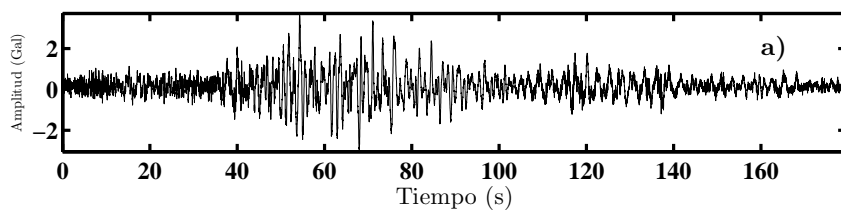


2) Componente vertical

Figura C.4: Acelerogramas del 23 de mayo de 1994, la magnitud del sismo es $M_c = 5,6$. Fuente: Autor.

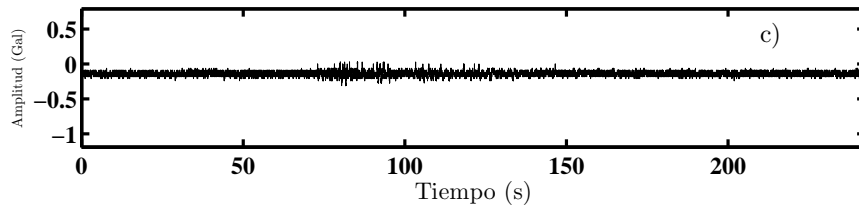
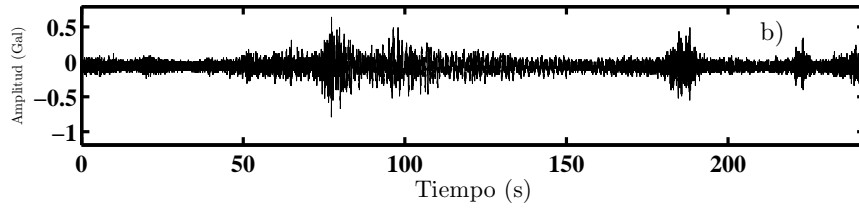
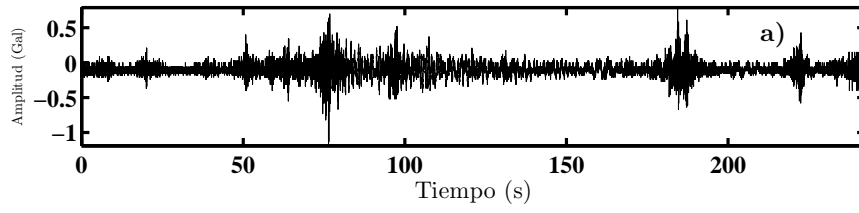


1) Componente N-S

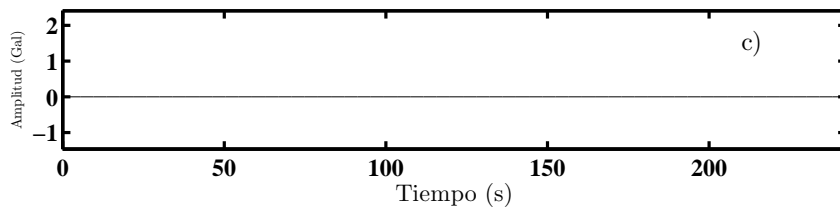
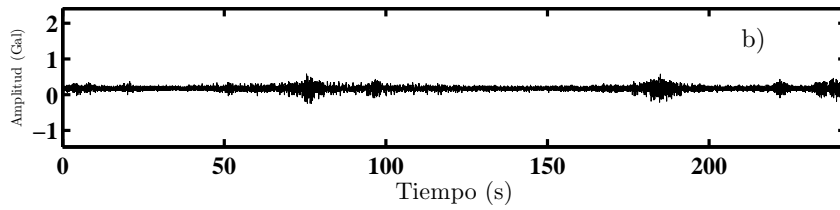
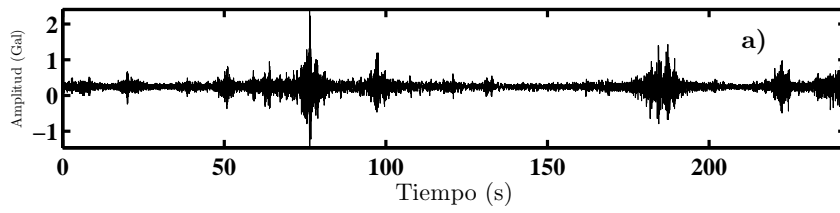


2) Componente vertical

Figura C.5: Acelerogramas del 10 de diciembre de 1994, la magnitud del sismo es $M_c = 6,3$. Fuente: Autor.

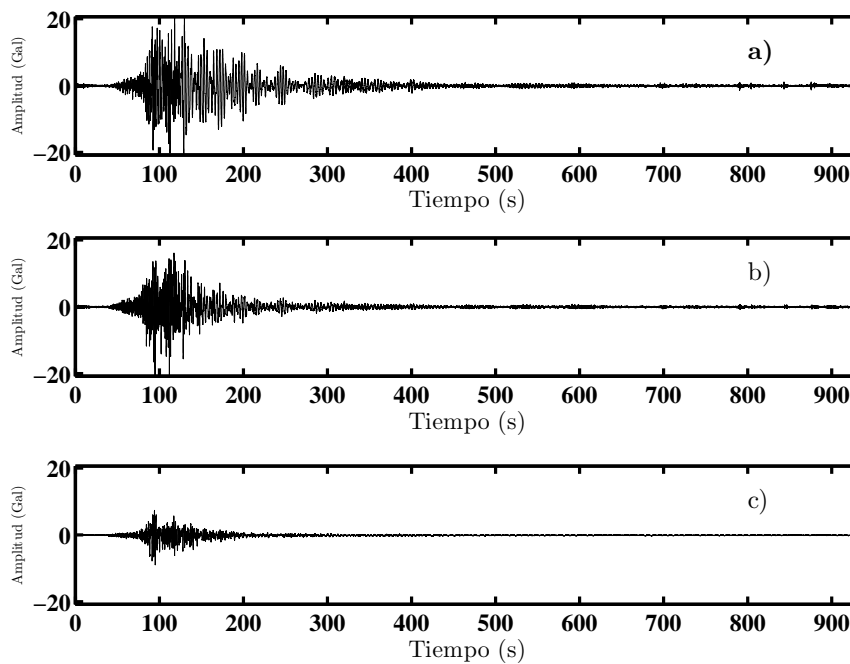


1) Componente N-S

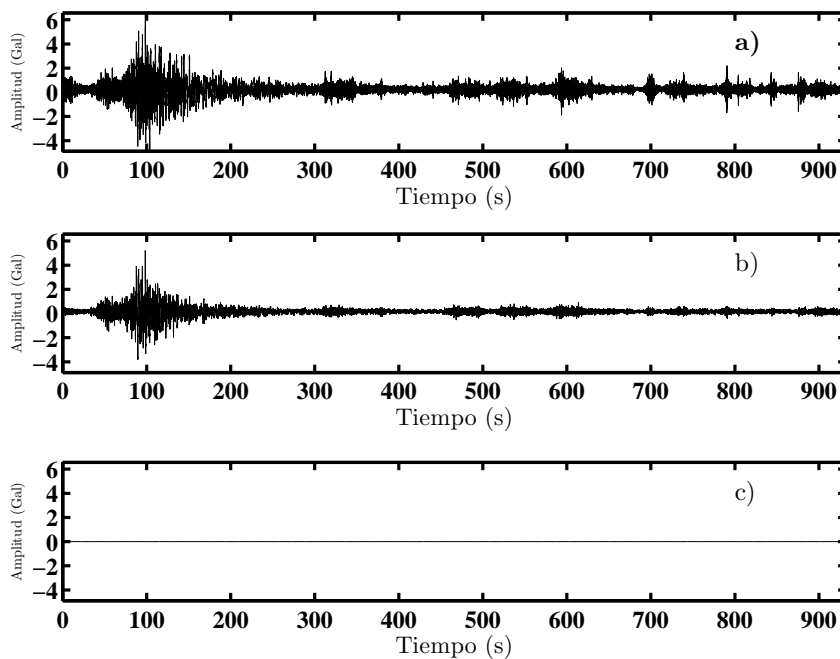


2) Componente vertical

Figura C.6: Acelerogramas del 19 de julio de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 4,7$.
Fuente: Autor.

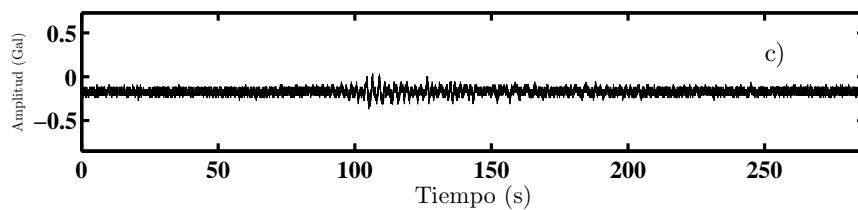
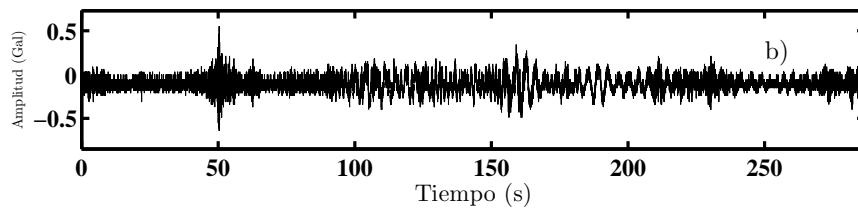
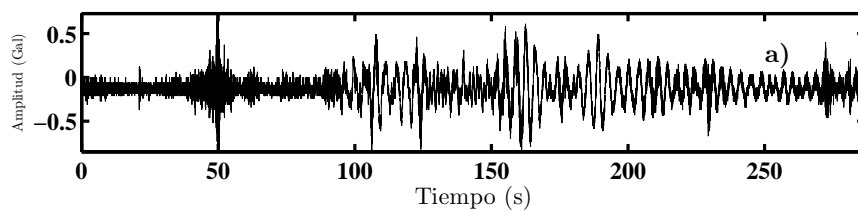


1) Componente N-S

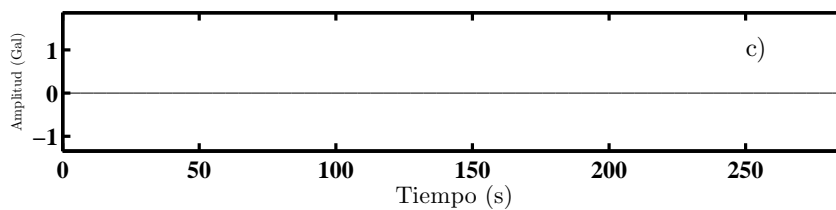
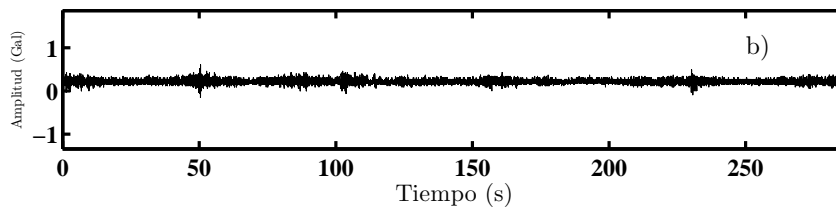
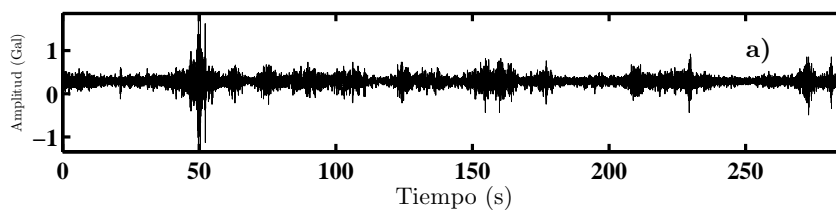


2) Componente vertical

Figura C.7: Acelerogramas del 14 de septiembre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 7,3$. Fuente: Autor.

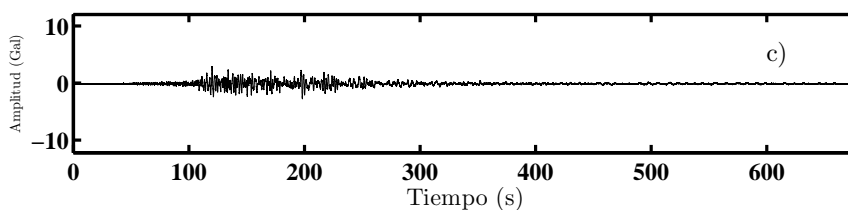
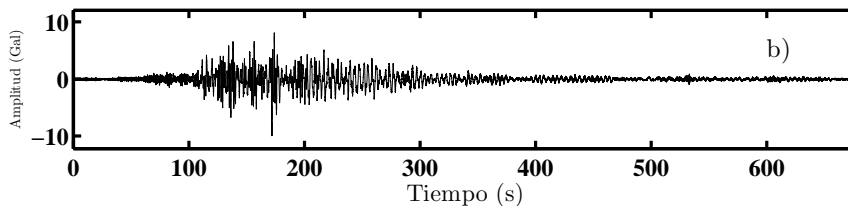
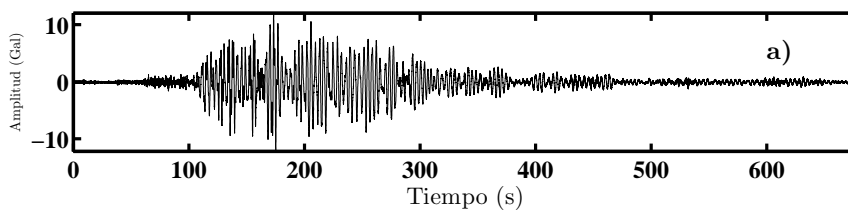


1) Componente N-S

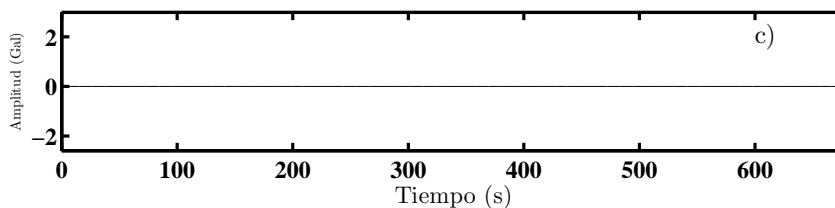
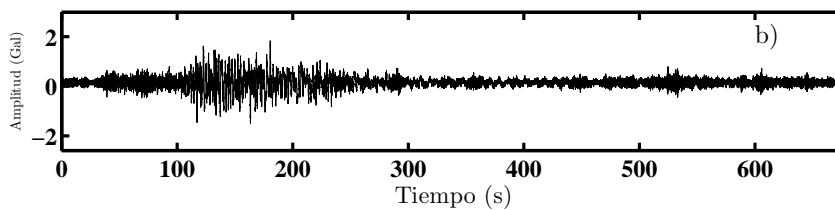
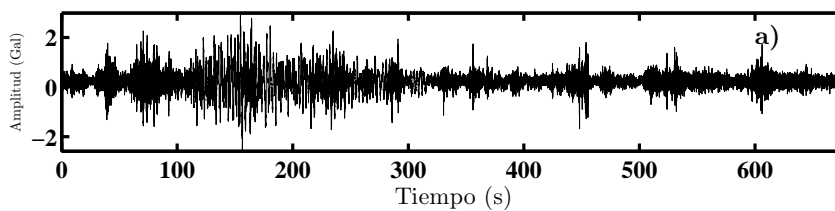


2) Componente vertical

Figura C.8: Acelerogramas del 6 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 5,2$. Fuente: Autor.



1) Componente N-S



2) Componente vertical

Figura C.9: Acelerogramas del 9 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 7,5$.
Fuente: Autor.

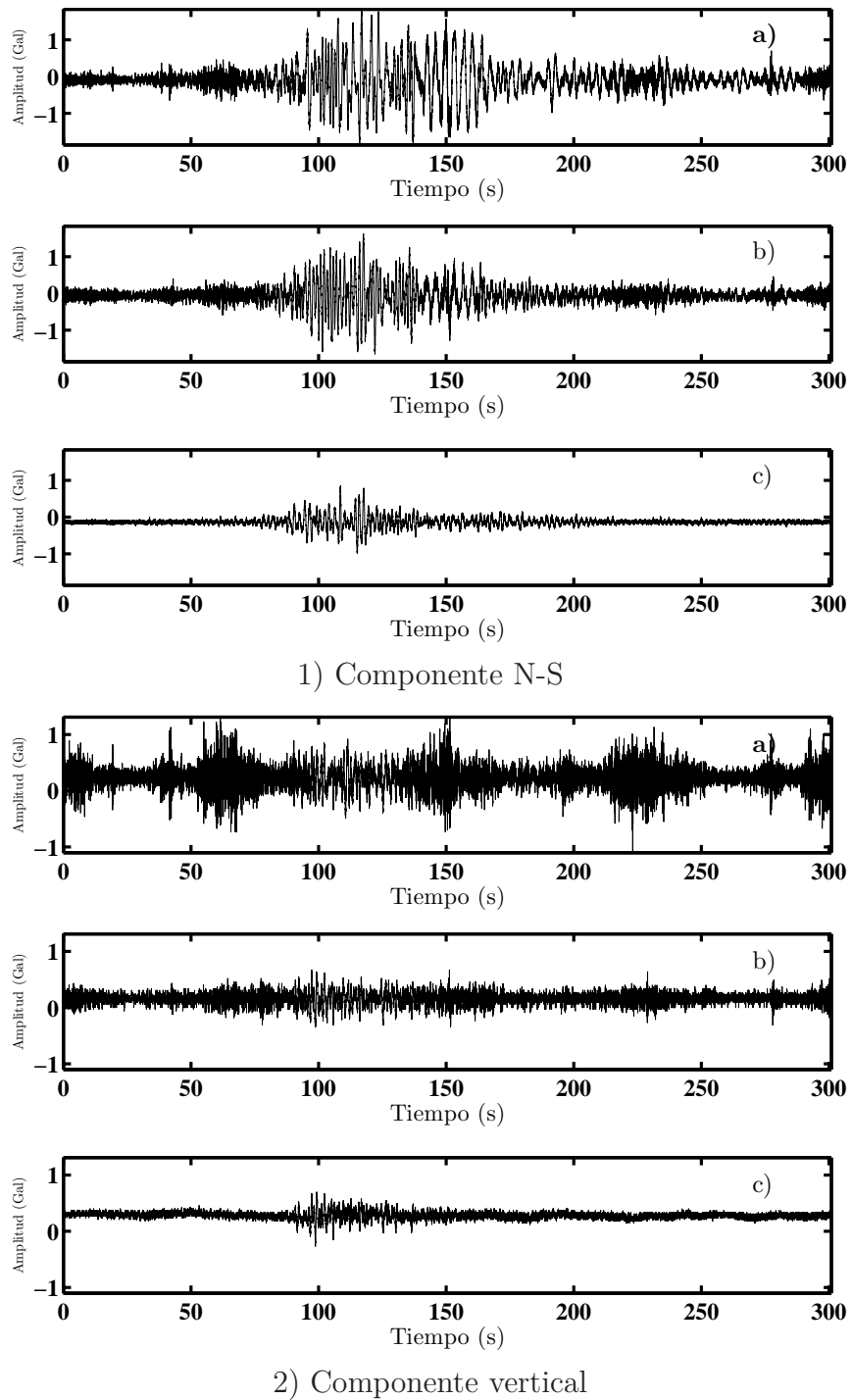
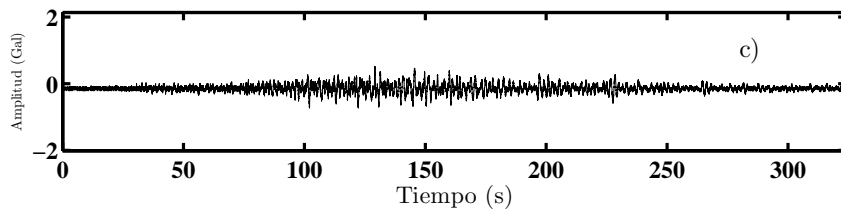
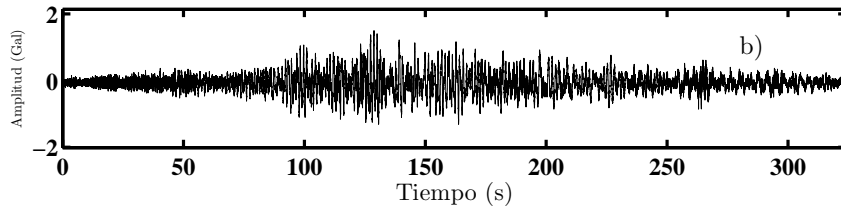
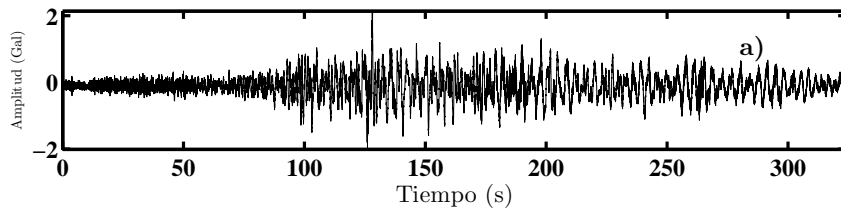
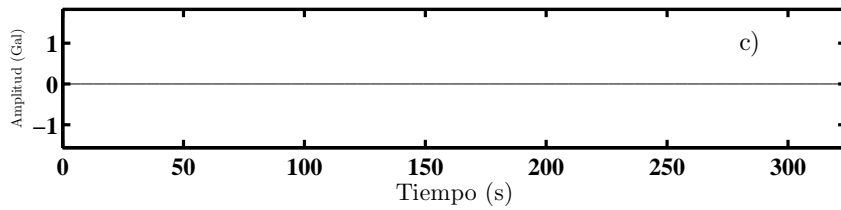
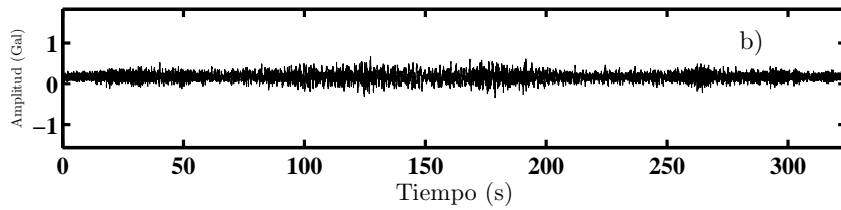
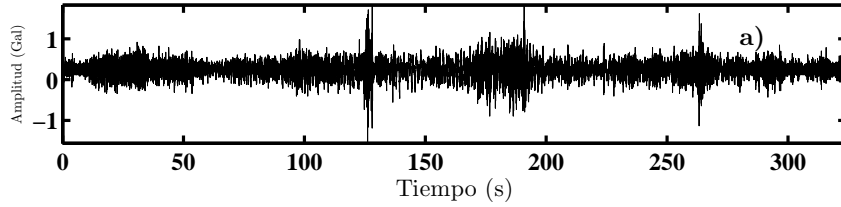


Figura C.10: Acelerogramas del 12 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 6,1$. Fuente: Autor.



1) Componente N-S



2) Componente vertical

Figura C.11: Acelerogramas del 21 de octubre de 1995, la magnitud del sismo es $M_c = 6,5$. Fuente: Autor.

Tablas pozo Unidad Kennedy

En esta sección se presentan las velocidades estimadas correspondientes a la estación Unidad Kennedy. Las ventanas utilizadas se filtraron utilizando un filtro pasa-bajas tipo Butterworth con una frecuencia de corte ω_c y de grado n , y un filtro tipo trapecio con los límites x_1 , x_2 , x_3 y x_4 . Los límites indican el inicio y el final de la ventana seleccionada del acelerograma. Fuente: Autor.

12 de febrero de 1992					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
1.00	21.48	3.00	10.00	0.045	0.141
9.00	29.48	3.00	10.00	0.045	0.147

Tabla D.1: Velocidades estimadas para el evento del 12 de febrero de 1992. Fuente: Autor.

15 de mayo de 1993							
Filtro tipo trapecio							
Límite 1	Límite 2	x_1	x_2	x_3	x_4	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
5.00	45.96	0.10	0.11	3.00	3.01	0.044	0.163
5.00	45.96	0.10	0.11	2.00	2.01	0.042	0.189
10.00	20.24	0.10	0.11	1.50	1.51	0.044	0.158
10.00	30.48	0.10	0.11	3.00	3.01	0.045	0.147
Filtro tipo Butterworth							
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	–	–	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
5.00	15.24	2.00	10.00	–	–	0.044	0.129
5.00	45.96	3.00	10.00	–	–	0.044	0.156
5.00	45.96	2.50	10.00	–	–	0.044	0.166

Tabla D.2: Velocidades estimadas para el evento del 15 de mayo de 1993. Fuente: Autor.

24 de octubre de 1993					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
20.00	60.96	3.00	10.00	0.044	0.143
20.00	101.92	3.00	10.00	0.044	0.139
20.00	101.92	2.00	10.00	0.044	0.156
40.00	50.24	2.00	10.00	0.044	0.131
40.00	80.96	3.00	10.00	0.044	0.154
40.00	80.96	2.00	10.00	0.043	0.154
70.00	110.96	2.00	10.00	0.044	0.166

Tabla D.3: Velocidades estimadas para el evento del 24 de octubre de 1993. Fuente: Autor.

23 de mayo de 1994					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
20.00	60.96	2.50	10.00	0.044	0.141
20.00	101.92	2.50	10.00	0.045	0.145
20.00	101.92	2.00	10.00	0.045	0.151
50.00	60.24	2.00	10.00	0.044	0.141
50.00	90.96	1.50	10.00	0.044	0.180
47.00	67.48	1.50	10.00	0.044	0.166
47.00	87.96	1.50	10.00	0.043	0.183
60.00	80.48	1.50	10.00	0.044	0.180

Tabla D.4: Velocidades estimadas para el evento del 23 de mayo de 1994. Fuente: Autor.

10 de diciembre de 1994					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
35.00	55.48	1.50	10.00	0.044	0.208
35.00	75.96	1.50	10.00	0.042	0.204
35.00	75.96	2.00	10.00	0.043	0.168
54.00	135.92	2.00	10.00	0.044	0.154
1.00	164.84	2.00	10.00	0.043	0.158
40.00	80.96	2.00	10.00	0.044	0.156
40.00	60.48	2.00	10.00	0.044	0.161
40.00	121.92	2.00	10.00	0.043	0.163
65.00	105.96	2.00	10.00	0.043	0.171
65.00	85.48	2.00	10.00	0.044	0.149
80.00	120.96	2.00	10.00	0.044	0.141
80.00	161.92	1.70	10.00	0.045	0.163

Tabla D.5: Velocidades estimadas para el evento del 10 de diciembre de 1994. Fuente: Autor.

19 de julio de 1995					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
70.00	110.96	1.50	10.00	0.043	0.171
70.00	151.92	2.00	10.00	0.045	0.161
70.00	151.92	1.50	10.00	0.044	0.174

Tabla D.6: Velocidades estimadas para el evento del 19 de julio de 1995. Fuente: Autor.

14 de septiembre de 1995					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
60.00	100.96	2.00	10.00	0.044	0.163
60.00	141.92	2.00	10.00	0.043	0.171
100.00	181.92	2.00	10.00	0.043	0.186
100.00	140.96	1.50	10.00	0.041	0.212
90.00	130.96	1.50	10.00	0.042	0.193
90.00	171.92	1.50	10.00	0.043	0.193

Tabla D.7: Velocidades estimadas para el evento del 14 de septiembre de 1995. Fuente: Autor.

6 de octubre de 1995					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
90.00	171.92	1.50	10.00	0.042	0.236
90.00	253.84	2.00	10.00	0.039	0.259
140.00	221.92	1.50	10.00	0.047	0.171

Tabla D.8: Velocidades estimadas para el evento del 6 de octubre de 1995. Fuente: Autor.

9 de octubre de 1995					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
100.00	120.48	2.00	10.00	0.043	0.141
100.00	140.96	2.00	10.00	0.042	0.177
100.00	181.92	2.00	10.00	0.043	0.156
50.00	90.96	2.00	10.00	0.043	0.174
150.00	190.96	2.00	10.00	0.047	0.129
180.00	507.68	1.50	10.00	0.045	0.177

Tabla D.9: Velocidades estimadas para el evento del 9 de octubre de 1995. Fuente: Autor.

12 de octubre de 1995					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
80.00	120.96	2.00	10.00	0.044	0.177
80.00	161.92	1.50	10.00	0.043	0.204
120.00	201.92	1.50	10.00	0.043	0.221
80.00	100.48	1.50	10.00	0.043	0.177
80.00	100.48	2.00	10.00	0.043	0.168

Tabla D.10: Velocidades estimadas para el evento del 12 de octubre de 1995. Fuente: Autor.

21 de octubre de 1995					
Límite 1	Límite 2	ω_c	n	vel. a 30 m (km/s)	vel. a 83 m (km/s)
80.00	120.96	2.00	10.00	0.044	0.154
80.00	161.92	2.00	10.00	0.044	0.149
80.00	243.84	2.00	10.00	0.044	0.166
120.00	160.96	2.00	10.00	0.045	0.156
150.00	231.92	2.00	10.00	0.045	0.154
40.00	80.96	2.00	10.00	0.044	0.158
30.00	111.92	2.00	10.00	0.044	0.158

Tabla D.11: Velocidades estimadas para el evento del 21 de octubre de 1995. Fuente: Autor.

Coeficientes de la serie de Fourier

PARA poder representar la función $f(t)$ mediante la ecuación (2.4) es necesario encontrar los coeficientes b_0 , a_n y b_n ; los dos últimos coeficientes definen las amplitudes del seno y del coseno, respectivamente. Para encontrar el valor del coeficiente b_0 , se multiplica la ecuación (2.6) por la diferencial dt , la ecuación resultante se integra de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$,

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt = b_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{cos}(n\omega_1 t) dt, \quad (\text{E.1})$$

resolviendo la integral

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) dt = -\frac{1}{n\omega_1} \text{cos}(n\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) dt = -\frac{1}{n\omega_1} \left[\text{cos}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right) - \text{cos}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right) \right],$$

puesto que $\text{cos}(-A) = \text{cos}(A)$, entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) dt = -\frac{1}{n\omega_1} \left[\text{cos}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right) - \text{cos}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right) \right],$$

simplificando términos se obtiene

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_1 t) dt = 0; \quad (\text{E.2})$$

resolviendo la tercera integral de la ecuación (E.1)

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{1}{n\omega_1} \operatorname{sen}(n\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{1}{n\omega_1} \left[\operatorname{sen}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-n\omega_1 \frac{L}{2}\right) \right],$$

puesto que $\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen}(A)$, entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{1}{n\omega_1} \left[\operatorname{sen}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right) \right],$$

quedando como resultado

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2}{n\omega_1} \operatorname{sen}\left(n\omega_1 \frac{L}{2}\right),$$

sustituyendo en la ecuación el valor de ω_1 dado por (2.5)

$$\frac{2L}{n2\pi} \operatorname{sen}\left(n \frac{2\pi L}{L} \frac{L}{2}\right),$$

simplificando términos se obtiene

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi),$$

puesto que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$, entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) dt = 0; \quad (\text{E.3})$$

con lo que la ecuación (E.1) se reduce a

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt = b_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dt,$$

resolviendo la integral

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt = b_0 \left[t \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt = b_0 \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right],$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt = b_0 L,$$

resolviendo la ecuación para b_0 se tiene

$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt; \quad (\text{E.4})$$

para encontrar el valor de la constante a_n se multiplica la ecuación (2.6) por $\text{sen}(m\omega_1 t)$ y por la diferencial dt , y se integra de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$, dando como resultado

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = b_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(m\omega_1 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt, \quad (\text{E.5})$$

resolviendo las tres integrales del lado derecho de la ecuación (E.5) se obtiene el valor de a_n , por lo tanto la primera integral resulta

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(m\omega_1 t) dt = -\frac{1}{m\omega_1} \cos(m\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

resolviendo para los límites dados

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = -\frac{1}{n\omega_1} \left[\cos\left(m\omega_1 \frac{L}{2}\right) - \cos\left(-m\omega_1 \frac{L}{2}\right) \right],$$

puesto que $\cos(-A) = \cos(A)$, entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = -\frac{1}{m\omega_1} \left[\cos\left(m\omega_1 \frac{L}{2}\right) - \cos\left(m\omega_1 \frac{L}{2}\right) \right],$$

por lo tanto, simplificando términos se obtiene

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = 0; \quad (\text{E.6})$$

para resolver las integrales restantes es necesario utilizar las siguientes identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u, \quad (\text{E.7})$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \operatorname{sen} v \cos u, \quad (\text{E.8})$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad (\text{E.9})$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad (\text{E.10})$$

multiplicando la ecuación (E.9) por -1 y sumando la ecuación (E.10)

$$-\cos(u + v) = -\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad (\text{E.11})$$

y

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad (\text{E.12})$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) - \cos(u + v)], \quad (\text{E.13})$$

sumando las ecuaciones (E.7) y (E.8) se tiene

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (u + v) + \operatorname{sen} (u - v)], \quad (\text{E.14})$$

sumando las ecuaciones (E.9) y (E.10) resulta

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} [\cos (u + v) + \cos (u - v)]. \quad (\text{E.15})$$

Entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos (n\omega_1 t) \operatorname{sen} (m\omega_1 t) dt = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (m\omega_1 t + n\omega_1 t) + \operatorname{sen} (m\omega_1 t - n\omega_1 t)] dt,$$

puesto que $\int A + B = \int A + \int B$, entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos (n\omega_1 t) \operatorname{sen} (m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen} ((m + n)\omega_1 t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen} ((m - n)\omega_1 t) dt,$$

resolviendo las integrales

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos (n\omega_1 t) \operatorname{sen} (m\omega_1 t) dt &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(m + n)\omega_1} \right) \cos ((m + n)\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \\ &\quad -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(m - n)\omega_1} \right) \cos ((m - n)\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}, \end{aligned}$$

sustituyendo (2.5) en la expresión anterior se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos (n\omega_1 t) \operatorname{sen} (m\omega_1 t) dt &= -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi(m + n)} \right) \left[\cos \left((m + n) \frac{2\pi}{L} \right) \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \\ &\quad -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi(m - n)} \right) \left[\cos \left((m - n) \frac{2\pi}{L} \right) \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}, \end{aligned}$$

resolviendo para los límites dados

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi(m+n)} \right) [\cos((m+n)\pi) - \cos(-(m+n)\pi)] - \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi(m-n)} \right) [\cos((m-n)\pi) - \cos(-(m-n)\pi)],$$

simplificando términos

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = 0, \quad (\text{E.16})$$

resolviendo la segunda integral del lado derecho de la ecuación (E.5)

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_1 t) \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} [\cos(n\omega_1 t - m\omega_1 t) - \cos(n\omega_1 t + m\omega_1 t)] dt,$$

para resolver esta integral se analizan dos casos, cuando $m = n$ y cuando $m \neq n$; para el caso $m \neq n$ se tiene

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_1 t) \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos((n-m)\omega_1 t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos((n+m)\omega_1 t) dt,$$

resolviendo las integrales

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_1 t) \operatorname{sen}(m\omega_1 t) dt = \left(\frac{1}{2(n-m)\omega_1} \right) \operatorname{sen}((n-m)\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \\ - \left(\frac{1}{2(n+m)\omega_1} \right) \operatorname{sen}((n+m)\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

sustituyendo (2.5) en la expresión anterior se tiene

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \left(\frac{L}{2(n-m)2\pi} \right) \text{sen} \left((n-m) \frac{2\pi}{L} t \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \left(\frac{L}{2(n+m)2\pi} \right) \text{sen} \left((n+m) \frac{2\pi}{L} t \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

resolviendo para los límites dados

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \left(\frac{L}{4\pi(n-m)} \right) [\text{sen}((n-m)\pi) - \text{sen}(-(n-m)\pi)] - \left(\frac{L}{4\pi(n+m)} \right) [\text{sen}((n+m)\pi) - \text{sen}(-(n+m)\pi)],$$

realizando las sumas correspondientes se tiene

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \left(\frac{L}{4\pi(n-m)} \right) (2 \text{sen}((n-m)\pi)) - \left(\frac{L}{4\pi(n+m)} \right) (2 \text{sen}((n+m)\pi)),$$

puesto que $\text{sen}(n\pi) = 0$ para todo valor entero de n , entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = 0; \quad (\text{E.17})$$

para el caso $m = n$ la segunda integral de la ecuación (E.5) se puede simplificar de la siguiente forma

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\cos(2m\omega_1 t) + 1) dt,$$

por lo tanto desarrollando la integral, ésta se puede resolver de la siguiente forma

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 2 dt - \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(2n\omega_1 t) dt,$$

resolviendo las integrales y sustituyendo el valor de ω_1 (ecuación (2.5))

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4n\pi} \right) \text{sen} \left(\frac{4n\pi t}{L} \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

realizando las operaciones correspondientes y evaluando el segundo sumando para los límites dados

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4n\pi} \right) (\text{sen}(2n\pi) - \text{sen}(-2n\pi)),$$

puesto que $\text{sen}(n\pi) = 0$ para todo valor entero de n

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \frac{L}{2}; \quad (\text{E.18})$$

por lo tanto, la ecuación

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt,$$

es una función ortogonal, puesto que

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \frac{L}{2}; & m = n \end{cases} \quad (\text{E.19})$$

entonces, la ecuación (E.5) se reduce a

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \text{sen}(m\omega_1 t) dt = a_n \frac{L}{2},$$

resolviendo para a_n y sustituyendo n por m se tiene

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_1 t) dt; \quad (\text{E.20})$$

para encontrar el valor de la constante b_n , se multiplica la ecuación (2.6) por $\cos(m\omega_1 t)$ y se integra de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$, dando como resultado

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(m\omega_1 t) dt &= b_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(m\omega_1 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt, \end{aligned}$$

la segunda integral del lado derecho fue resuelta cuando se dedujo el coeficiente a_n (ecuación (E.16)), por lo que sólo resta encontrar las integrales $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(m\omega_1 t) dt$ y $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt$.

Resolviendo

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{m\omega_1} \operatorname{sen}(m\omega_1 t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

resolviendo para los límites dados y sustituyendo el valor de ω_1

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{L}{2\pi m} (\operatorname{sen}(m\pi) + \operatorname{sen}(m\pi)),$$

puesto que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para todo valor entero de n , entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(m\omega_1 t) dt = 0; \quad (\text{E.21})$$

resolviendo

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\cos((n+m)\omega_1 t) + \cos((n-m)\omega_1 t)) dt;$$

de igual forma que en la solución de la integral $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t)$ se analizan dos casos, cuando $m = n$ y cuando $m \neq n$; por lo tanto, utilizando la identidad dada por la ecuación (E.15) y resolviendo la integral cuando $m \neq n$, posteriormente sustituimos el valor de ω_1 en el resultado, con lo que se obtiene

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{(n+m)2\pi} \right) \operatorname{sen} \left((n+m) \frac{2\pi}{L} t \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{(n-m)2\pi} \right) \operatorname{sen} \left((n-m) \frac{2\pi}{L} t \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

resolviendo para los límites dados

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{(n+m)2\pi} \right) (2 \operatorname{sen}((n+m)\pi)) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{(n-m)2\pi} \right) (2 \operatorname{sen}((n-m)\pi)),$$

como $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para todo valor entero de n , entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = 0;$$

cuando $n = m$ se tiene que $n - n = 0$, por lo tanto $\cos 0 = 1$ con lo que la integral se puede escribir

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\cos(2m\omega_1 t) + 1) dt,$$

resolviendo la integral

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{2} \left[t \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2m2\pi} \right) \operatorname{sen} \left(2m \frac{2\pi}{L} t \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}},$$

por lo tanto resolviendo para los límites dados

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4m\pi} \right) (2 \operatorname{sen}(2m\pi)),$$

puesto que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para todo valor entero de n , entonces

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{L}{2},$$

por lo tanto

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ \frac{L}{2}; & m = n \end{cases} \quad (\text{E.22})$$

es una función ortogonal, por lo que la ecuación (E.21) se reduce a

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = b_n \frac{L}{2},$$

resolviendo para b_n se tiene

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt. \quad (\text{E.23})$$

Por lo tanto la serie trigonométrica de Fourier queda de la forma siguiente

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_1 t) dt \right] \operatorname{sen}(n\omega_1 t) + \\ &+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \right] \cos(\omega_1 t). \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Por medio de la ecuación (2.10) es posible representar cualquier función periódica como la suma de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias. La componente sinusoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_1$ se denomina la n -ésima armónica de la función

periódica.

La siguiente rutina sirve para obtener la serie de Fourier de una función periódica $f(t)$ en un intervalo de $-L/2$ a $L/2$.

```

lim11 = -L/2;
lim21 = 0;
lim22 = L/2;

for n = 1:niter
for k = 1:npt
    t1(k) = lim11+(k-1)*dt;
    ft1(k)=f(t)%la función f(t) en el intervalo lim11 a lim21,
    % en este caso está dada por la ecuación que define el pulso
    % de Ricker negativo.
    fan1(n,k) = ft1(k)*sin(2*n*pi*t1(k)/l);
    fb01(n,k) = ft1(k);
    fbn1(n,k) = ft1(k)*cos(2*n*pi*t1(k)/l);

    t2(k) = lim21+(k-1)*dt;
    ft2(k) = g(t); %la función en el intervalo lim21 a lim22,
    % en este caso está dada por la ecuación que define el pulso
    % de Ricker.
    fan2(n,k) = ft2(k)*sin(2*n*pi*t2(k)/l);
    fb02(n,k) = ft2(k);
    fbn2(n,k) = ft2(k)*cos(2*n*pi*t2(k)/l);

    fb0t(n,k) = fb01(n,k)+fb02(n,k);
    fant(n,k) = fan1(n,k)+fan2(n,k);
    fbnt(n,k) = fbn1(n,k)+fbn2(n,k);
    if k == 1
        intfان(n,k) = fant(n,k)*dt;
        intfب0(n,k) = fb0t(n,k)*dt;
        intfبn(n,k) = fbnt(n,k)*dt;
    else
        intfان(n,k) = intfان(n,k-1)+(fant(n,k)*dt);
        intfب0(n,k) = intfب0(n,k-1)+(fb0t(n,k)*dt);
        intfبn(n,k) = intfبn(n,k-1)+(fbnt(n,k)*dt);
    end;
end;

```

```
end;
end;

for n = 1:niter
    an(n,1) = (2/l)*(intfan(n,end));
    b0(n,1) = (1/l)*(intfb0(n,end));
    bn(n,1) = (2/l)*(intfbn(n,end));
    for m = 1:nptplot
        t(m) = limplot+(m-1)*dt;
        s(m,n) = sin(2*n*pi*t(m)/l);
        c(m,n) = cos(2*n*pi*t(m)/l);
    end;
end;

for n = 1:niter
    for k = 1:nptplot
        st1(1,k)=b0(1,1);
        st2(n,k)=an(n,1)*s(k,n);
        st3(n,k)=bn(n,1)*c(k,n);
    end;
end;
% la suma de st1+st2+st3 da como resultado los armónicos de la señal f(t)
for n = 1:niter
    for k = 1:nptplot
        if n == 1
            ftan(n,k) = st2(n,k);
            ftbn(n,k) = st3(n,k);
        else
            ftan(n,k) = ftan(n-1,k)+st2(n,k);
            ftbn(n,k) = ftbn(n-1,k)+st3(n,k);
        end;
    end;
end;
end;
% los coeficientes de la serie de Fourier son:
for k = 1:nptplot
    ba(1,k)=st1(1,k);
    a(1,k)=ftan(end,k);
    b(1,k)=ftbn(end,k);
end;
% la suma de estos vectores da como resultado la serie de Fourier de la
```

% función periódica $f(t)$.

Función delta de Dirac

CON frecuencia, sobre los sistemas mecánicos actúan fuerzas externas de gran magnitud solo durante un lapso de tiempo muy breve. Una función que podría servir como modelo matemático de esa fuerza se denomina función delta de Dirac. Señales continuas pueden ser descompuestas en funciones escala y cambiarlas en funciones delta, tal como ocurre con las funciones discretas.

Sea una función definida por tramos

$$B(t) = \begin{cases} 0 & t < -a \\ \frac{1}{2a} & -a \leq t \leq a \\ 0 & a < t \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

tal como se muestra en la Figura F.1. La función delta de Dirac (ecuación(F.1)) es un pulso de magnitud infinita, aunque en el sentido estándar ésta no es una función, sino que es un objeto llamado una *distribución*; integrando $B(t)$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t)dt = \int_{-\infty}^{-a} (0)dt + \int_{-a}^a \frac{1}{2a}dt + \int_a^{\infty} (0)dt,$$

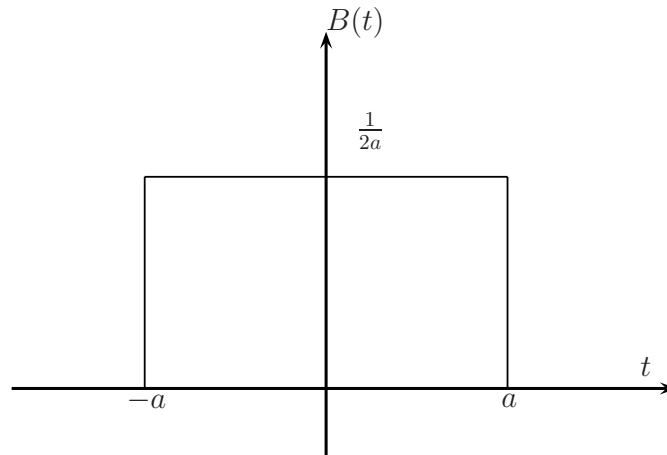


Figura F.1: Función de un sólo impulso rectangular. Fuente: Autor.

resolviendo las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t)dt = \frac{1}{2a} \left[t \right]_{-a}^a,$$

y se tiene como resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t)dt = \frac{1}{2a} (a + a) = 1. \quad (\text{F.2})$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x)dx = 1, \quad (\text{F.3})$$

la cual se le conoce como función delta de Dirac o de impulso unitario. La función delta de Dirac se comporta como la identidad bajo la convolución.

§F.1 Propiedades de la función delta de Dirac

Desplazando el centro de la función caja (ecuación (F.1)) a la coordenada t_0 (Figura (F.2)), entonces $B(t - t_0)$ y multiplicando la función caja por una función $f(t)$ e

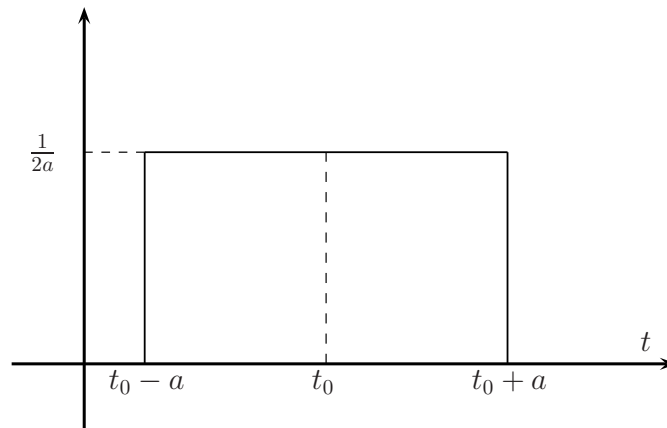


Figura F.2: Desplazamiento en tiempo de la función impulso rectangular. Fuente: Autor.

integrando el resultado en el intervalo $(-\infty, \infty)$ resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t - t_0) f(t) dt, \tag{F.4}$$

desarrollando la integral se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t - t_0) f(t) dt = \int_{-\infty}^{t_0 - a} (0) f(t) dt + \int_{t_0 - a}^{t_0 + a} \left(\frac{1}{2a}\right) f(t) dt + \int_{t_0 + a}^{\infty} (0) f(t) dt,$$

resolviendo las integrales y simplificando términos

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t - t_0) f(t) dt = \frac{1}{2a} \int_{t_0 - a}^{t_0 + a} f(t) dt;$$

si a es una cantidad pequeña (Figura (F.3)), entonces el área se puede calcular de la siguiente manera

$$\frac{1}{2a} \int_{t_0 - a}^{t_0 + a} f(t) dt = \frac{1}{2a} f(t_0) \left[t \right]_{t_0 - a}^{t_0 + a} = \frac{1}{2a} f(t_0) (t_0 + a - t_0 + a),$$

obteniendo

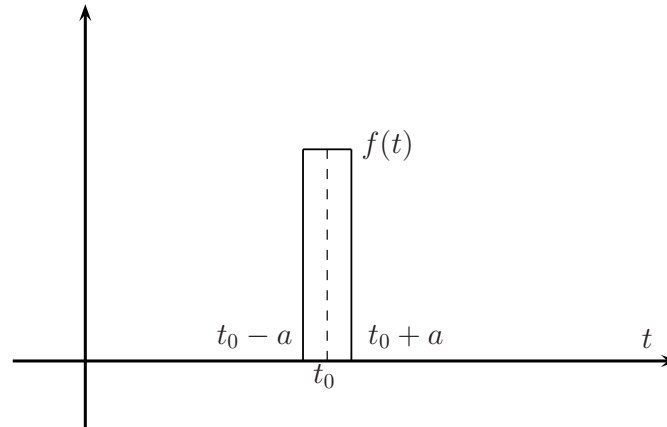


Figura F.3: La nueva función $f(t)$. Fuente: Autor.

$$\frac{1}{2a} \int_{t_0-a}^{t_0+a} f(t) dt = f(t_0);$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t - t_0) f(t) dt = f(t_0), \tag{F.5}$$

para calcular la integral se asumió que a es infinitamente pequeña; como consecuencia la función (F.4) presenta el siguiente patrón

$$B(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}; \tag{F.6}$$

por lo que, $B(t - t_0)$ se puede llamar $\delta(t - t_0)$, con lo que se comprueba la propiedad de desplazamiento de la función delta de Dirac

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}. \tag{F.7}$$

Método de Thomson-Haskell

EN 1953, aparece publicado en el Boletín de la Sociedad Sismológica Americana el artículo: “Dispersión de Ondas Superficiales en Medios Multiestratificados”, donde Norman Abraham Haskell extiende la formulación de William T. Thomson para el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión en estratos, aplicándolo al caso de la dispersión de ondas superficiales. Dicha formalización, conocida hoy como el Método de Thomson-Haskell ha tenido gran impacto en el desarrollo de la sismología teórica, viendo su mayor aportación con el desarrollo computacional de los años 60, así como en los estudios corticales y en el campo de las explosiones en la atmósfera. Algunos años después de su formalización, seguidores y alumnos de Haskell, como David G. Harkrider (1964), se convertirían en sus principales divulgadores y apuntarían las limitaciones del mismo en sus etapas iniciales. Por ejemplo, Thomson había planteado la continuidad de las deformaciones constantes, en lugar de la de los esfuerzos cortantes, para posteriormente intentar modelar un estrato fluido intermedio reduciendo a cero el módulo de cortante de un estrato sólido. Así, aunque Haskell mismo no resolvió este problema en su totalidad, para el caso de arreglos de estratos planos y sólidos, su método ha sido una importante aportación teórica, que junto con sus contribuciones hechas en el campo de la exploración y detección con aplicaciones militares y en sus

estudios corticales y mecanismos focales, constituyen su principal herencia a las ciencias de la Tierra.

Aki y Richards en su texto “Quantitative Seismology” (1980) dedican el capítulo 7 al estudio de la propagación de ondas en medios verticalmente heterogéneos y abordan conceptos como el vector desplazamiento-esfuerzo y el de matriz propagadora, bases del método de Haskell. El análisis lo presentan para la incidencia de ondas P , SV y SH .

§G.1 Caso SH

Utilizando el sistema de referencia que se muestra en la Figura (G.1), y si se aplica un esfuerzo paralelo a la dirección del eje y sobre el diferencial de volumen de un medio continuo mostrado en la figura, entonces la ecuación de equilibrio dinámico que rige al medio mostrado es la Ecuación de Navier

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}, \quad (\text{G.1})$$

donde f_y son las fuerzas de cuerpo y ρ la densidad.

Suponiendo una solución de la forma:

$$\nu = l_1(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t}, \quad (\text{G.2})$$

$$\sigma_{zy} = l_2(z, k, \omega) e^{-ikx} e^{i\omega t}, \quad (\text{G.3})$$

donde ν es el desplazamiento de la partícula en dirección y , k es el número de onda vertical definido como $k = \omega/\beta$ y, ω es la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$; l_1 representa al desplazamiento como función de la profundidad, el número de onda vertical y la frecuencia angular, mientras que l_2 representa al esfuerzo σ_{zy} en los mismos términos.

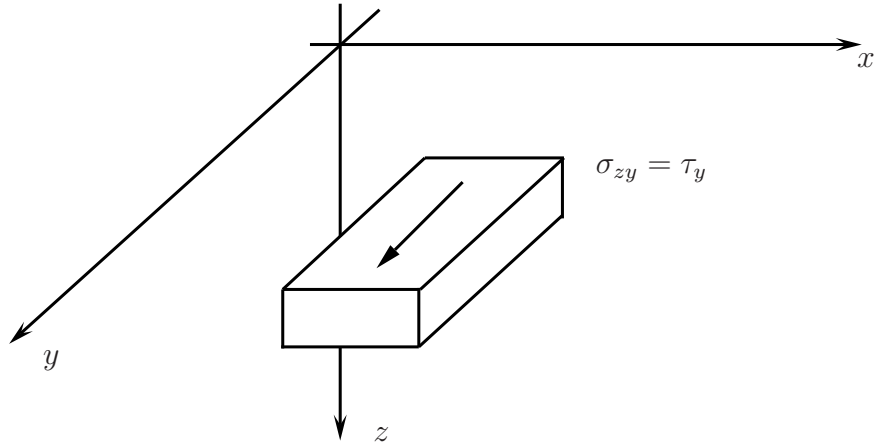


Figura G.1: Diferencial de volumen ubicado en el espacio según el sistema de referencia empleado en la formulación del método matricial de Thomson-Haskell, la unidad de volumen está sometida a un esfuerzo en la dirección paralela a eje y . Fuente: Autor.

Puesto que $\sigma_{zy} = \mu \partial \nu / \partial z$ y $\sigma_{xy} = \mu \partial \nu / \partial x$, donde μ es el módulo de cortante o rigidez, en términos de desplazamientos y frecuencias, entonces la ecuación (G.1) puede expresarse de la siguiente forma

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right) + f_y + \rho \omega^2 \nu = 0. \quad (G.4)$$

Sustituyendo (G.2) y (G.3) en (G.4) y despreciando a las fuerzas de cuerpo se obtiene:

$$-\mu k^2 l_1 + \frac{dl_2}{dz} + \rho \omega^2 l_1 = 0; \quad (G.5)$$

por otro lado, se tiene que:

$$l_2 \mu \frac{dl_1}{dz}. \quad (G.6)$$

De (G.5) y (G.6) y expresando en forma matricial se tiene

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \mu k^2 - \rho\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}, \quad (\text{G.7})$$

donde $\{l_1, l_2\}^T$ es el vector *desplazamiento-esfuerzo*. La ecuación anterior también puede ser expresada como

$$\frac{d\bar{\mathbf{F}}}{dz} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{F}}, \quad (\text{G.8})$$

cuya solución es

$$\bar{\mathbf{F}} = e^{\mathbf{A}z}. \quad (\text{G.9})$$

Por otro lado, existe una matriz $\mathbf{P}(z, z_0)$ que es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{P}, \quad (\text{G.10})$$

a \mathbf{P} se le conoce como *Matriz Propagadora* y se define formalmente

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{I} + \int_{z_0}^z \mathbf{A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_{z_0}^z \mathbf{A}(\xi_1) \int_{z_0}^{\xi_1} \mathbf{A}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \dots; \quad (\text{G.11})$$

cuyas propiedades son:

$$\mathbf{P}(z_0, z_0) = \mathbf{I}, \quad (\text{G.12})$$

$$\bar{\mathbf{F}}(z) = \mathbf{P}(z, z_0) \bar{\mathbf{F}}(z_0), \quad (\text{G.13})$$

aunque, \mathbf{P} puede escribirse como

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{I} + (z - z_0) \mathbf{A} + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 \mathbf{A}\mathbf{A} + \dots = e^{(z-z_0)\mathbf{A}}. \quad (\text{G.14})$$

La solución a la ecuación (G.10) puede escribirse entonces, de acuerdo con (G.14),

como:

$$\mathbf{P}(z, z_0) = e^{z-z_0} \mathbf{A}. \quad (\text{G.15})$$

Sustituyendo (G.12) en (G.7) se tiene que

$$\begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_z = \mathbf{P}(z, z_0) \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z_0}, \quad (\text{G.16})$$

por otra parte, de (G.7) se tiene que para este caso la matriz \mathbf{A} es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \mu k^2 - \rho\omega^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{G.17})$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 - k^2 + \frac{\rho\omega}{\mu} = 0, \quad (\text{G.18})$$

y las soluciones de esta son

$$\lambda_{1,2} = \pm i\eta, \quad (\text{G.19})$$

donde $\eta^2 = \left(-k^2 + \frac{\rho\omega^2}{\mu}\right)$. Por todo lo anterior, la solución a la ecuación (G.8) puede escribirse también como

$$f_j = \nu_j e^{\lambda_j (z - z_0)}, \quad (\text{G.20})$$

donde λ_j es el j -ésimo valor característico de \mathbf{A} y ν_j su correspondiente vector característico. Para la matriz (G.17), los vectores característicos serán de la siguiente forma

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\mu\eta \end{pmatrix}, \quad (\text{G.21})$$

$$\nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\mu\eta \end{pmatrix}, \quad (\text{G.22})$$

y de acuerdo con (G.20) puede escribirse

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\mu\eta \end{pmatrix} e^{i\eta(z-z_0)}, \quad (\text{G.23})$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\mu\eta \end{pmatrix} e^{-i\eta(z-z_0)}, \quad (\text{G.24})$$

donde f_1 y f_2 son vectores desplazamiento-esfuerzo para ondas SH ascendentes y descendentes respectivamente, que también pueden expresarse como

$$\bar{f} = \mathbf{F}\bar{w}, \quad (\text{G.25})$$

donde $\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}$; \mathbf{E} es la matriz de vectores característicos de \mathbf{A} , $\mathbf{\Lambda}$ la matriz de factores verticales de propagación y \bar{w} es vector de pesos para las amplitudes SH . La ecuación (G.25) puede escribirse como

$$\bar{f} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\bar{w}, \quad (\text{G.26})$$

o también

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\mu\eta & -i\mu\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\eta(z-z_0)} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta(z-z_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{G.27})$$

Calculando la matriz \mathbf{F}^{-1} se obtienen las amplitudes de los campos incidentes y reflejado, es decir

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2\mu\eta} \begin{bmatrix} \mu\eta e^{-i\eta(z-z_0)} & -ie^{+i\eta(z-z_0)} & \mu\eta e^{+i\eta(z-z_0)} \end{bmatrix}, \quad (\text{G.28})$$

de donde

$$\begin{Bmatrix} s_i \\ s_r \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}, \quad (\text{G.29})$$

donde s_i es la amplitud de la onda SH incidente y s_r la de la reflejada.

Por otra parte, para una matriz cuadrada \mathbf{A} con diferentes valores característicos λ_k , donde $k = 1, 2, 3 \dots, n$, una función de dicha matriz puede ser expresada, según la *formula de Sylvester* (Aki y Richards, 1980) como

$$F(A) = \sum_{k=1}^n F(\lambda_k) \frac{\prod_{r \neq k} (A - \lambda_r I)}{\prod_{r \neq k} (\lambda_k - \lambda_r)}, \quad (\text{G.30})$$

sustituyendo (G.15) en (G.30), para $\lambda_{1,2} = \pm i\eta$, $\mathbf{P}(z, z_0)$ queda

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \begin{bmatrix} \cos \eta_n (z - z_0) & \frac{1}{\mu_n \eta_n} \sin \eta - n (z - z_0) \\ -\mu_n \eta_n \sin \eta_n (z - z_0) & \cos \eta_n (z - z_0) \end{bmatrix}, \quad (\text{G.31})$$

donde $\eta_n = (-k^2 \omega^2 / \beta_n^2)^{1/2}$; $k = \omega / \beta_{HS} \sin \theta$, siendo β_{HS} la velocidad de ondas S en el espacio, β_n la velocidad de ondas Sen el n ésimo estrato y η_n el número de onda vertical en el n ésimo estrato.

Sustituyendo (G.16) en (G.29) y de acuerdo con (G.31), se tiene, para la base de la estratigrafía

$$\begin{Bmatrix} s_i \\ s_r \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}(z_n, z_{n-1}) \mathbf{P}(z_{n-1}, z_{n-2}) \cdots \mathbf{P}(z_1, z_0) \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=0}, \quad (\text{G.32})$$

o también se puede escribir como

$$\begin{Bmatrix} s_i \\ s_r \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix}_{z=0}, \quad (\text{G.33})$$

donde

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}(z_n, z_{n-1}) \mathbf{P}(z_{n-1}, z_{n-2}) \cdots \mathbf{P}(z_1, z_0). \quad (\text{G.34})$$

Así por ejemplo, en $z = 0$, como $l_2 = 0$

$$l_1|_z = 0 = s_i/R_{11}, \quad (\text{G.35})$$

lo que permite evaluar el desplazamiento en la superficie libre del medio estratificado si se conoce el campo incidente, las propiedades mecánicas del semiespacio y las matrices propagadoras de cada estrato.

Programa desarrollado

En este capítulo se presenta una descripción del programa desarrollado durante la investigación aquí presentada; así como también, un manual de usuario para su utilización. El programa fue desarrollado en el ambiente MATLAB® y utiliza archivos de extensión .mat y archivos procedentes de una estación acelerografica, escritos en ficheros ASCII, para la lectura de datos de entrada, los ficheros son por instrumento y contienen las tres componentes. Este programa permite estimar velocidades de propagación a partir de la deconvolución de acelerogramas registrados en pozos. Además, es posible filtrar los acelerogramas utilizando un filtro pasa-bajas tipo Butterworth o un filtro tipo trapecio; derivar o integrar los registros; así como, diezmar los datos para procesar registros muy largos o interpolar los datos de los registros para incrementar el muestreo de la señal. El programa proporciona un fichero, llamado **vel.dat** que contiene los tiempos de la ventana seleccionada, las características del filtro utilizado y finalmente las velocidades estimadas en km/s.

Los datos de entrada son una de las tres componentes de los acelerogramas registrados a tres profundidades diferentes. Los datos de entrada en un archivo con extensión .mat deberá de ser una matriz de datos llamada reg.mat. La matriz debe de contener tres variables llamadas **sup**, **int** y **fon**; estas variables serán matrices de $n_t \times 3$, donde n_t

es el número de puntos totales del registro; la primera columna de cada variable debe de contener las aceleraciones de la componente N-S, la segunda columna las aceleraciones de la componente E-O y finalmente la tercera columna contendrá las aceleraciones de la componente vertical. La variable **sup** debe de contener las aceleraciones de la superficie, mientras que, la variable **fon** deberá de contener las aceleraciones de las tres componentes registradas en el fondo del pozo; por lo tanto, la variable **int** deberá de contener los datos registrados en algún punto entre la superficie y el fondo del pozo.

Los registros con formato ASCII deben de contener la información siguiente: un encabezado con los datos del equipo y de la estación a la que pertenece. Columnas de los datos correspondientes al acelerograma, y que se presentan en el siguiente orden: la columna uno contendrá las aceleraciones de la componente N-S, la columna dos los datos de la componente E-O y la tercera columna contendrá las aceleraciones registradas en la componente vertical. En la Figura H.1 se muestra una captura de pantalla del programa con las opciones enumeradas, las cuales se explicaran más adelante. En adelante se indicará una opción por su número en la Figura H.1.

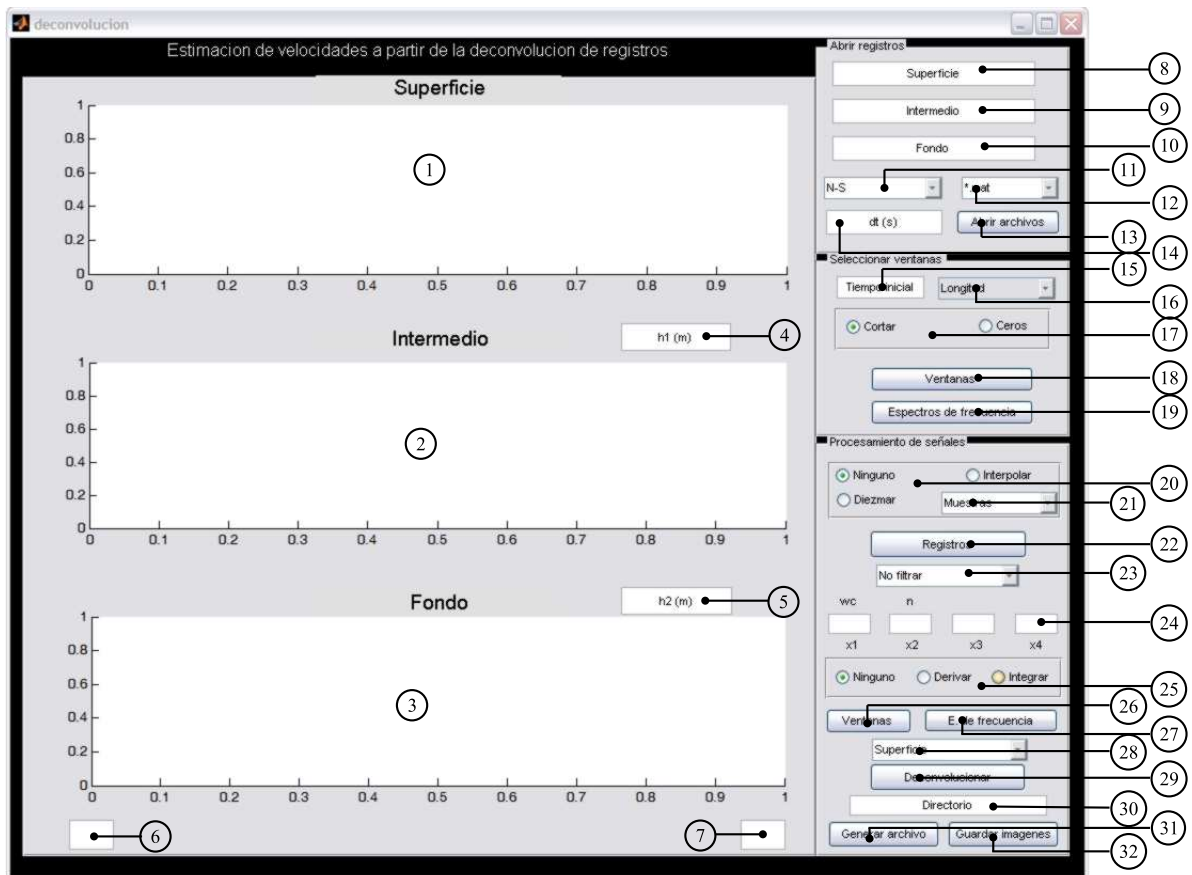


Figura H.1: Pantalla del programa desarrollado.

§H.1 Como abrir un archivo.

Para abrir los acelerogramas, primero se selecciona, en 12, el tipo de archivo que se va a utilizar. Si los datos de aceleración se encuentran en un archivo con extensión .mat se utiliza esta opción, la cual utilizará una matriz de en formato de MATLAB®, si se encuentran en archivos de texto con formato ASCII se elige la opción ASCII. Para la primera opción, se escribe, en la casilla 8, la dirección donde reside la matriz reg.mat, por ejemplo:

C:\Unidad Kenedy\14 de septiembre, 1995\reg.mat

y se selecciona en 11 la componente a utilizar, en la casilla denotada con el número 14 se escribe el intervalo de muestreo (dt) de los registros, en segundos; finalmente se da click en el botón denotado con el número 13 en la Figura H.1. Los acelerogramas se mostraran en los cuadros indicados con los números 1, 2 y 3 de la misma figura.

En el caso de utilizar acelerogramas contenidos en archivos en formato ASCII se escriben en los cuadros 9, 8 y 10 las direcciones donde residen los archivos, indicando además el nombre del archivo, por ejemplo:

C:\Unidad Kenedy\14 de septiembre, 1995\UNK19510.211

siguiendo las indicaciones en los cuadros mencionados, es decir, el archivo que contiene las aceleraciones registradas en la superficie se coloca en el cuadro llamado superficie, etc. Finalmente se debe dar un click en el botón marcado con el número 8, para visualizar los acelerogramas, como se muestra en la Figura H.2.

En los cuadros indicados con los números 6 y 7 se puede escribir el límite de los ejes en las gráficas, siendo 6 el límite inferior y 7 el límite superior. Para que se realice el cambio se deberá de ejecutar la acción nuevamente. Si no se escribe ningún valor, el ploteo se realizará con los límites exactos de las gráficas.

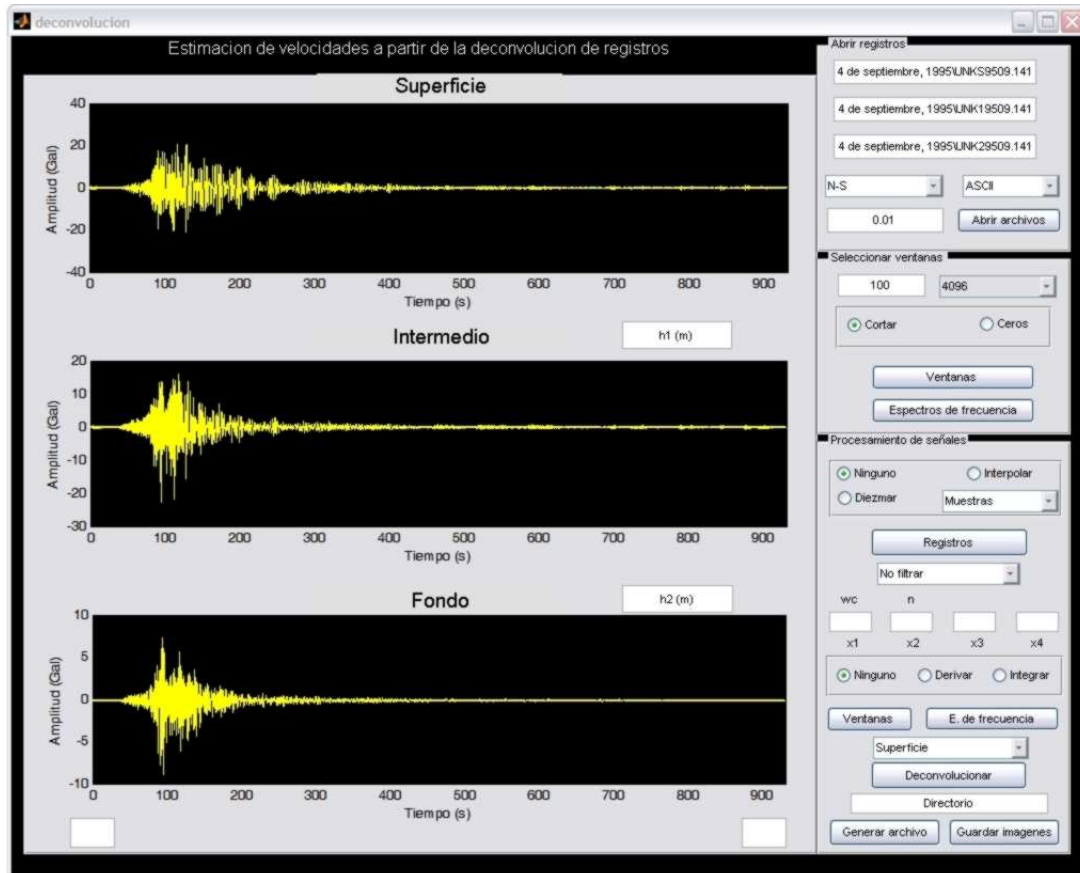


Figura H.2: Apertura de acelerogramas.

§H.2 Selección de ventanas

Para la estimación de velocidades o el procesamiento de datos en el dominio de la frecuencia, es necesario trabajar con ventanas o tramos de la señal que contengan números múltiplos de 2^n muestras. Por lo tanto, para delimitar la ventana en tiempo, se escribe el tiempo donde iniciará la ventana, en segundos, en la casilla 15 y en la lista de opciones, indicada por el número 16, se selecciona el número de muestras que debe de contener la ventana. Por ejemplo, si el acelerograma es un registro de 200

segundos de duración, con un intervalo de muestreo $dt=0.01$, la ventana puede iniciar en 50 segundos y tener un número de muestras igual a 4096; con lo cual se obtiene una ventana de 50-90.95 segundos.

El menú indicado por 17 proporciona la opción de cortar las ventanas del resto del acelerograma o de multiplicar, en tiempo, el acelerograma por una señal de amplitud unitaria en el intervalo seleccionado, la amplitud en el resto del registro será de cero. En el último caso, la señal resultante tendrá un número de muestras que cumplan con la condición 2^n , esto para trabajar en el dominio de la frecuencia. Para lograr que la señal cumpla con un número múltiplo de 2^n muestras, el programa calcula el valor de n utilizando la longitud del acelerograma, a la cual se le calcula su logaritmo de base 2; el valor obtenido del logaritmo de base dos se redondea al valor entero más alto. Para observar los registros resultantes se presiona el botón marcado con el número 18 en la Figura H.1. El resultado obtenido seleccionando una ventana con la opción ceros en el menú denotado por 17, se observa en la Figura H.3.

Para observar el **espectro de amplitudes** de los registros resultantes se presiona el botón marcado con el número 19 en la Figura H.1. El espectro de amplitudes se calcula con el valor absoluto de la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) de la señal resultante, seleccionada en el paso anterior.

En este caso el espectro de amplitudes de la señal resultante tendrá una frecuencia máxima de 50 Hz; sin embargo, el interés se encuentra centrado en la baja frecuencia por lo que es posible observar únicamente un intervalo de 0-10 Hz, escribiendo este intervalo en los cuadros 6 y 7, se obtiene la Figura H.4.

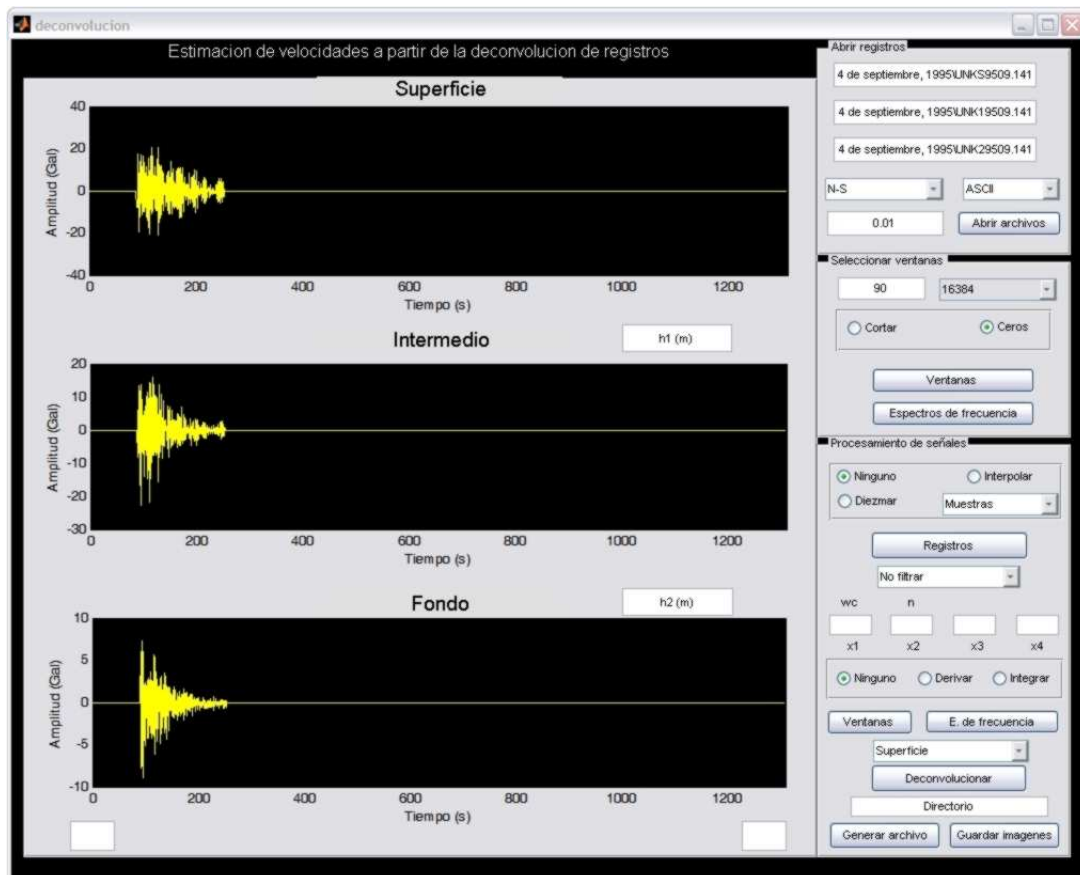


Figura H.3: Selección de ventanas.

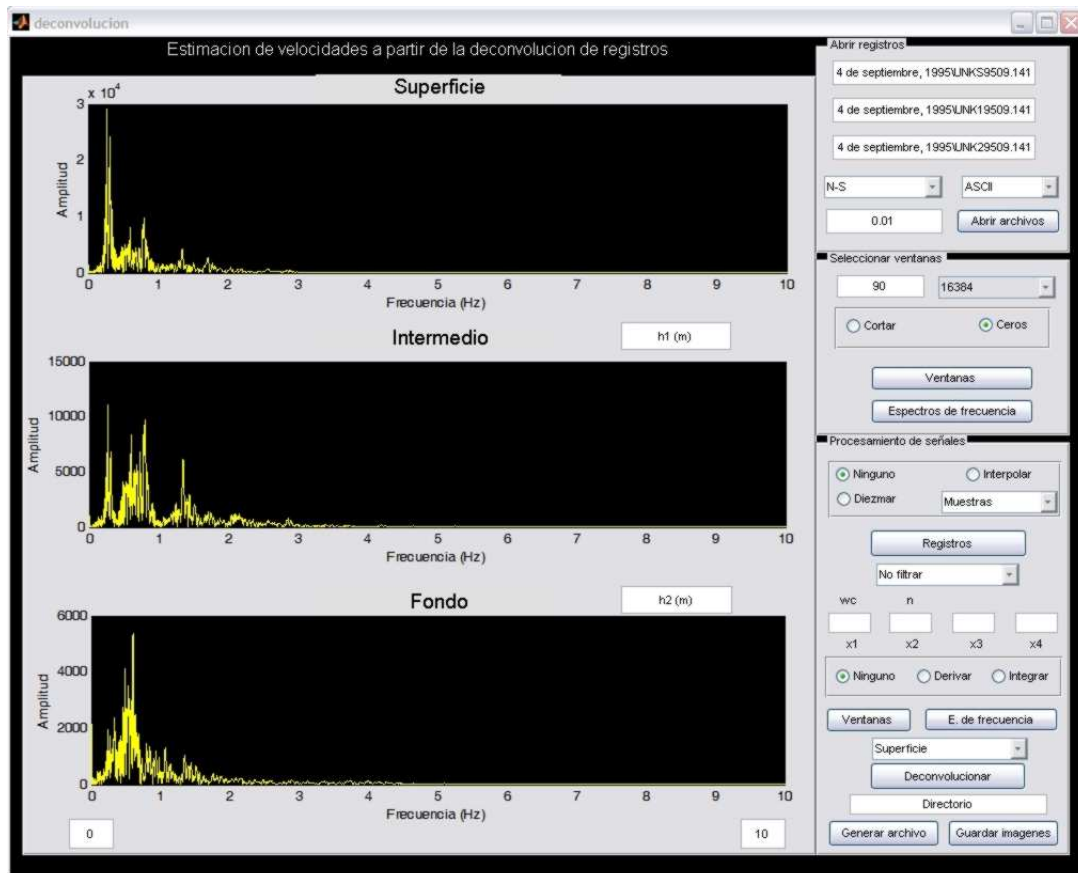


Figura H.4: Espectro de amplitudes.

§H.3 Procesamiento de señales

Se puede utilizar el menú de botones indicado por 20 en la Figura H.1, con la finalidad de modificar los registros. Este menú tiene la opción de **diezmar** los registros, es decir incrementar el Δt , con lo cual se utiliza un muestreo más largo. La lista de opciones denotada con el número 21, indica el número que se quiere multiplicar el Δt inicial. Por ejemplo, si se tiene una señal de 24 puntos y el Δt es de 0.01, cada muestra representa un valor registrado en un intervalo de 0.01 segundos; si se desea diezmar el registro se puede

incrementar el dt a 0.02 segundos, con lo cual la señal se registrará cada dos muestras; entonces, deberá elegirse el número 2 en la lista. La señal resultante tendrá la misma duración en tiempo pero un número menor de muestras. Esta opción es útil cuando se trabajan con registros muy largos, con la finalidad de agilizar el procesamiento. El diezmado de registros funciona de la siguiente forma: si se elige diezmar una señal con $dt=0.01$ segundos a $dt=0.02$ segundos se elige 2 en la lista mencionada; por lo tanto, las muestras serán retomadas cada dos unidades como se muestra debajo. Las casillas coloreadas muestran los valores que serán parte de la nueva señal.

dt	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
No de Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8
Datos	0	0	0	0	0	1	1	1

Por otra parte, si se desea utilizar la opción **interpolar**, esta opción disminuye el dt inicial y calcula los valores entre el dt y el punto a interpolar. La lista de opciones denotada con el número 21, indica el número que se quiere dividir el dt inicial. La interpolación es lineal en una dimensión, y se realiza con el comando **interp1** de MATLAB®.

En ambos casos, el registro sísmico debe de ser cargado nuevamente por el programa. Debe tomarse en cuenta, que tanto el número de muestras, como el dt han sido modificados, por lo que las ventanas seleccionadas deben ser elegidas nuevamente considerando el dt nuevo. Para mostrar los registros modificados se debe de presionar el botón marcado con el número 22 en la Figura H.1.

En el ejemplo que se ha estado utilizando se eligió diezmar el registro incrementando el dt en 2; por lo tanto el dt nuevo será de 0.02 segundos, los registros resultantes se muestran en la Figura H.5.

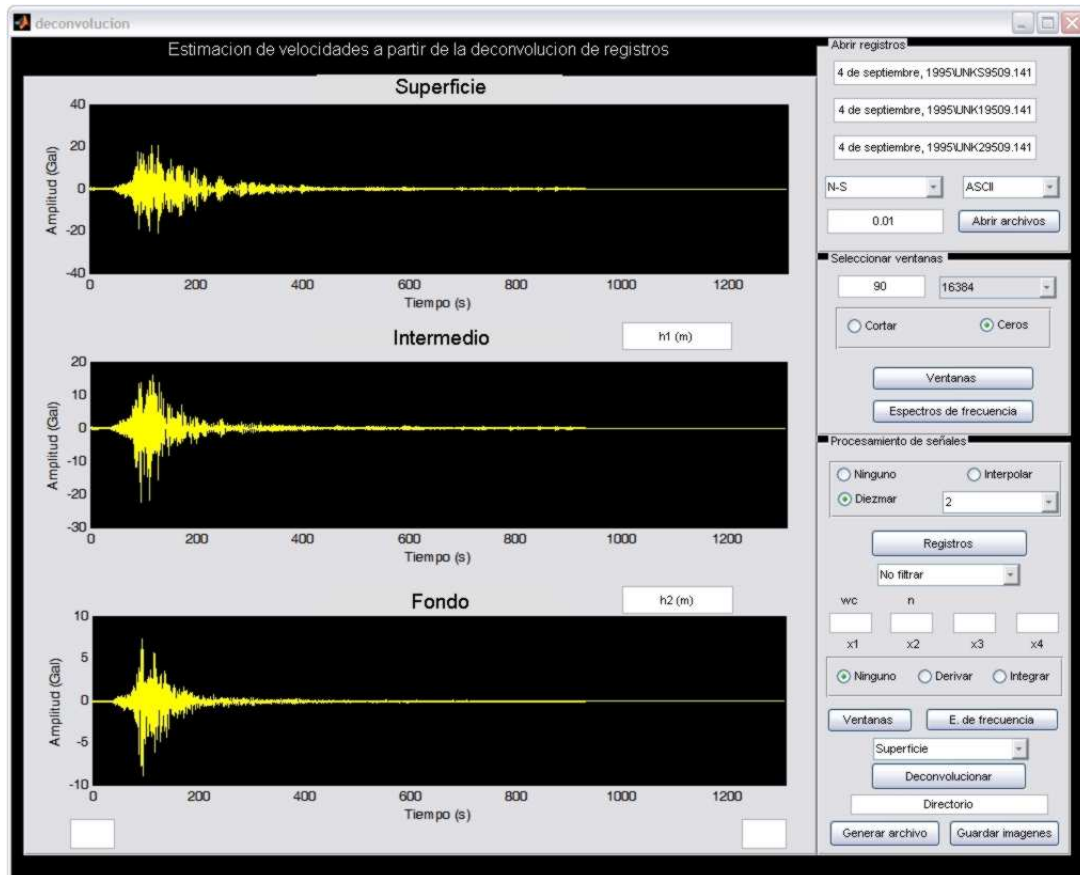


Figura H.5: Registros diezmadados.

Una vez modificada la señal en tiempo (diezmada o interpolada), se procede a elegir nuevamente los límites de las ventanas con que se desea trabajar. Esto se realiza en los cuadros marcados con los números 15 y 16 como se explicó anteriormente. Para observar el espectro de amplitudes de las ventanas seleccionadas, basta con presionar el botón denotado por el número 27 en la Figura H.1.

§H.4 Filtrado

Las ventanas seleccionadas pueden ser filtradas antes de realizar la deconvolución

de los mismos. La lista marcada con el número 23 en la Figura H.1, contiene tres opciones (No filtrar, Filtro Butterworth, Filtro Trapecio); la primera opción no realiza alguna operación de filtrado, la segunda utiliza un filtro Butterworth cuyo orden (n) y frecuencia de corte (ω_c) deben de ser especificados en los dos primeros cuadros de la opción 24 de la Figura H.1. Si se utiliza un filtro trapecio se deben de especificar los puntos x_1 , x_2 , x_3 y x_4 en los cuadros de la opción 24 de la Figura H.1, que representan los puntos que se muestran en la Figura H.6.

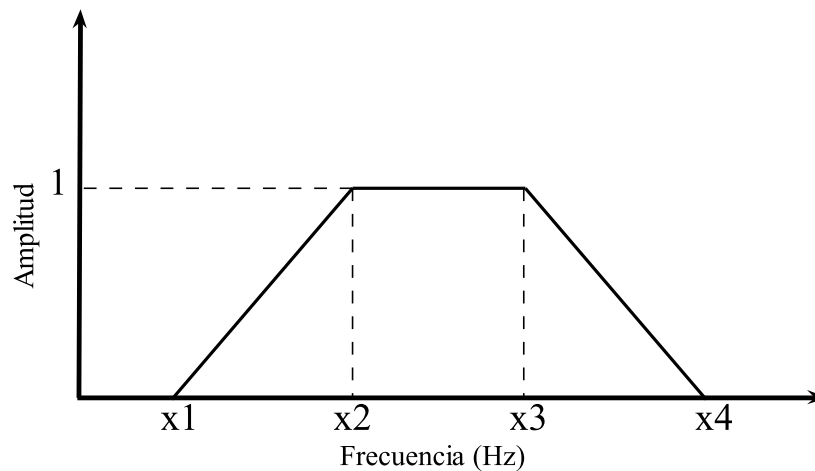


Figura H.6: Puntos que definen el filtro trapecio.

En el ejemplo mostrado en la Figura H.7, se seleccionó una ventana temporal que inicia en 90 s y tiene una extensión de 8192 muestras, con un $dt = 0.02$, es decir la ventana tiene un intervalo de 163.83 s. Los registros se filtraron con un filtro Butterworth de orden $n=10$ y con una frecuencia de corte $\omega_c = 2$.

Para observar las ventanas de presiona el botón denotado con el número 26 en la Figura H.1. Para observar el espectro de amplitudes de los registros se presiona el botón marcado con el número 27.

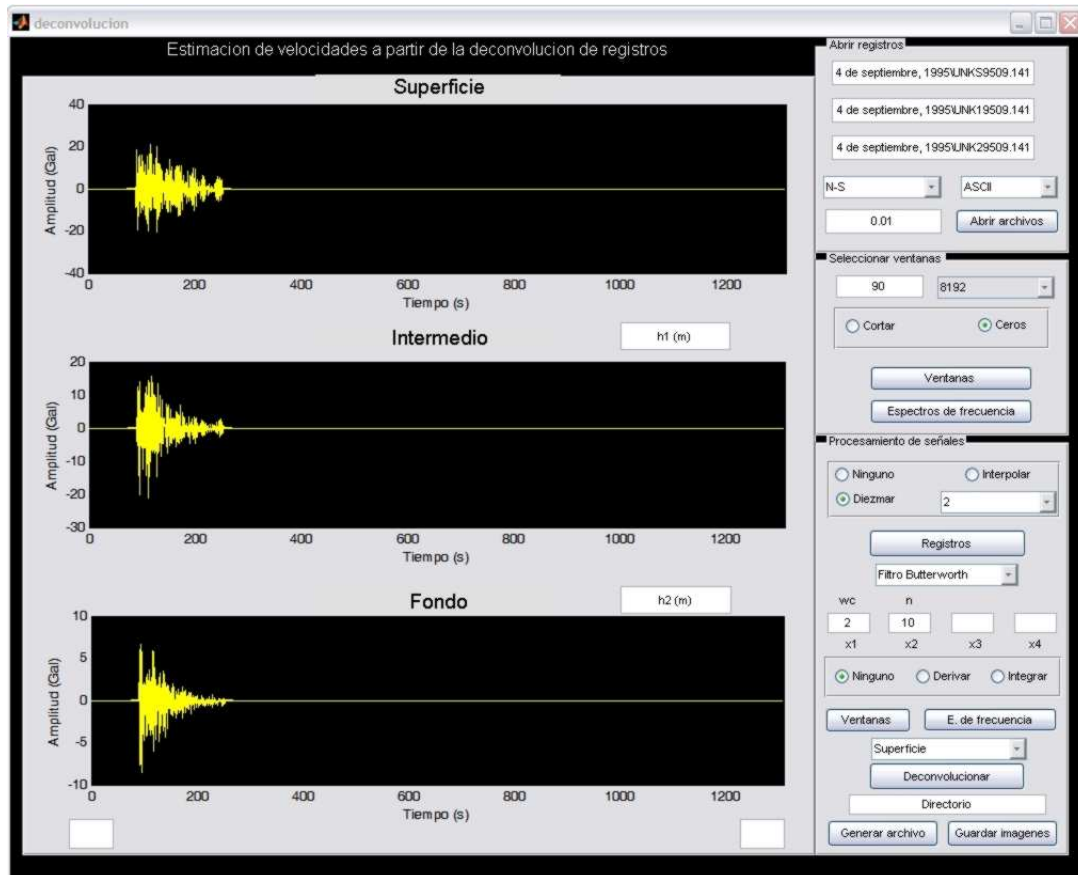


Figura H.7: Registros resultantes, después de ser diezmadados y filtrados con un filtro Butterworth de orden 10 y una frecuencia de corte $\omega_c = 2$.

Si se desea, los registros se pueden **derivar** o **integrar**, seleccionando la opción adecuada en el menú de botones denotado por el número 25 en la Figura H.1.

§H.5 Deconvolución de registros

La deconvolución de acelerogramas es una división entre registros que se realiza en el dominio de la frecuencia. Una vez seleccionado las características que tendrán los registros, se selecciona en la lista marcada con el número 28 en la Figura H.1, con

respecto a que acelerograma se deconvolucionarán los registros sísmicos; las opciones son: Superficie, Intermedio y Fondo.

La finalidad de este trabajo, es la estimación de velocidades de propagación de las ondas sísmicas utilizando la deconvolución de acelerogramas con respecto al registro sísmico de la superficie; por lo tanto, la deconvolución con respecto a la superficie permite estimar las velocidades de propagación según se explica en la sección §7.4.3.

Para observar los registros deconvolucionados se debe presionar el botón marcado con el número 29 en la Figura H.1. El intervalo de ploteo del eje horizontal en las gráficas que muestran los registros deconvolucionados es $[-1, 1]$, para modificar estos valores se deben escribir los valores deseados en los cuadros marcados con los números 6 y 7 en la Figura H.1; en los cuadros 4 y 5 de la misma figura se deben escribir las profundidades donde se encuentran los instrumentos de grabación. El programa genera dos archivos de salida, el primero de ellos contiene las velocidades estimadas, las características de las ventanas seleccionadas y los valores del filtro utilizado; el segundo es un archivo propio de MATLAB®, el cual contiene todas las variables generadas por el programa. Los archivos generados son `vel.dat` y `deconvo.mat`.

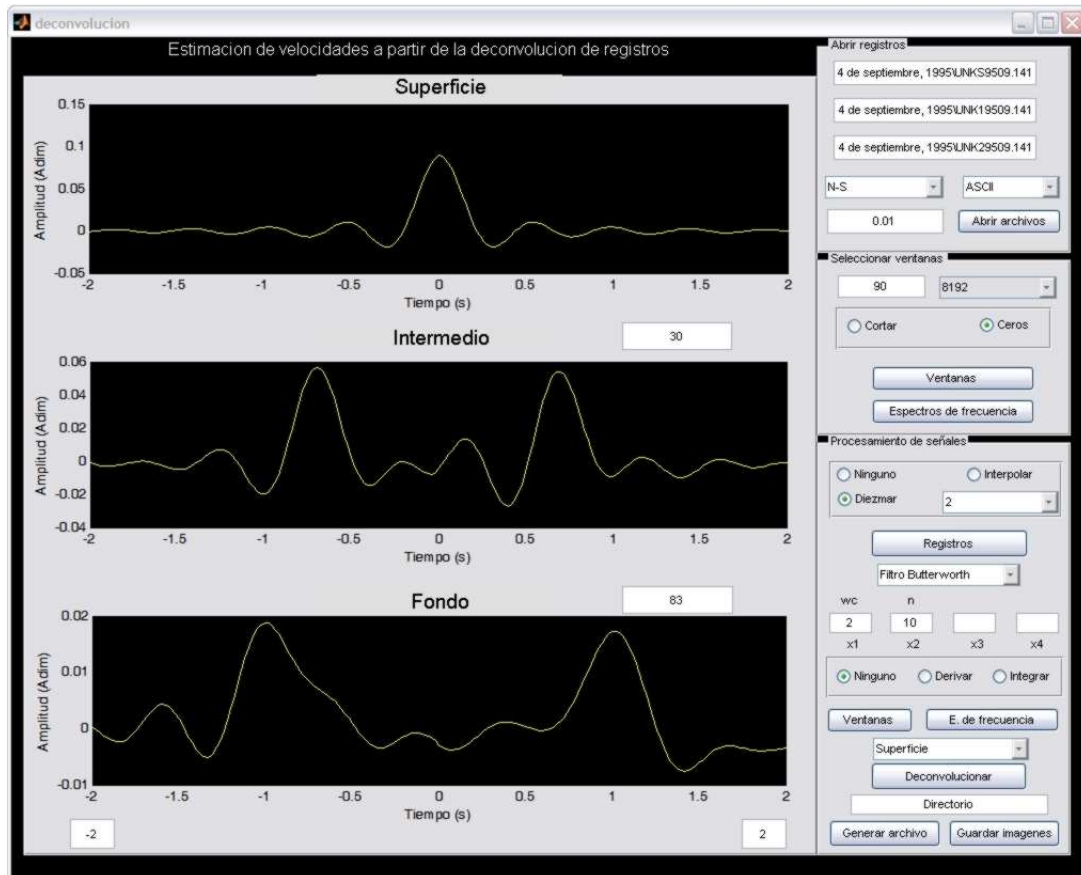


Figura H.8: Registros deconvolucionados.

