



**CENTRO INTERDISCIPLINARIO DE INVESTIGACIÓN PARA  
EL DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL UNIDAD OAXACA**

---

---

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y  
APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES**

**ANÁLISIS DE LAS CONDICIONES LÍMITE PARA UN MODELO  
DE SECADO AL VACÍO POR CONTACTO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS**

**PRESENTA:**

**MAYRA ARIADNA GARCÍA PATIÑO**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. SADO TH SANDOVAL TORRES**



SIP-14

**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO**

*ACTA DE REVISION DE TESIS*

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez siendo las 13:00 horas del día 12 del mes de diciembre del 2016 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del **Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca** (CIIDIR-OAXACA) para examinar la tesis de grado titulada: **Análisis de las condiciones límite para un modelo de secado al vacío por contacto.**

Presentado por la alumna:

**García**

Apellido paterno

**Patíño**

materno

**Mayra Ariadna**

nombre(s)

Con registro: 

B	1	4	0	8	5	9
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de: **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA  
 Director de tesis

Dr. Sadoth Sandoval Torres

Dr. Pedro Montes García

Dr. Juan Rodríguez Ramírez

Dr. Carlos Martínez Álvarez

Dra. Lilia Leticia Méndez Lagunas

EI PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. Salvador Isidro Belmonte Jiménez





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESION DE DERECHOS*

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez el día 12 del mes de diciembre del año 2016, el (la) que suscribe García Patiño Mayra Ariadna, alumno (a) del Programa de **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES** con número de registro B140859, adscrito al Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Sadoth Sandoval Torres. y cede los derechos del trabajo titulado: **“Análisis de las condiciones límite para un modelo de secado al vacío por contacto”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **Calle Hornos 1003, Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca**, e-mail: [posgradooax@ipn.mx](mailto:posgradooax@ipn.mx) ó [mayragp-7@hotmail.com](mailto:mayragp-7@hotmail.com) Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

  
García Patiño Mayra Ariadna



## Resumen

El secado de tubérculos utilizando aire caliente degrada en gran medida al material, por lo cual se recurre a métodos modernos como el secado a vacío. Para poder diseñar, optimizar, y mejorar el control de un proceso a vacío es necesario recurrir a la simulación con la finalidad de predecir el comportamiento de la migración de humedad bajo ciertas condiciones. En este trabajo se propone un modelo matemático que considera la migración de humedad, de calor y el transporte de la fase gaseosa en rodajas de papa de 3.5 mm de espesor y 45 mm de diámetro, para simular un secado a 55, 65 y 75 °C con una presión de 26, 56 y 79 kPa. El modelo considera tres ecuaciones diferenciales parciales, para capturar la conservación del contenido de humedad (agua líquida y vapor de agua), aire seco y la transferencia de energía. Para simular el comportamiento y dinámica del secador se proponen dos ecuaciones ordinarias que describen el efecto de la bomba de vacío en la concentración de vapor de agua y aire seco en la cámara de secado. Los mecanismos de transporte de humedad consideran la ley de Fick y Darcy para transporte de vapor (en esta fase el principal aporte es difusivo), para el transporte líquido (agua libre) se utiliza la difusividad capilar y para transporte de aire la ley de Fick y Darcy.

Para la condición límite de la ecuación de conservación de humedad, se propone un balance de masa en términos de la tasa de evaporación considerando la diferencia de presiones entre la cámara de secado y la superficie del material. La condición límite depende principalmente de la diferencia de presión y de un coeficiente de transferencia estimado de datos experimentales cuyo valor es  $2E-3 \text{ kg s}^{-1}$ . Para la condición frontera de calor se considera la energía necesaria para la evaporación del agua, la cual es función del flux de evaporación y el calor latente. Para el cálculo de la presión de vapor en la superficie se utilizaron las isotermas de desorción, en tanto que para la presión en la cámara las densidades obtenidas por las EDO's. EL modelo simula las cinéticas de secado desde un contenido de humedad inicial de 5.3 en base seca, hasta un contenido final de 0.05 en un proceso que dura 4 horas, y predice el calentamiento del material observándose 3 periodos de calentamiento. Se observa que la condición límite para transporte de masa es capaz de predecir los cambios de presión generados por la bomba. El efecto del funcionamiento de la bomba en el flux de masa permite observar las fases activas y pasivas del secado. En el perfil del contenido de humedad se simulan las zonas higroscópicas y la no higroscópica del secado. El modelo simula las cinéticas de secado con un RMSE de 0.03 cuando son comparadas contra datos experimentales de la literatura.

Palabras clave: medio continuo, bomba de vacío, medio poroso, multifase, acoplamiento.

### Abstract

Drying of tubers using hot air degrades the material, therefore modern methods such as vacuum drying are used. In order to design, optimize and improve the control of a vacuum process it is necessary to use the simulation to predict the behavior of the moisture migration under certain conditions. In this work proposes a mathematical model that considers the migration of moisture, heat and transport of the gas phase in slices of potato of 3.5mm thickness and 45mm diameter, to simulate a drying at 55, 65 y 75°C with a pressure of 26, 56 and 79 kPa. The model considers three partial differential equations, to capture conservation of moisture content (liquid water and water vapor), dry air and energy transfer. To simulate the behavior and dynamics of the dryer, two ordinary equations are proposed that describe the effect of the vacuum pump on the concentration of steam and dry air in the drying chamber. The mechanisms of moisture transport consider the Fick and Darcy laws by transport vapor (in this phase the main contribution is diffusive), for the liquid transport (free water) used the capillary diffusivity and for air transport the Fick and Darcy laws. For the boundary condition in moisture conservation equation, a mass balance is proposed in terms of the evaporation rate considering the difference of pressures between the drying chamber and the material surface. The boundary condition depends mainly to pressure difference and an estimated transfer coefficient of literature experimental data whose value is  $2E-3 \text{ kg s}^{-1}$ . For the heat boundary condition considered the energy necessary for the evaporation of water, which is a function of the evaporation flux and latent heat. For the calculation of the vapor pressure at the surface desorption isotherms were used, while for the pressure in the chamber the densities were obtained by the ODE's. The model simulates drying kinetics from an initial moisture content of 5.3 in a dry basis to a final content of 0.05 in a process lasting 4 hours and predicts the heating of the material with three heating periods. It is observed that the limit condition for mass transport is able to predict the pressure changes generated by the pump. The effect of the operation of the pump in the mass flux allows to observe the active and passive phases of the drying. In the profile of the moisture content, the hygroscopic and non-hygroscopic zones of the drying are simulated. The model simulates drying kinetics with a RMSE of 0.04 when compared against literature experimental data.

Keywords: continuous medium, vacuum pump, porous medium, multiphase, coupling.

## Agradecimientos

*...”Pienso mil veces al día que mi vida externa e interna se basa en el trabajo de otros hombres, vivos o muertos. Siento que debo esforzarme por dar en la misma medida en que he recibido y sigo recibiendo”... (Albert Einstein)*

*A mi familia, que me ha acompañado a lo largo de mi vida, convirtiéndola en una feliz y gran aventura.*

*Al Dr. Sadoth Sandoval torres, que ha despertado en mí la alegría por el trabajo y el conocimiento.*

*Al Dr. Emilio Hernández Bautista, por enseñarme que el conocimiento es mejor si se comparte.*

*A mi comité tutorial, los doctores Pedro Montes, Juan Rodríguez y Lilia Méndez, que me han ayudado a desarrollar la habilidad de autocrítica.*

## Índice general

Resumen.....	3
Abstract.....	4
Índice general.....	6
Índice de tablas.....	9
Índice de figuras.....	9
Nomenclatura.....	13
CAPÍTULO 1: GENERALIDADES.....	15
Antecedentes.....	15
Planteamiento del problema.....	20
Objetivo General.....	21
Objetivos específicos.....	21
Justificación.....	22
Hipótesis.....	23
CAPITULO 2.....	24
2. Fundamentos teóricos.....	24
2.1 Secado.....	24
2.1.1 Secado al vacío.....	24
2.1.2 Secado al vacío por contacto.....	26
2.2 Estructura de la papa.....	27

CAPÍTULO 3.....	28
3. Modelado matemático .....	28
3.1 Ecuaciones de estado .....	29
3.1.1 Saturación.....	29
3.1.2 Porosidad.....	30
3.1.3 Ley de los gases ideales .....	31
3.1.4 Presión total del gas.....	32
3.1.5 Presión de vapor .....	33
3.1.6 Actividad de agua .....	34
3.1.7 Fracción mol del vapor .....	35
3.1.8 Difusividad binaria y efectiva.....	36
3.2 Principales mecanismos de transporte en tubérculos .....	36
3.2.1 Difusión capilar .....	36
3.2.2 Difusión de vapor .....	41
3.2.3 Convección del líquido o gas (ley de Darcy) .....	42
3.3 Condición límite.....	42
3.3.1 Análisis de la condición frontera en vacío .....	43
CAPÍTULO 4.....	48
4. Desarrollo del modelo matemático .....	48
4.1. Balance de masa.....	48

4.2.	Ecuación de conservación de energía .....	51
4.3.	Ecuaciones de Flux.....	52
4.3.1	Flux líquido .....	52
4.3.2	Flux de vapor.....	54
4.3.3	Flux de aire.....	54
4.4.	Condición límite .....	57
4.5.	Condición inicial .....	60
4.6.	Geometría .....	61
4.7.	Resumen del modelo matemático .....	61
CAPÍTULO 5.....		63
5.	Simulación numérica.....	63
6.	Análisis y discusión de resultados .....	68
6.1.	Efecto de la temperatura durante el secado al vacío .....	68
6.2.	Efecto de la presión durante secado al vacío por contacto .....	75
6.3.	Efecto del coeficiente de transferencia de masa en la condición frontera .....	76
6.4.	Comparación del secado convectivo y secado al vacío .....	78
Conclusiones .....		79
Bibliografía .....		80

## Índice de tablas

Tabla 2.1 Rangos de vacío (Chambers, 2004b).....	25
Tabla 2.2 Composición promedio de papa por 100 g después de la ebullición. (Singh and Kaur, 2009).....	27
Tabla 4.1 Modelo matemático para contenido de humedad.....	62
Tabla 4.2 Modelo matemático para densidad de aire.....	62
Tabla 4.3 Modelo matemático de energía.....	62
Tabla 5.1 Ecuaciones principales del modelo de secado al vacío por contacto. ....	64
Tabla 5.2 Parámetros variables que alimentan al sistema. ....	65
Tabla 5.3 Parámetros constantes que alimenta al modelo.....	66
Tabla 6.1 Error cuadrático medio en distintas condiciones de secado.....	73

## Índice de figuras

Figura 2.1 Diagrama de fases del agua (Chen and Mujumdar, 2009).....	24
Figura 2.2 Esquema del equipo de secado al vacío por contacto. ....	26
Figura 3.1 Permeabilidad de agua en papa cruda(Datta, 2006).....	38
Figura 3.2 Difusión del componente A en el componente B.....	41
Figura 3.3 Esquema de secado convectivo y capa límite.....	44
Figura 3.4 Esquema de secado al vacío.....	44

Figura 3.5 Esquema de secado al vacío en un medio poroso .....	45
Figura 4.1 Proceso de secado en un medio poroso.....	49
Figura 4.2 Fases de un medio poroso y mecanismos de transporte (Datta, 2007a).....	52
Figura 5.1 Mapa conceptual del modelo de secado al vacío por contacto de tubérculos .....	63
Figura 6.1 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 53328.8 Pa (0.53 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009).....	69
Figura 6.2 Perfiles de contenido de humedad simulados a 26664.4 Pa (0.26 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009).....	69
Figura 6.3 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 26664.4 Pa (0.26 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009).....	69
Figura 6.4 Perfiles de contenido de humedad simulados a 53328.8 Pa (0.53 atm) y distintas temperaturas.....	69
Figura 6.5 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 79993.2 Pa (0.79 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009).....	70
Figura 6.6 Perfiles de contenido de humedad simulados a 79993.2 Pa (0.79 atm) y distintas temperaturas.....	70
Figura 6.7 Rapidez de secado experimental a 79993.2 Pa (0.79 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009).....	70
Figura 6.8 Rapidez de secado experimental a 26664.4 Pa (0.26 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009).....	70
Figura 6.9 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 26664.4 Pa (0.26 atm) y 65°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados .....	71

Figura 6.10 Evolución de contenido de humedad a 26664.4 Pa (0.26 atm) y 55°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados .....	71
Figura 6.11 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 53328.8 Pa (0.53 atm) y 55°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados.....	71
Figura 6.12 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 26664.4 Pa (0.26 atm) y 75°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados.....	71
Figura 6.13 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 79993.2 Pa (0.79 atm) y 65°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados.....	72
Figura 6.14 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 79993.2 Pa (0.79 atm) y 75°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados.....	72
Figura 6.15 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 53328.8 Pa (0.53 atm) y 75°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados.....	72
Figura 6.16 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 79993.2 Pa (0.79 atm) y 55°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados.....	72
Figura 6.17 Evolución del contenido de humedad a 55 °C y 26664.4 Pa respecto al espesor en la muestra cada 10 minutos.....	74
Figura 6.18 Evolución de la temperatura y contenido de humedad a 55 °C y 26664.4 Pa.....	75
Figura 6.19 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 55 °C y distintas presiones (Fahloul et al., 2009).....	75
Figura 6.20 Perfiles de contenido de humedad simulados a 55 °C y distintas presiones .....	75
Figura 6.21 Perfiles de contenido de humedad simulados a 55 °C y distintas presiones .....	76
Figura 6.22 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 75 °C y distintas presiones (Fahloul et al., 2009).....	76

Figura 6.23 *Evolución del contenido de humedad a 55 °C y 26664.4 Pa con variaciones en el coeficiente de transferencia de masa*..... 77

Figura 6.24 *Evolución del contenido de humedad a 55 °C y 53328.8 Pa con variaciones en el coeficiente de transferencia de masa* ..... 77

Figura 6.25 *Perfiles de contenido de humedad en secado convectivo y en vacío*..... 78

## Nomenclatura

Símbolo	Descripción	Unidad
$D_{l,cap}$	Coefficiente de difusión capilar	$m^2/s$
$M$	Contenido de humedad base seca	$kg_{agua}/kg_{ss}$
$c_l$	Densidad en términos de concentración y saturación	$kg/m^3$
$C$	La concentración molar	$mol/m^3$
$R$	Constante de los gases ideales	$J/mol K$
$T$	Temperatura	$K$
$P$	Presión	$Pa$
$\hat{P}$	Presión parcial	$Pa$
$PM$	Peso molecular	$kg/mol$
$A_w$	Actividad de agua	Adimensional
$D_{eff}$	Coefficiente de difusión efectivo	$m^2/s$
$x_v$	Fracción molar del vapor	s/d
$\dot{m}$	Flux másico de evaporación	$kg/m^2 s$
$K_c$	Coefficiente de transferencia de masa en vacío	$m/s$
$J$	Flux másico	$kg/m^2 s$
$k$	Permeabilidad intrínseca	$m^2$
$q$	Gasto volumétrico	$m^3/h$
$Sat$	Saturación	Adimensional
$M_c$	Contenido de humedad crítico	$kg_{agua}/kg_{ss}$
$C_p$	Capacidad calorífica	$J/kg K$
$h_v$	Calor latente de vaporización	$J/kg$

### Símbolos griegos y operadores matemáticos

$\rho$	Densidad	$kg/m^3$
$\varepsilon$	Porosidad	Adimensional
$\lambda$	La conductividad térmica de la papa	$W/m K$
$\mu$	Viscosidad	$kg/m s$
$\nabla$	Operador gradiente	
$\nabla \cdot$	Operador divergente	

### Subíndices y superíndices

$l$	Líquido
$s$	Sólido seco
$g$	Gas
$v$	Vapor
$a$	Aire
$Sat$	Saturación
$ch$	Cámara

## CAPÍTULO 1: GENERALIDADES

### Antecedentes

En los últimos años diversas investigaciones se han interesado en mejorar la calidad de los alimentos deshidratados, la cual varía dependiendo del método y las condiciones aplicadas (Krokida *et al.*, 2001). Una de las técnicas comúnmente empleadas en la industria de alimentos es el secado convectivo. Sin embargo, este método presenta algunas desventajas dentro de las cuales podemos mencionar las siguientes: baja eficiencia energética, degradación del color del producto, alteración química de los alimentos, pérdida de nutrientes, alteración de la textura y tiempos de secado prolongados (Bondaruk *et al.*, 2007).

Para intentar superar los inconvenientes de las tecnologías de secado convencionales se han propuesto algunas técnicas más avanzadas, como es el caso de la liofilización y el secado al vacío (Chen and Mujumdar, 2009). La liofilización proporciona altas características de calidad no comparables con ningún otro método, puede ser aplicada a productos biológicos, farmacéuticos y alimentos. Sin embargo, está es considerada una técnica costosa (Ratti, 2008a).

Por otro lado, el secado al vacío ha sido propuesto como un método alternativo, donde el daño en la estructura es mínimo y el costo comparado con la liofilización es menor. Esta tecnología consiste en disminuir la presión total en la cámara, con lo cual, de acuerdo con diagrama termodinámico del agua, el líquido se evapora a una menor temperatura. Así mismo esta técnica disminuye el tiempo de secado e incrementa el transporte de humedad en el interior del producto.

La técnica de deshidratación al vacío es utilizada principalmente en productos sensibles a la temperatura y fácilmente oxidables (Chen and Mujumdar, 2009). Entre estos productos se encuentran los tubérculos cuyas propiedades físicas y químicas deben ser conservadas durante su procesado.

Bondaruk *et al.* (2007), evaluaron la influencia de las condiciones de secado al vacío (6, 12, 18 y 24 kPa) en el contenido de almidón y azúcares, así como en las propiedades mecánicas y micro estructurales de un tubérculo. En el estudio se utilizaron cubos de papa (*Solanum tuberosum cv Bryza*) de 1 cm. Por medio de un análisis de varianza se encontró que bajo condiciones de vacío existe una menor pérdida de almidones y azúcares comparada con el secado convectivo a 70 °C. Concluyen que la diferencia de color entre la papa cruda y la deshidratada fue no significativa ( $p < 0.05$ ).

También se han estudiado las propiedades físicas de los productos sometidos a secado a vacío, Markowski *et al.* (2009) compararon las propiedades micro estructurales y de rehidratación de dos métodos de secado; el secado al vacío por microondas ( 480 W) a presiones de 6, 12, 18 y 24 kPa y el secado convectivo a 50 y 70° C con una velocidad de aire de 2 m/s en cubos de papa de 1 cm. Utilizando la técnica de microscopía electrónica de barrido, reportan que durante el secado al vacío se obtuvieron muestras con mayor porosidad y mayor capacidad de rehidratación con respecto a las obtenidas por secado convectivo.

Si bien es cierto que las propiedades químicas y físicas son importantes, algunos autores han estudiado el desempeño del secado al vacío desarrollando modelos matemáticos. Estos modelos se clasifican en empíricos y mecanísticos (Waananen *et al.*, 1993). De acuerdo con Rasmuson y colaboradores(2014), un modelo empírico se basa en correlaciones de datos experimentales. Su objetivo es conocer la tendencia de los datos del sistema y no tienen un significado físico. Por otra parte, definen a los modelos mecanísticos como aquellos basados en el entendimiento de los fenómenos físicos y químicos que ocurren durante el proceso, aplicando leyes y teorías particulares.

La aplicación de un modelo matemático para la solución de un problema se conoce como simulación (Velten, 2009). Jousse (2008) , menciona que la simulación es usada en muchas áreas de la industria de alimentos. Esta tiene mayor impacto en desarrollo de procesos, escalamiento, optimización y sirve como guía en investigaciones que buscan el entendimiento de las leyes físicas y químicas que describen el comportamiento de los alimentos sometidos a condiciones de proceso específicas. Derivado del interés de los consumidores se busca obtener alimentos saludables que conserven sus características químicas y físicas, esto requiere la integración de las funciones que describen la estructura del producto y su interacción con los procesos. Esto incrementa la tendencia al uso y el impacto de las simulaciones como una herramienta en la ingeniería de procesos. Sin embargo, existen muy pocos modelos válidos y simulaciones realmente predictivas.

El modelado matemático es una herramienta poderosa en la industria de los procesos. Analizaremos en primer lugar el modelado empírico seguido del análisis de modelos mecanísticos. Estos últimos se examinarán desde seis puntos, los cuales representan de acuerdo con Bear and Cheng (2010) los diferentes elementos para el desarrollo de un modelo matemático: dimensión, geometría, ecuaciones constitutivas, ecuaciones de flujo, condiciones iniciales y condiciones fronteras.

Song *et al.* (2009), comparan los modelos empíricos de Page, Henderson y Pabis. Para el desarrollo experimental usaron rebanadas de papa de 2 mm de espesor y diferentes condiciones iniciales de potencia (140, 240 y 340 W) y presión (80, 60 y 40 kPa). Establecieron un tiempo fijo de secado de 30 minutos

por corrida. Menciona que el efecto de la presión no es tan importante comparado con la potencia de las microondas. Para validar los resultados, realizaron un análisis de varianza y concluyen que la diferencia fue no significativa ( $p < 0.05$ ).

Liu *et al.* (2013), realizaron un modelo unidimensional del secado al vacío por infrarrojo lejano en muestras de papa de 40x40 mm y espesores de 4, 6 y 8 mm. Con respecto a las ecuaciones constitutivas, consideran el calor específico y la conductividad térmica constante, la densidad como función del contenido de humedad, mientras para determinar los coeficientes de calor y masa utilizan la ecuación de Chilton y Colburn. Las ecuaciones de calor suponen que la energía que se transfiere debido al movimiento del fluido es igual a la transferida por conducción en el dominio de la muestra y la ecuación de transferencia de masa supone que la transferencia de masa es por difusión del líquido y es explicada por la segunda ley de Fick. El modelo consideró diferentes condiciones iniciales de temperatura (120, 140 y 160 °C) y presión (1.5, 8 y 15 kPa). Por otro lado se propusieron condiciones límite en las superficies de la muestra; en la inferior una condición tipo Dirichlet la cual representa la exposición del material a una temperatura fija. Mientras para la frontera superior proponen una condición frontera tipo Robinson donde la energía transferida por conducción es igual a la transferida por radiación, convección y cambio de fase.

Los autores concluyen que la radiación incide en la superficie de la muestra y se convierte en energía causando que la temperatura incremente y el agua se evapore en la superficie. Por lo cual la energía se transfiere al interior de la muestra, mientras el agua que se encuentra al interior de la muestra se difunde hacia la superficie. La temperatura de la papa continua incrementando mientras el contenido de humedad decrece. Simultáneamente la temperatura disminuye en la frontera y el contenido de humedad aumenta desde la superficie hacia el interior de la muestra. Sin embargo la temperatura y el contenido de humedad se homogenizan al final del proceso. Los resultados de la validación muestran que el modelo predice correctamente los cambios de temperatura y humedad en los diferentes tiempos del secado con valores del coeficiente de determinación ( $R^2$ ) cercana a 1.0 y un error relativo del 10 por ciento.

En lo que se refiere a los modelos mecánicos, se encuentran los modelos acoplados, los cuales describen la interacción simultánea de calor y masa, o bien entre el producto y el equipo (proceso). Este tipo de modelos no ha sido investigado para el secado a vacío de papa. Para simular correctamente un proceso a vacío es necesario escribir las condiciones límites correctas, tema que se ha discutido en otras áreas como son la ciencia y tecnología de la madera. A continuación mencionamos los trabajos más representativos de este tema:

Erriguible *et al.* (2005) , realizaron un modelo 2D multifase el cual es útil para procesos de secado de medios porosos. Este modelo incluye ecuaciones de conservación de momentum, energía y masa.

En la ecuación de momentum la fase gaseosa (flux de vapor y aire) obedece la ley de Fick y la velocidad de la fase gaseosa es descrita por ley de Darcy. Por otro lado el flux de la fase líquida obedece la ley de Darcy y la presión capilar es introducida como la diferencia entre la presión del gas y del líquido. Mientras el flux de agua libre es modelado desde el enfoque fenomenológico clásico (ley de Darcy).

En las ecuaciones de conservación de energía y masa suponen que existe equilibrio térmico entre la fase las fases líquida, sólida y gas. Consideran la densidad del gas como una función que cumple con la ley de los gases ideales. Consideran que la presión del vapor se encuentra en equilibrio en la región no higroscópica.

Con respecto a la condición frontera, mencionan la importancia de unir los dos dominios por medio de la condición límite apropiado. Proponen el uso de la ecuación de Navier-Stokes en la frontera del producto. Concluyen que el uso de la ecuación de Navier-Stokes en la condición frontera es válido para un gran número de procesos de secado y su principal interés es evitar el uso de coeficientes de transferencia los cuales en la mayoría de los casos tienen bases teóricas desconocidas.

Erriguible *et al.* (2007) realizaron un modelo similar al propuesto por (Erriguible *et al.*, 2005), el cual consiste en resolver ecuaciones de conservación en la cámara de vacío y ecuaciones del transporte interno del medio poroso, sin embargo en el trabajo más reciente proponen el uso de otro tipo de condición frontera. Ellos distinguen que las condiciones fronteras se encuentran asociadas con la transferencia de flux en la interfase, lo cual supone una condición límite de flujos continuos. Concluyen que este método es particularmente conveniente para procesos en los que las transferencias internas están fuertemente acoplados a los externos.

Sandoval *et al.* (2011), describen en su trabajo la física de las relaciones agua-madera y las interacciones con un secador de vacío. La dinámica del vapor de agua y el aire fueron simulados acoplando dos escalas, la gran escala (secador) y macro escala (muestra). Por lo cual realizan balances de calor y masa para la muestra y para el secador.

A macro escala el transporte de la fase líquida es descrito por la ley de Darcy, mientras la migración de agua ligada es explicada por el modelo difusión-sorción. Con respecto a la fase gaseosa considera que la movilidad del vapor y el aire dependen del gradiente de presión y concentración. Para las condiciones limites establecieron una igualdad de la presión en la superficie del material y del secador. Utilizan una

condición límite tipo Dirichlet en la que existe un equilibrio entre el vapor de agua en la superficie y la presión de vapor en la cámara. En la gran escala toman en cuenta las fugas en el secador.

No obstante, de acuerdo a Erriguible *et al.* (2005), una de las principales dificultades para simular el secado en vacío de un medio poroso consiste en modelar adecuadamente la transferencia de masa y calor así como las condiciones frontera entre el medio y sus alrededores. En este caso el enfoque clásico de los coeficientes de transferencia teóricos no tiene un significado físico debido a que la capa límite no se forma en condiciones de vacío, supuesto que debe discutirse con detalle.

Hernandez (1991), propuso identificar diferentes coeficientes para distintas condiciones de vacío. Otro ejemplo es el de Temmar (1994) quien utilizó coeficientes de transferencia calculados a partir de correlaciones de convección natural, en contraste con Chakir (1993) que estableció el equilibrio de humedad del producto con el ambiente por medio de una isoterma de desorción. Mientras que Baixeras (1995) calculó el flux másico haciendo un balance macroscópico en la cámara de vacío, en donde la presión total en la interfase se estableció como igual a la presión de vapor. Por otro lado, Sebastian and Turner (1994) propusieron el concepto de capa de transición el cual definieron como: el espesor del producto donde se observa la diferencia de presión entre el centro del producto y la cámara de secado.

Durante el desarrollo de esta tesis, se analizará el problema de la transferencia de masa en la frontera durante el secado al vacío por contacto de tubérculos. Por otra parte se propondrá una escritura para las condiciones límite, las cuáles serán aplicadas a un modelo mecanístico con el objetivo de simular cinéticas de secado a vacío.

## Planteamiento del problema

El secado convectivo es la técnica comúnmente empleada para deshidratar productos alimenticios, sin embargo involucra desventajas tales como su baja eficiencia energética, daños en el aspecto físico (Liu *et al.*, 2013), lo cual según Bondaruk *et al.* (2007) es consecuencia de su prolongado tiempo de exposición y elevadas temperaturas, a lo que se le atribuye cambios en el color, sabor y textura, así como la degradación de compuestos termo sensibles de interés.

A medida que los hábitos de los consumidores se han vuelto más sofisticados se ha prestado mayor atención en la calidad de los productos deshidratados, la cual se ve afectada en las diferentes etapas del procesamiento (Singh and Kaur, 2009). Por lo anterior, existe un interés para diseñar procesos que disminuyan los tiempos de secado e incrementen la calidad de los materiales, entre éstas se encuentra el secado al vacío, el cual se encuentra entre los mejores métodos para remover el agua y obtener un producto de alta calidad. Los principales productos susceptibles de seguir este proceso han sido a productos sensibles a la temperatura y al oxígeno.

Sin embargo, hay dos necesidades particulares para mejorar un proceso de deshidratación al vacío de tubérculos: la primera es diseñar un modelo matemático que acople la interacción producto-secador y la segunda es la correcta elección de condiciones límite para mejorar la predicción. Dentro de este proceso se han identificado algunas inconsistencias en el desarrollo de modelos que predigan el comportamiento del sistema, especialmente al establecer la condición frontera en contacto con el medio. En el caso de la transferencia masa, las condiciones fronteras para un proceso al vacío por contacto no han sido discutidas en detalle y de ellas depende la correcta predicción de un modelo.

Muchos trabajos han utilizado la condición frontera tipo Neumann, que corresponde a una transferencia de calor por convección en la superficie. Sin embargo en el vacío la cantidad de fluido disminuye y aun cuando exista este puede ser considerado no viscoso, por otra parte la evaporación es un fenómeno superficial, el cual impide la formación de la capa límite por lo tanto se propone que la ley de enfriamiento de Newton no describe al proceso adecuadamente.

Cuando se utilizan las condiciones límite apropiadas en un modelo de secado a vacío por contacto, se predice con mayor exactitud el tiempo final de secado, la rapidez de secado, la cantidad de agua evaporada, además de servir de base para la optimización, al comparar de diferentes condiciones de operación (presión, temperatura, volumen de la muestra), con lo cual se pueden simular diferentes escenarios para el proceso.

## **Objetivo General**

Desarrollar un modelo matemático del secado a vacío por contacto para papa considerando la dinámica del secador en sus fases pasiva y activa, así como la simulación de la operación.

## **Objetivos específicos**

1. Analizar la condición límite para evaporación en condiciones de vacío.
2. Determinar la condición límite que describa apropiadamente la transferencia de calor en un secador al vacío por contacto.
3. Escribir el conjunto de ecuaciones diferenciales para transferencia de masa y calor para condiciones de vacío.
4. Simular el modelo en COMSOL Multiphysics 4.3b
5. Validar las simulaciones obtenidas con datos de otras investigaciones.

## Justificación

Los modelos matemáticos son usados en todas las fases de la ingeniería química desde la investigación hasta el desarrollo de plantas de operación, son una herramienta efectiva para resolver problemas. El desarrollo de softwares sofisticados ha servido particularmente en la resolución de modelado en ingeniería ya que las leyes físicas y químicas que gobiernan estos procesos son complejas. Todos los modelos son una abstracción de sistemas reales, sin embargo son una herramienta poderosa para el desarrollo y entendimiento de importantes procesos utilizando ecuaciones matemáticas. Lo cual es un prerequisite para mejorar el diseño, escalamiento, procesos de control, optimización, evaluación, planeación de experimentos, determinación de cantidades que no pueden ser medidas directamente, simulación en lugar de costosos experimentos, estudios de factibilidad para determinar el potencial antes de construir un prototipo de secador al vacío.

Para los productores de papa es necesario aprovechar la mercancía que no han alcanzado un lugar en el mercado y representan una pérdida. Se estima que el 12 % de la producción de papa se pierde por no tener un tratamiento de conservación. Actualmente es necesario utilizar un proceso de secado que brinde la oportunidad de evitar esta pérdida, pero ofreciendo un producto que conserve sus características físicas y contenido de compuestos de interés.

El secado convectivo es ampliamente utilizado para este fin, sin embargo presenta inconvenientes como daños en la estructura, deformación excesiva, pérdida o degradación de compuestos importante y provoca reacciones de oscurecimiento que provocan un mal aspecto físico al producto. Por lo cual el secado al vacío por contacto representa un área de oportunidad para superar estos inconvenientes, sin embargo este proceso ha generado diversos cuestionamientos durante el modelado, al proponer la condición límite la cual es uno de los pasos más importantes en su elaboración y de su correcta elección depende la exactitud del modelo. En nuestro contexto, proponer la condición límite adecuada en la superficie servirá para entender mejor el efecto del vacío en el sistema y definir el mecanismo de transferencia de masa en la superficie.

## **Hipótesis**

En un modelo matemático de secado al vacío por contacto, el gradiente de presión entre el medio y dominio es la fuerza motora de transporte de masa para la frontera en contacto con el medio.

## CAPITULO 2

### 2. Fundamentos teóricos

#### 2.1 Secado

El secado es importante en procesos industriales, puede ser definido como una operación unitaria en la cual la separación sólido -líquido se logra por medio de la evaporación del líquido como resultado la aplicación de calor (Van' t Land, 2011). El calor puede subministrarse al proceso por convección (secadores directos), conducción (secadores indirectos o de contacto), o por radiación. Más del 85 por ciento de los secadores industriales son del tipo convectivo con aire caliente o gases de combustión directa como medio de secado. En todas las formas de suministro de calor (excepto microondas o radio frecuencias) el calor se difunde en el interior del sólido principalmente por conducción (Jangam and Mujumdar, 2010).

##### 2.1.1 Secado al vacío

El secado al vacío es el resultado de reducir la presión total en una cámara de secado. El agua se evapora a temperaturas más bajas, el tiempo de secado se reduce e incrementa la transferencia interna de masa (Ratti, 2009).

Como se puede observar en la Figura 2.1, el secado al vacío se encuentra por debajo de la línea de presión atmosférica (101.330 kPa). Mientras la liofilización hace uso del fenómeno de sublimación (a temperaturas más bajas que 0.01 °C, y presiones de vapor por debajo de 0.612 kPa). El secado al vacío ordinario involucra evaporación a temperaturas mayores a 0.01 °C y presiones entre 0.612 y 101.33 kPa.

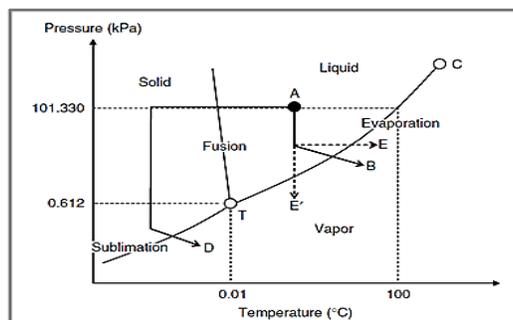


Figura 2.1 Diagrama de fases del agua (Chen and Mujumdar, 2009)

Si la temperatura del producto es más baja que el punto de ebullición del agua en él prevalece la presión total, entonces los mecanismos son similares a los encontrados en el secado convencional a presión atmosférica, por otra parte si durante el secado la temperatura del producto es el punto de ebullición del agua, la evaporación interna es producida dando como consecuencia un incremento en la rapidez de secado, en este caso es posible suponer que el frente se mueve hacia dentro a medida que se seca el producto. El agua del producto puede evaporarse en la interfase y moverse a través de la capa seca dejando un núcleo húmedo, el calor debe ser suministrado suficientemente como para mantener la temperatura del producto arriba del punto de ebullición del agua lo cual es difícil debido a las limitaciones mostradas anteriormente (Chen and Mujumdar, 2009).

Para entender mejor el fenómeno fundamental durante el secado al vacío, se debe entender la diferencia entre ebullición y evaporación. Durante la evaporación la presión de vapor es menor que la presión total y las burbujas no pueden ser formadas dentro del líquido, por lo tanto la evaporación es un fenómeno superficial. En el punto de ebullición sin embargo la presión de vapor saturado es igual a la presión total, así las burbujas pueden ser formadas dentro del líquido y elevarse, y la vaporización es un fenómeno de volumen. El secado al vacío se puede realizar a temperaturas y presiones donde el punto de ebullición del agua sea posible (Ratti, 2009)

*Tabla 2.1 Rangos de vacío (Chambers, 2004b)*

Tipo de vacío	Rango de presiones
Bajo Vacío	101330 Pa- 100 Pa
Vacío medio	100 Pa – 0.1 Pa
Alto vacío	0.1 Pa - $10^{-5}$ Pa
Ultra alto vacío	$10^{-5}$ Pa - $10^{-12}$ Pa
Vacío extremo	Inferiores a $10^{-12}$ Pa

Cuando se calienta un líquido en un recipiente abierto el líquido se vaporiza solo desde su superficie (se evapora). A la temperatura a la que la presión de vapor del líquido coincide con la presión externa, la vaporización se puede producir en todo el volumen del líquido y el vapor se puede expandir libremente en los alrededores. El proceso de vaporización libre en todo el volumen del líquido se denomina

ebullición. La temperatura a la que la presión de vapor de un líquido es igual a la presión externa y se denomina temperatura de ebullición a esa presión.

Cuando un líquido se calienta en un recipiente cerrado la ebullición no tiene lugar. En su lugar, la presión de vapor y, por consiguiente la densidad del vapor aumenta continuamente al incrementar la temperatura. Simultáneamente la densidad del líquido disminuye ligeramente debido a su expansión. Se llega a un punto en que la densidad del vapor es igual a la del líquido que queda y desaparece la superficie entre las dos fases. La temperatura en la que se produce la desaparición de las fases es la temperatura crítica,  $T_c$  de la sustancia. La presión de vapor a la temperatura crítica recibe el nombre de presión crítica,  $P_c$ . A la temperatura crítica y por encima de ella existe una única fase uniforme que recibe el nombre de fluido supercrítico y ocupa todo el recipiente sin que aparezca una interfase. Es decir por encima de la temperatura crítica no puede existir la fase líquida de la sustancia (Atkins, 2007).

### 2.1.2 Secado al vacío por contacto

En el secado por contacto el calor necesario para vaporizar el agua u otro líquido es transferido hacia un material particular a través de una pared de calentamiento. El secado por contacto comúnmente se realiza en secadores de disco o de tambor. Con la finalidad de lograr un secado uniforme las capas de partículas son agitadas mecánicamente. El secado por contacto puede realizarse en ausencia de aire en tal caso recibe el nombre de secado al vacío por contacto, este puede ser ventajoso en algunos casos y necesario en otros (Tsotsas, 1986).

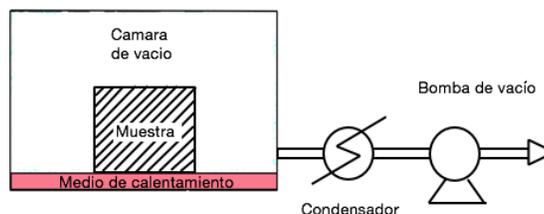


Figura 2.2 Esquema del equipo de secado al vacío por contacto.

Esta tecnología representa una interesante alternativa que puede ser adaptada a productos termo sensibles, debido a que el uso de vacío reduce la temperatura de ebullición y en consecuencia la temperatura que alcanza el producto (Bennamoun *et al.*, 2013). Consta de un recipiente enchaquetado conectado a una bomba de vacío, que en el fondo tiene un calentador con una base de metal sobre la cual se pone el producto a secar.

## 2.2 Estructura de la papa

La papa (*Solanumtuberosum*) es el cuarto cultivo de mayor importancia a nivel mundial solo después del trigo, el maíz y el arroz, es considerada uno de los principales alimentos de la dieta del ser humano, fuente eficiente de energía así como de otros nutrientes, incluidos vitaminas y minerales. Los productos procesados elaborados a partir de papa representan el 31% de la producción total e incluyen: papas congeladas para freír 30%, papas fritas 12% y productos deshidratados 12%.

La influencia de la composición química de la papa durante el procesado es importante para determinar la calidad y valor nutricional del producto final. Un ejemplo de ello son las papas deshidratadas en donde la calidad y valor nutricional se ven afectadas por las características del almidón, sus componentes pueden ser observados en la Tabla 2.2. Las características nutricionales tales como el índice glucémico y su impacto son importante para la salud humana y han sido estudiadas por numerosos investigadores, por lo cual es importante ser cuidadosos en la selección adecuada del método de procesamiento (Singh and Kaur, 2009).

*Tabla 2.2 Composición promedio de papa por 100 g después de la ebullición. (Singh and Kaur, 2009)*

Papa	
Agua	77 g
Carbohidratos	20.13 g
Energía	87 kcal
Proteínas	1.87 g
Grasas	0.1 g
Calcio	5mg
Potasio	379 mg
Fosforo	44 mg
Hierro	0.31 mg
Niacin	1.44 mg
Thiamin	0.106 mg
Riboflavin	0.02 mg

## CAPÍTULO 3

### 3. Modelado matemático

Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o al menos, bastante bien. Un sistema puede representarse en muchas formas diferentes, por lo que puede tener muchos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva. La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado, como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. Debemos siempre recordar que obtener un modelo matemático razonable es la parte más importante de todo el análisis. Una vez obtenido un modelo matemático de un sistema, se usan diversos recursos analíticos, así como computadoras, para estudiarlo y sintetizarlo.

Es posible mejorar la precisión de un modelo matemático si se aumenta su complejidad. En algunos casos, se utilizan cientos de ecuaciones para describir un sistema completo. Sin embargo, en la obtención de un modelo matemático, debemos establecer un equilibrio entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis. No obstante, si no se necesita una precisión extrema, es preferible obtener solo un modelo razonablemente simplificado. De hecho, por lo general basta con obtener un modelo matemático adecuado para el problema que se considera. Al obtener un modelo matemático razonablemente simplificado, a menudo resulta necesario ignorar ciertas propiedades físicas inherentes al sistema (Ogata, 2003).

El uso de modelos matemáticos es una herramienta efectiva para resolver problemas que se ha extendido en los últimos años debido a los rápidos avances de nuevos y más sofisticados equipos de cómputo y softwares. Todos los modelos son abstracciones sistemas y procesos del mundo real, sin embargo son una poderosa herramienta para ingenieros y científicos a los cuales les ayuda a entender importantes sistemas y procesos utilizando ecuaciones matemáticas (Rasmuson *et al.*, 2014)

En el contexto de ingeniería química el modelado matemático es prerequisite para

1. Diseño y escalamiento
2. procesos de control
3. optimización

4. entendimiento mecanicista.
5. evaluación y planeación de experimentos.
6. Diagnóstico y resolución de problemas
7. Determinación de cantidades que no pueden ser medidas directamente.
8. simulación en lugar de costosos experimentos en el laboratorio.
9. Viabilidad de estudios para determinar el potencial antes de construir un equipo.

### 3.1 Ecuaciones de estado

Cualquier ecuación que relacione la presión, la temperatura y la densidad (o volumen específico) de una sustancia se llama ecuación de estado.

#### 3.1.1 Saturación

La fracción de espacios porosos ocupada por la fase líquida se llama saturación. Matemáticamente la saturación de agua se define como:

$$S_l = \frac{1}{V^v} \int dV = \frac{V_l}{V^v} \quad (3.1)$$

Donde  $V^v$  es el volumen de los poros dentro del volumen del medio poroso,  $V$ , y se define como:

$$V^v = V - V_s \quad (3.2)$$

La saturación puede tomar valores en un rango de 0, cuando no hay agua presente en la muestra de tal modo que los espacios vacíos están ocupados completamente por la fase vapor. 1, cuando el agua ocupa todos los espacios vacíos y no existe la fase vapor presente en la muestra (Pinder and Gray, 2008).

(Ni, 1993) , la saturación de un líquido y gas puede ser definido como:

$$S_l = \frac{\Delta V_l}{\Delta V_l + \Delta V_g} = \frac{\Delta V_l}{\varepsilon \Delta V} \quad (3.3)$$

$$S_g = \frac{\Delta V_g}{\Delta V_l + \Delta V_g} = \frac{\Delta V_g}{\varepsilon \Delta V} \quad (3.4)$$

Por lo tanto la suma de la saturación del líquido y del gas es uno. La ecuación que describe la saturación del líquido en este trabajo es la utilizada por (Warning *et al.*, 2012)

$$Sat_l = \frac{M(1 - \varepsilon)\rho_s}{\varepsilon\rho_w} \quad (3.5)$$

Mientras la saturación del gas está representada por la siguiente ecuación:

$$Sat_g = 1 - Sat_l \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Porosidad

La porosidad ( $\varepsilon$ ) es una cantidad característica de un medio poroso. Esta, se define como la fracción volumen de espacios vacíos presentes en el medio poroso. La porosidad puede ser determinada por varios métodos, el más común es la inyección de mercurio, imbibición, poro-simetría de helio, microscopio electrónico de barrido, calorimetría de barrido diferencial y técnicas relacionadas con la adsorción. Los materiales se clasifican de acuerdo a su tamaño característico de poro. Los materiales microporosos tienen diámetros de poro del orden de 2 nm. Los materiales mesoporosos tienen entre 2 cm y 50 nm de diámetro. Mientras, los materiales macroporosos tienen poros con diámetros mayores a 500 nm (Bejan *et al.*, 2013).

La porosidad es el volumen del poro dividido entre el volumen total ocupado por el medio poroso (Pinder and Gray, 2008).

$$\varepsilon = \frac{V^p}{V} \quad (3.7)$$

De acuerdo a (Ni, 1993), El volumen total es la suma del volumen de la fase sólida, líquida y gaseosa.

$$\Delta V = \Delta V_s + \Delta V_l + \Delta V_g \quad (3.8)$$

Por lo cual la porosidad puede ser definida como la fracción del volumen ocupado por la fase líquida y la fase gas, respecto al volumen total de la muestra cómo se describe en la siguiente ecuación.

$$\epsilon = \frac{\Delta V_l + \Delta V_g}{\Delta V} \quad (3.9)$$

El valor de porosidad ( $\epsilon$ ) en papa se encuentra reportado por (Gulati and Datta, 2015) con un valor de 0.88.

### 3.1.3 Ley de los gases ideales

El origen de la ecuación de los gases ideales se puede encontrar en el trabajo de Charles Boyle y Gay-Lussac. En 1662, Boyle demostró que a una temperatura fija el producto de la presión y el volumen de una masa establecida de un gas era constante. En su primer experimento utilizó aire en un rango de presiones bajas, desde una pulgada de mercurio que equivale aproximadamente a 30 mbar. Más tarde Gay-Lussac amplió el trabajo de Boyle, estableciendo que a presión constante el volumen de una masa establecida de un gas incrementa linealmente con la temperatura. En el vacío se utilizan gases a bajas presiones por lo tanto es válido asumir que estos gases pueden ser descritos adecuadamente por la ley de los gases ideales. El comportamiento de los gases reales se describe con exactitud por la ley de los gases ideales solo en el límite de bajas presiones, experimentos muestran claramente que la desviación del comportamiento ideal se puede obtener al graficar el producto de la presión-volumen de un mol a una temperatura dada contra la presión (Chambers, 2004a)

$$PV = nRT$$

Donde P es la presión absoluta, V es el volumen, T es la temperatura,  $\rho$  es la densidad, n es en número de moles y R es la constante universal de los gases ideales, cuyo valor es 8.314 kJ/kmol K (Çengel *et al.*, 2006).

Por medio de la ley de los gases es posible calcular las siguientes variables de interés para este trabajo.

#### 3.1.3.1 Concentración molar del gas

La concentración molar del gas se obtiene a partir de la ley de los gases ideales, por medio de la siguiente ecuación

$$C_g = \frac{P_g}{RT} \quad (3.10)$$

Expresando la ecuación anterior en términos de porosidad y saturación:

$$C_g(\varepsilon, S^g) = \frac{P_g \varepsilon S^g}{R T} \quad (3.11)$$

$$C_g(\varepsilon, S^g) = \frac{(P_a + P_v) \varepsilon S^g}{R T} \quad (3.12)$$

### 3.1.3.2 Densidad del gas y aire

Al considerar la mezcla vapor-aire como un gas ideal, la densidad del aire, del vapor y del gas, se calcula a partir de la siguiente ecuación.

$$\rho_{v,a,g} = \frac{P P M}{R T} \quad (3.13)$$

Sin embargo, en para un medio poroso es necesario expresar la densidad del aire y del vapor lo en términos de porosidad y saturación tenemos:

$$\rho_g(\varepsilon S^g) = \frac{P_g P M \varepsilon S^g}{R T} \quad (3.14)$$

De igual forma la densidad del aire se obtienen a

$$\rho_v = \frac{P_v P M_v \varepsilon S^g}{R T} \quad (3.15)$$

### 3.1.4 Presión total del gas.

Por definición, la presión es una magnitud de una fuerza que actúa normal a la superficie por unidad de área. Es también una energía por unidad de volumen (Pinder and Gray, 2008). A bajas presiones, puede tenerse una aproximación conveniente de un gas o mezcla de gases como un gas ideal, con error despreciable. La mezcla de aire seco y vapor de agua puede tratarse como un gas ideal, con un error menor de 1%. La presión total de una mezcla de gases,  $P$ , es igual a la suma de las presiones parciales  $P_i$  de los gases que estén en esa mezcla, por separado.

En este caso, a  $P_i$  se le conoce como presión parcial de la especie  $i$ , la cual es la presión que la especie  $i$  ejercería si existiera sola a la temperatura de la mezcla, en el mismo volumen (Çengel and Ghajar, 2011).

Esto se conoce como ley de Dalton de las presiones aditivas y se expresa como:

$$P_g = P_a + P_v \quad (3-16)$$

Donde la presión del aire se calcula por medio de la ley de gases ideales.

$$P_a = \frac{\rho_a R T}{P M_a} \quad (3-17)$$

### 3.1.5 Presión de vapor

La presión de vapor es importante para determinar la presión total del gas en el interior de la matriz porosa así como la tasa de evaporación en la superficie. Generalmente la presión puede ser caracterizada en términos e tres rangos de contenido de humedad. Cuando el material tiene alto contenido de humedad, la presión de vapor obedece la ecuación de Antoine, la cual es solo función de temperatura. A medida que el material se seca se reduce la presión de vapor, cuando la presión de vapor es menor que la presión capilar, la isothermas son indispensables.

**Ecuación de Antoine:** 
$$P_{sat} = 10^{A - \frac{B}{C+T}} \quad (3-18)$$

**Presión de vapor:** 
$$P_v = (a_w(W, T))(P_{sat}) \quad (3-19)$$

La ecuación ( 3.19) es válida en contenidos de humedad inferiores o iguales al contenido de humedad crítico (zona higroscópica del secado), cuando el contenido de humedad es superior al contenido de humedad crítico (zona no higroscópica) la actividad de agua es uno y la presión de vapor es igual a la presión de saturación.

**Presión de vapor:** 
$$P_v = (P_{sat}) \quad (3-20)$$

### 3.1.6 Actividad de agua

La actividad de agua es un término usado para indicar la relación entre el alimento y la humedad relativa en equilibrio de la atmosfera que lo rodea. La humedad relativa que se obtiene cuando una sustancia se sella en un recipiente y se deja llegar al punto de equilibrio se denomina humedad relativa en equilibrio o actividad de agua de la sustancia. La actividad de agua indica la facilidad relativa para eliminar agua de un producto durante la deshidratación.

Está generalmente aceptado que  $A_w$  se encuentra estrechamente relacionada con la contaminación microbiana, y las propiedades físicas de los alimentos y otros productos naturales que con el contenido de humedad total. Los cambios específicos en el color, aroma, sabor, textura, estabilidad, y la aceptabilidad de los productos alimenticios procesados y sin procesar se han asociado con rangos relativamente característicos de la  $A_w$ . Después de la temperatura, la  $A_w$  es considerada uno de los parámetros más importantes en la conservación y elaboración de alimentos (Barbosa-Canovas *et al.*, 2008)

La presión también tiene un efecto sobre la  $A_w$  de un sistema, pero su efecto es pequeño comparado con el efecto de la temperatura. En la mayoría de los casos, el efecto de la presión puede considerarse despreciable a menos que se usan presiones elevadas, como en el caso de un proceso de extrusión. El efecto termodinámico de la presión sobre la actividad fue discutido por diversas investigaciones y muestra que un cambio en la presión total del sistema afectará a la presión de vapor. En el equilibrio, cualquier cambio en el potencial químico del estado líquido será igual a un cambio en el potencial químico del vapor (Barbosa-Canovas *et al.*, 2008).

Por lo tanto, comenzando con el punto del potencial químico del agua y el estado de vapor de equilibrio:

$$d\mu_l = V_l dP_t = d\mu_v = V_v dP_v \quad (3.21)$$

Donde  $V_l$  y  $V_v$  son las fracciones molares del líquido y el vapor respectivamente, y  $dP_t$  y  $dP_v$  son el gradiente de presión total y el gradiente de vapor respectivamente.

Reescribiendo la ecuación anterior, tenemos la ecuación que nos brinda el efecto de la presión en la actividad de agua.

$$\ln \frac{a_1}{a_2} = \frac{V_l}{RT} [P_2 - P_1] \quad (3.22)$$

### 3.1.7 Fracción mol del vapor

$$x_v + x_a = 1 \quad (3.23)$$

La ley de Raoult establece que la presión parcial de un disolvente en una disolución  $P_1$ , esta dado por la presión del vapor del disolvente puro  $P_1^0$ , multiplicado por la fracción molar del disolvente en la disolución.

$$P_1 = x_1 P_1^0 \quad (3.24)$$

La presión de vapor de una disolución es la suma de las presiones parciales individuales. La ley de Raoult también se cumple en este caso.

$$P_a = x_a P_a^0 \quad (3.25)$$

$$P_v = x_v P_v^0 \quad (3.26)$$

Donde  $P_a$  y  $P_v$  son las presiones parciales de los componentes vapor y aire de la disolución;  $P_a^0$  y  $P_v^0$  son las presiones de vapor de las sustancias puras,  $x_a$  y  $x_v$ , son sus fracciones molares. La presión total está dada por la ley de Dalton de las presiones parciales.

$$P_T = P_v + P_a \quad (3.27)$$

O bien

$$P_T = x_a P_a^0 + x_v P_v^0 \quad (3.28)$$

### 3.1.8 Difusividad binaria y efectiva

En ausencia de datos experimentales la difusividad en gases a bajas presiones se puede calcular con la relación empírica de Fuller, Schettler y Giddings.

$$D_{bin} = \frac{0.001 T^{1.75} \left( \frac{1}{PM_a} + \frac{1}{PM_v} \right)^{0.5}}{P \left[ (\sum V_a)^{\frac{1}{3}} + (\sum V_v)^{\frac{1}{3}} \right]^2} \quad (3.29)$$

Donde  $\sum V_a$  y  $\sum V_v$  son los volúmenes de difusión para moléculas simples. Los cuales, tienen valores de 20.1 y 12.7 respectivamente. La difusividad binaria está dada en ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ), la temperatura en (K), presión (atm).

En el secado de un medio poroso es necesario definir la difusión en términos de un coeficiente de difusión efectivo. El cual, debe ser capaz de expresar la disminución de la difusión acusada por la presencia de la fase sólida. Esto puede lograrse asumiendo que el coeficiente de difusión efectivo puede obtenerse multiplicando el coeficiente de difusión binario por la porosidad. Además, el aumento de la longitud de la trayectoria de difusión se explica incluyendo el coeficiente de tortuosidad ( $T^*$ )

$$D_{eff} = \frac{D_{bin} \epsilon}{T^*} \quad (3.30)$$

Cuando está presente en el medio poroso un líquido inmóvil, el coeficiente de difusión efectivo se reduce más al tener en cuenta el bloqueo debido a la presencia de la fase líquida. Esta obstrucción se considera mediante la inclusión de la saturación de fase de gas (fracción de volumen de poros ocupado por gas).

$$D_{eff} = \frac{D_{bin} \epsilon Sat}{T} \quad (3.31)$$

## 3.2 Principales mecanismos de transporte en tubérculos

### 3.2.1 Difusión capilar

La fuerza impulsora en el transporte de agua libre de un medio poroso es la presión, la cual es descrita por la ley de Darcy (Datta, 2007a). Sin embargo, el secado de alimentos es un proceso complejo y las investigaciones que analizan la presión capilar durante el secado de papa es limitada. Los métodos usuales para medir la presión capilar no pueden ser aplicados a tejidos blandos como la papa, y requieren de algunas modificaciones importantes debido a que son materiales no homogéneos y se deforman a las

altas presiones (Halder *et al.*, 2011). Datta (2007a) utiliza el término de difusividad capilar, el cual es usado en la ecuación de flux de agua libre, es importante notar que a pesar que el termino difusividad es utilizado para describir el movimiento del líquido a través de un sólido, el mecanismo de transporte principal es la capilaridad no la difusión molecular (Datta, 2007a). La difusividad capilar es deducida a partir de convección del líquido (la ley de Darcy) de la siguiente manera (Gulati and Datta, 2015):

$$J_l = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \nabla P_l \quad (3.32)$$

Donde, la presión del agua libre es la diferencia de la presión del gas y la presión crítica.

$$P_l = P_g - P_c \quad (3.33)$$

$$J_l = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \nabla (P_g - P_c) \quad (3.34)$$

$$J_l = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \nabla P_g + \rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \nabla P_c \quad (3.35)$$

$$J_l = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \nabla P_g + \rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial C_w} \nabla C_w \quad (3.36)$$

$$J_l = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \nabla P_g - D_{w,cap} \nabla C_w \quad (3.37)$$

Donde,  $k_l$  es la permeabilidad del líquido,  $\rho_l$  la densidad del líquido,  $\mu_l$  viscosidad dinámica del líquido. El segundo término de la ecuación 3-13 es definido como difusión capilar en términos del coeficiente de difusividad capilar  $D_{w,cap} = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial C_w}$ . Para procesos de secado lento, la presión del gas  $P_g$ , en el interior del material es cercana a la presión atmosférica del medio y ningún flujo incrementa debido a los gradientes en la presión del gas por lo cual, puede asumirse pequeña y despreciable. (Dhall and Datta, 2011). En este caso el flux neto de agua líquida es dado solo por difusividad capilar.

$$J_l = -D_{w,cap} \nabla C_w \quad (3.38)$$

Donde el coeficiente de difusividad capilar es calculado por la ecuación 3-15. La cual, fue desarrollada por Ni (1993), suponiendo que la difusividad efectiva se relaciona con el contenido de humedad total y por lo tanto con el flujo capilar del líquido y el flujo difusivo del vapor juntos. Por lo cual, la difusividad efectiva es parecida a la difusividad capilar, cuando el material aún es muy húmedo y la difusión de vapor es insignificante. La ecuación 3-15 es utilizada en los trabajos de Gulati and Datta (2015); Datta (2007b); Datta (2007a) para determinar el coeficiente de difusión capilar.

$$D_{l, cap} = 10^{-8} \exp(-2.8 + 2M) \quad (3.39)$$

Sin embargo de acuerdo a Datta (2006), el flux causado por gradientes de presión no pueden ser globalizados en un coeficiente de difusividad efectiva. La permeabilidad es una propiedad del material, necesaria para describir correctamente el flux impulsado por gradientes de presión (ley de Darcy). La permeabilidad, es un parámetro de los modelos mecánicos y generalmente no está disponible para alimentos.

Datta (2006), mide por primera vez la permeabilidad intrínseca de la papa, encuentra valores de permeabilidad en un rango de  $10^{-17} - 10^{-19} \text{ m}^2$ .

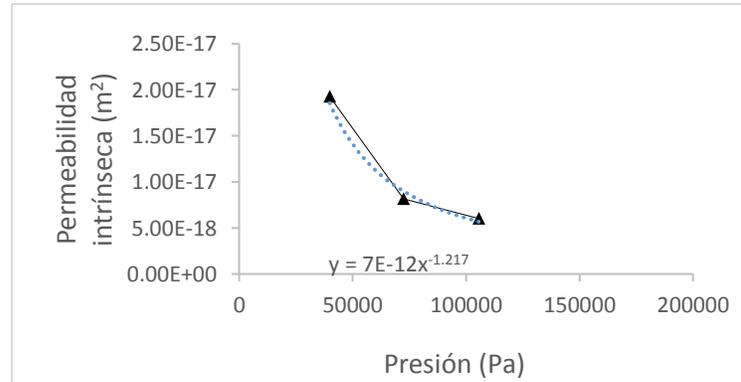


Figura 3.1 Permeabilidad de agua en papa cruda (Datta, 2006)

$$k_l = 7 \times 10^{-12} P^{-1.217} \quad (3.40)$$

Por otro lado, para una adecuada predicción del transporte de agua en alimentos se requiere conocimiento de las propiedades de transporte y su dependencia con la estructura del material.

Halder *et al.* (2011), propone la existencia de dos mecanismos de transporte en tejidos celulares, intracelular y extracelular, los cuales dependen de la temperatura. En el transporte intracelular las células permanecen intactas mientras en el transporte extracelular las células presentan daño en su estructura. En papa el principal tipo de transporte es intracelular a bajas temperaturas (22-50°C), mientras a altas temperaturas predomina el transporte extracelular.

El transporte de humedad tiene lugar debido a los gradientes de potencial de agua entre la célula y los espacios intracelulares. El cálculo del flux de agua desde el interior de la célula hacia el exterior. El potencial de agua (fuerza motora del transporte de agua) adentro y afuera de la célula puede expresarse como:

$$\phi_{l,intra} = \phi_{l,0} + R_g T \ln(a_{w,intra}) \quad (3.41)$$

$$\phi_{l,extra} = \phi_{l,0} + R_g T \ln(a_{w,extra}) \quad (3.42)$$

Por lo cual, el gradiente de potencial hidráulico que controla el flux desde el interior de la célula hacia el exterior está dado por:

$$\Delta\phi_l = R_g T \ln(a_{w,intra}) - R_g T \ln(a_{w,extra}) \quad (3.43)$$

La relación de actividad de agua ( $a_w$ ) y contenido de humedad (M) a temperatura constante se conoce como isoterma desorción.

La diferencia de presión causada por el potencial hidráulico puede ser expresado como:

$$\Delta P_l = \frac{R_g T}{V_l} \ln(a_{w,intra}) - \frac{R_g T}{V_l} \ln(a_{w,extra}) \quad (3.44)$$

En donde  $P_l$  es la presión capilar del alimento, pero su efecto puede ser globalizado. Asumiendo un flujo tipo Darcy, el flux de agua el flux líquido a través del tejido puede ser expresado como:

$$J_l = -\rho_l \frac{k_{eff} \Delta P_l}{\mu_l \Delta x} \quad (3.45)$$

Donde  $k_{eff}$  es la permeabilidad efectiva del material (un parámetro global que incluye los efectos de transporte a través de las paredes celulares, membranas y espacios intracelulares). La ecuación anterior es análoga a la ecuación de flux hidráulico  $J_l = \rho_l L_l (\Delta P_l)$ , comúnmente utilizada en el campo de fisiología de plantas. La relación entre la conductividad hidráulica ( $L_l$  utilizada en fisiología de plantas) y permeabilidad es:

$$L_l = \frac{k_{eff}}{\mu_l \Delta x} \quad (3.46)$$

Como se mencionó anteriormente, para papa la permeabilidad se ha reportado en el orden de  $10^{-18} \text{ m}^2$ . La cual, representa la permeabilidad a través de la longitud de los poros en la vía intracelular. Para membranas celulares, la permeabilidad en papa se ha reportado como  $10^{-24} \text{ m}^2$  (convertido a  $L_l=10^{-13} \text{ m s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$ ).

En la mecánica del medio continuo, el flux no saturado en un medio poroso, el flux dado por la ecuación 3-21 es reescrito en términos de gradientes de concentración como:

$$J_1 = -\rho_1 \frac{k_{eff}}{\mu_1} \frac{\Delta P_1}{\Delta c_1} \frac{\Delta c_1}{\Delta x} = -D_1 \nabla c_1 \quad (3.47)$$

Donde  $D_1$  es la difusividad capilar (no difusividad molar) de agua a través de la membrana celular y puede obtenerse a partir de la ecuación anterior.

$$D_1 = \rho_1 \frac{k_{eff}}{\mu_1} \frac{\Delta P_1}{\Delta c_1} = \rho_1 \frac{k_{eff}}{\mu_w} \frac{\partial P_1}{\partial c_1} \quad (3.48)$$

En la práctica,  $D_1$  es tratada como una difusividad efectiva, que involucra todos los mecanismos de transporte, incluida la capilaridad. La ecuación anterior muestra que  $D_1$  depende de la permeabilidad, basado en los párrafos anteriores, la permeabilidad en las membranas celulares es controlada por la resistencia a bajas temperaturas durante el secado. La permeabilidad relevante en el cálculo de la difusividad capilar es la permeabilidad de membranas celulares. Utilizando la isoterma desorción para papa y la permeabilidad de la membrana celular se obtuvo un valor para la difusividad capilar de  $10^{-11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Resumiendo la ecuación de flux líquido que se utiliza en este trabajo es la siguiente:

$$\mathbf{J}_1 = -D_1 \nabla c_1 \quad (3.49)$$

### 3.2.2 Difusión de vapor

La ley de Fick de la difusión, que establece que el flujo másico de un componente por unidad de área es proporcional al gradiente de concentración. Por tanto

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = -D \frac{\partial C_A}{\partial x} \quad (3-50)$$

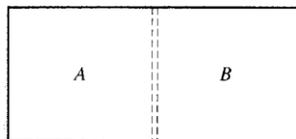
Dónde:

$D$  = coeficiente de proporcionalidad de difusión constante,  $m^2/s$

$\dot{m}_A$  = flujo másico,  $kg/s$

$C_A$  = concentración másica por unidad de volumen del componente A,  $kg/m^3$

Podría escribirse una expresión análoga a la ecuación para la difusión del componente A en cualquiera de las direcciones y o z.



*Figura 3.2 Difusión del componente A en el componente B*

Nótese la analogía entre la ley de Fick y la ley de Fourier de la conducción de calor y la ecuación de los esfuerzos cortantes entra capas fluidas. La ecuación de la conducción de calor describe el transporte de energía, la ecuación del esfuerzo cortante viscoso describe el transporte de cantidad de movimiento a través de capas fluidas, y la ley de difusión describe el transporte de masa.

Para entender el mecanismo físico de la difusión, considérese el plano imaginario mostrado por la línea de trazos de la Figura 3.2. La concentración del componente A es mayor a la izquierda de este plano que a la derecha. Una concentración mayor significa que hay más moléculas por unidad de volumen. Si el

sistema es un gas o un líquido, las moléculas se mueven. De modo aleatorio, y cuanto mayor sea la concentración, más moléculas atravesarán el plano por unidad de tiempo. Así, en media, se mueven más moléculas de izquierda a derecha a través del plano que en sentido opuesto. El resultado es una transferencia neta de masa desde la región de concentración alta a la región de concentración baja. El hecho de que las moléculas colisionen unas con otras influye fuertemente en el proceso de difusión. En una mezcla de gases, existe una diferencia clara entre una colisión entre moléculas iguales y una colisión entre moléculas distintas. La colisión entre moléculas iguales no altera apreciablemente el movimiento molecular básico, puesto que las dos moléculas son idénticas y no existe diferencia si una u otra molécula atraviesa el plano. La colisión entre dos moléculas distintas, es decir, moléculas A y B, puede dar como resultado que la molécula B cruce un plano en particular en lugar de la molécula A. En general, las moléculas pueden tener masas diferentes; por tanto, la colisión influiría en la transferencia de masa. Utilizando la teoría cinética de gases es posible predecir analíticamente las velocidades de difusión de algunos sistemas, teniendo en cuenta el mecanismo de colisión y las masas molares de los componentes gaseosos. En gases, las velocidades de difusión dependen claramente de la velocidad molecular y, en consecuencia, debería esperarse una dependencia del coeficiente de difusión con la temperatura, ya que la temperatura indica la velocidad molecular media (Holman *et al.*, 1998).

### 3.2.3 Convección del líquido o gas (ley de Darcy)

La ley de Darcy establece que para un sistema determinado la velocidad de flujo es directamente proporcional a la caída de presión (McCabe *et al.*, 2007). Esta ley rige el movimiento del agua en medios porosos y se expresa como:

$$Q = kA \frac{dh}{L} \quad (3-51)$$

Donde Q= gasto que circula, k es la constante de proporcionalidad dependiendo del medio poroso, A es el área transversal del flujo, dh es la variación de la carga hidráulica en la dirección del flujo y L es la longitud recorrida por el flujo (Sosa. *et al.*, 2004) .

### 3.3 Condición límite

Con el fin de calcular las constantes arbitrarias involucradas en la solución de una ecuación diferencial (ecuaciones de balance), es necesario establecer n-condiciones límite para cada n-orden de la derivada con respecto al espacio o al tiempo. Antes de formular un modelo matemático es crucial definir las fronteras del sistema. El objetivo de las fronteras es explicar el comportamiento del sistema en relación con sus alrededores (Rasmuson *et al.*, 2014).

Una condición límite adecuada debe ser deducida a partir de principios físicos asociados con el proceso particular. Estos principios físicos son por general enunciados matemáticos que muestran que la variable dependiente en la frontera se encuentra en equilibrio, o si un mecanismo de transporte está teniendo lugar; que el flujo es conservado en la frontera. Otro tipo de condiciones límite utiliza coeficientes interfaciales de transporte, que expresan el flux como el producto de un coeficiente de transporte en la interfase y algún tipo de fuerza motora (Rasmuson *et al.*, 2014).

La transferencia entre un medio y sus alrededores se describe generalmente por coeficientes de transporte. Los cuales son teóricamente determinados por medio de la hipótesis de la capa límite (Erriguible *et al.*, 2007).

### **3.3.1 Análisis de la condición frontera en vacío**

Una de las principales dificultades al simular el secado al vacío de un medio poroso, consiste en modelar con exactitud la frontera. Algunas investigaciones se han centrado en utilizar diferentes enfoques para describir la transferencia entre el producto y sus alrededores como el modelo de Hernández (1991) quien propuso identificar diferentes coeficientes para distintas condiciones de vacío. Otro ejemplo es el de Temmar (1994) quien utilizó coeficientes de transferencia calculados a partir de correlaciones de convección natural, en contraste con Chakir (1993) que prefirió establecer el equilibrio de humedad del producto con el ambiente por medio de una isoterma de desorción. Mientras que Baixeras (1995) cálculo el flux másico haciendo un balance macroscópico en la cámara de vacío, la presión total en la interfase se estableció como la presión de vapor. Por otro lado, Sebastian and Turner (1994) propusieron el concepto de capa de transición el cual definieron como: el espesor del producto donde se observa la diferencia de presión entre el centro del producto y la cámara de secado. Erriguible *et al.* (2007), resolvió las ecuaciones de conservación en la cámara y las ecuaciones de transporte interno del medio poroso transformándolo al medio continuo por medio del volumen promedio.

A diferencia del secado convectivo, durante el secado al vacío, no existe efecto cortante respecto a la superficie de la matriz porosa como se muestra a continuación.

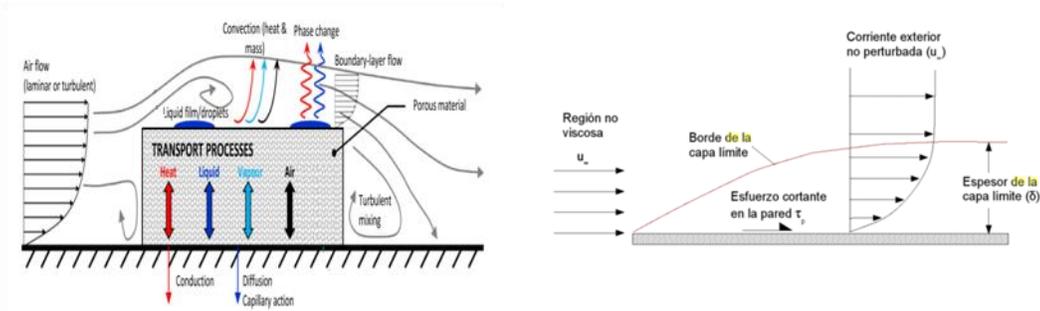


Figura 3.3 Esquema de secado convectivo y capa límite

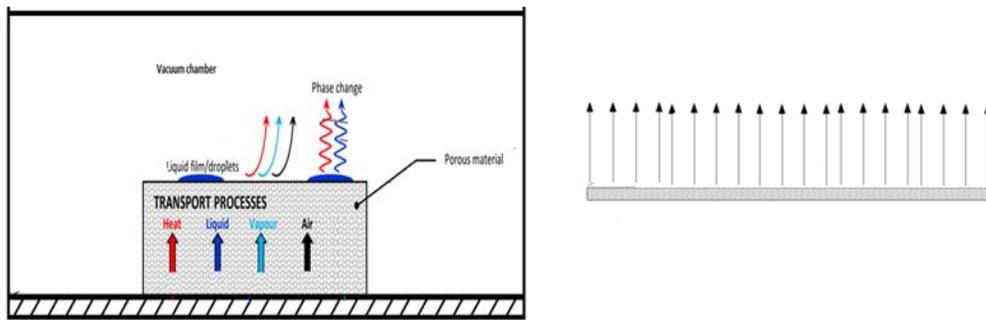


Figura 3.4 Esquema de secado al vacío

En la Figura 3.3 se observa un sistema convectivo. En el cual, una corriente de fluido se mueve en bloque sobre una pared sólida, el fluido se adhiere al sólido en la interface sólido-fluido. La adhesión es resultado de los campos de fuerza en el límite, que son también la causa de los esfuerzos cortantes entre el sólido y el fluido. Por consiguiente, si la pared está en reposo con respecto al marco de referencia elegido para el sistema sólido-fluido, la velocidad del fluido en la interface es cero. Como a distancias mayores del sólido la velocidad no es cero, es posible que haya variaciones en la velocidad de un punto a otro dentro de la corriente en movimiento. Por lo tanto, la velocidad en un punto cualquiera es una función de las coordenadas espaciales de ese punto, y existe un campo de velocidad en el espacio ocupado por el fluido. En un punto determinado, la velocidad también puede variar con el tiempo (McCabe *et al.*, 2007).

La Figura 3.4 corresponde a un sistema de secado al vacío en el cual, no existe un campo de velocidad sobre la matriz sólida. Al no existir un campo de velocidad, no se presentan fuerzas de cizallamiento con respecto a la superficie. De acuerdo con Crane (1987) una medida de la resistencia de un fluido en movimiento al esfuerzo cortante es la viscosidad. Si no se desarrolla el esfuerzo cortante en la superficie

no existe un perfil de velocidad y la viscosidad no provoca la condición de no deslizamiento. Al no existir la condición de no deslizamiento, la teoría de la capa límite no es válida en un proceso al vacío.

La componente normal de una fuerza que actúa sobre una superficie, por unidad de área, se llama esfuerzo normal, y la componente tangencial de una fuerza que actúa sobre una superficie, por unidad de área, se llama esfuerzo cortante. En un fluido en reposo, el esfuerzo normal se llama presión. Las paredes del recipiente no ejercen el esfuerzo cortante al fluido en reposo y, de este modo, un fluido en reposo se encuentra en un estado de cero esfuerzos cortantes (Çengel *et al.*, 2006).

En este trabajo se considera que durante el secado al vacío, sólo existe el esfuerzo normal a la superficie. Por lo cual, la variable presión es característica del sistema y se estudiara a detalle a continuación.

La presión y la temperatura son propiedades dependientes para las sustancias puras, durante los procesos de cambio de fase, existe una correspondencia uno a uno entre estas propiedades. A una presión determinada, la temperatura a la cual una sustancia pura cambia de fase se conoce como temperatura de saturación  $T_{sat}$ . De manera semejante, a una temperatura dada, la presión a la cual una sustancia pura cambia de fase se llama presión de saturación  $P_{sat}$ .

La presión de vapor  $P_v$  de una sustancia pura se define como la presión ejercida por su vapor en equilibrio de fases con su líquido a una temperatura dada,  $P_v$  es una propiedad de la sustancia pura y resulta ser idéntica a la presión de saturación  $P_{sat}$  del líquido ( $P_v = P_{sat}$ ). Se debe tener cuidado en no confundir la presión de vapor con la presión parcial. La presión parcial se define como la presión de un gas o vapor en una mezcla con otros gases. Por ejemplo, el aire atmosférico es una mezcla de aire seco - vapor de agua, y la presión atmosférica es la suma de la presión parcial del aire seco y la presión parcial del vapor de agua (Çengel *et al.*, 2006). La figura, muestra las diversas presiones que contribuyen al sistema.

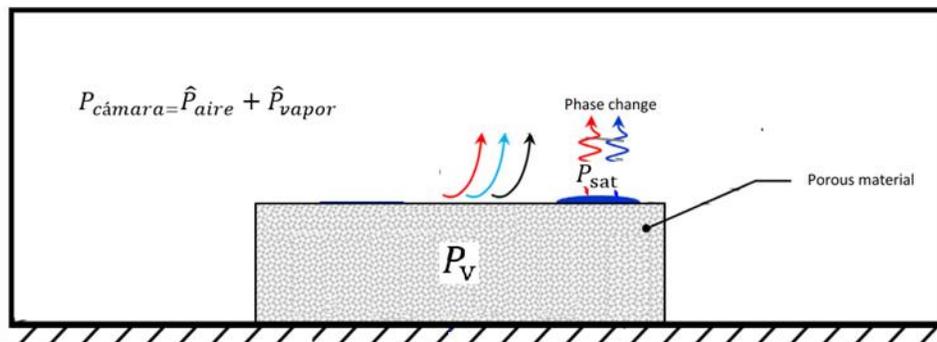


Figura 3.5 Esquema de secado al vacío en un medio poroso

La presión en la cámara es directamente proporcional a la suma de la presión parcial de vapor y presión parcial del gas. Al disminuir la presión de la cámara disminuyen las presiones parciales. La diferencia entre la presión de vapor y la presión parcial de vapor es menor. De acuerdo a Çengel *et al.* (2006) la rapidez de evaporación es controlada por la diferencia entre la presión de vapor y la presión parcial. La disminución del gradiente de presión entre la matriz porosa y el medio, provoca que la tasa de evaporación sea mayor y el equilibrio se alcance rápidamente.

Para comprender mejor los fenómenos físicos que ocurren durante el secado al vacío, es necesario distinguir entre evaporación y ebullición. Durante la evaporación, la presión de vapor es menor que la presión total y las burbujas no se forman en el interior de líquido, por lo tanto la evaporación es un fenómeno superficial. En el punto de ebullición, sin embargo, la presión de saturación es igual que la presión total, y las burbujas pueden formarse en el interior del líquido (dentro de la matriz porosa) y elevarse, por lo que la vaporización se convierte en un fenómeno que ocurre en todo el volumen (Chen and Mujumdar, 2009).

Con base en lo anterior, se propone que el principal mecanismo de transferencia de calor y masa en un sistema sometido a bajas presiones es la evaporación.

Con respecto a la condición frontera existen dos panoramas:

1. Que la presión de vapor sea distinta a la presión total, con lo cual, la evaporación es un fenómeno superficial.
2. Que la presión de vapor sea igual a la presión total, con lo cual, la evaporación es un fenómeno que involucra todo el dominio, también conocida como evaporación interna.

En el primer caso, se utiliza una condición frontera de generación, la cual de acuerdo a (Plawsky, 2014) es utilizada cuando existe un cambio de fase e involucra que el flux no pasa a través de la interfase pero se genera en él. En este caso el flux de calor generado en la frontera es causado por la liberación de calor latente. Este tipo de condición frontera para transporte de calor está ligada con la transferencia de masa, ya que es necesario conocer el flux de calor total para determinar qué cantidad de materia puede ser evaporada en la superficie.

Por lo cual, se puede decir que la evaporación en la superficie está relacionada con los parámetros, presión de vapor, presión de saturación, presión total, calor latente, temperatura y transferencia de masa.

En el contexto del primer panorama, se tiene una temperatura específica en el fondo del dominio y pérdida de calor en la superficie vía evaporación. La condición frontera en contacto con el medio,

involucra el calor transferido a través de la matriz porosa con la evaporación en la superficie. El flux másico de evaporación es  $\dot{m}$  en  $(kg\ m^{-2}s^{-1})$ , y cada kilogramo de fluido evaporado consume  $h_v$  Joule de calor.

## CAPÍTULO 4

### 4. Desarrollo del modelo matemático

En esta sección se presenta el desarrollo de un modelo matemático unidimensional de secado al vacío por contacto de tubérculos. El modelo acopla en la transferencia de calor y masa con la bomba de vacío. El material es tratado como un medio poroso que contiene agua líquida y gas.

Uno modelo matemático consta de las siguientes partes: geometría, dimensión, condición inicial, ecuaciones de balance, ecuaciones de flujo y de condición frontera (Bear and Cheng, 2010). Este trabajo intenta simular la migración de humedad y la transferencia de calor en un material sometido a condiciones de secado por debajo de la presión atmosférica.

Con respecto a las ecuaciones constitutivas y parámetros constantes involucrados en el modelo, estos se dividirán en dos: los que alimentan a las ecuaciones de balance (incluidos los que alimentan el flux) y los que alimentan a las ecuaciones utilizadas para describir la frontera.

#### 4.1. Balance de masa

En el análisis fenomenológico de un proceso de secado, es importante conocer el contenido de humedad y temperatura como una función del tiempo y el espacio. Estas cantidades pueden ser determinadas por la aplicación de leyes físicas apropiadas, tales como la ecuación de continuidad así como las leyes de conservación de materia y energía.

La ecuación de continuidad o de transporte de masa se representa con la ecuación ( 4.1), donde el operador divergente  $\nabla \cdot$  es igual a  $\frac{\partial}{\partial x}$  para un sistema unidimensional.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \quad (4.1)$$

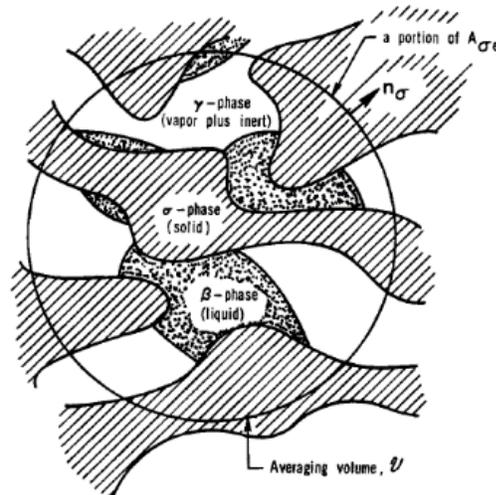


Figura 4.1 Proceso de secado en un medio poroso

Sin embargo, al considerar el enfoque propuesto por Whitaker (1977), en el cual, el movimiento de un líquido y su vapor en un medio poroso está formado por tres fases. La Figura 4.1 muestra las diversas fases donde,  $\sigma$  representa la fase de la matriz sólida,  $\beta$  la fase líquida y  $\gamma$  la fase gas formada por vapor y algún componente inerte (usualmente aire). Por lo anterior la ecuación (4.1) debe reescribirse como lo indica la ecuación (4.5), donde el flux total es la suma de los fluxes líquido y gas. El flux del gas se compone a su vez del flux de aire y el flux de vapor.

En resumen es posible escribir la ecuación de continuidad para cada una de las fases involucradas en la transferencia de masa de la siguiente forma.

Para la fase gas (g), formada por la mezcla vapor- aire tenemos:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a^g \vec{V}_a) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v^g \vec{V}_v) = \dot{m} \quad (4.3)$$

Para la fase líquida

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \vec{V}_l) = -\dot{m} \quad (4.4)$$

Donde  $\dot{m}$  representa la tasa de evaporación y  $\rho_i \vec{V}_i$  el flux de cada componente con unidades de  $\frac{Kg}{m^2 s}$ . Para incluir todas las fases en una sola ecuación se utiliza la ecuación ( 4.5 ), donde  $\rho_{efectivo}$  es el promedio de las densidades de todas las fases y  $J_{total}$  representa la suma de todos los fluxes.

$$\frac{\partial \rho_{efectivo}}{\partial t} + \nabla J_{total} = 0 \quad (4.5)$$

Es importante destacar que en las ecuaciones anteriores la variable primera o variable a resolver es densidad  $\rho$ . Por otro lado como se mencionó, para el proceso de secado es de interés conocer los perfiles de contenido de humedad base seca (M), por lo cual la variable primaria debe ser (M). Las fases que se consideran para este propósito son, agua libre y vapor de agua tal como se muestra en la ecuación ( 4.6 ). El balance de aire se realiza por separado como se muestra en la ecuación

( 4.7 ).

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \frac{1}{\rho_s} (J_{liquido} + J_{vapor}) = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \rho_{aire}}{\partial t} + \nabla (J_{aire}) = 0 \quad (4.7)$$

En la ecuación ( 4.6 ), el contenido de humedad base seca (M) es adimensional ( $kg_{agua} kg_{solido seco}^{-1}$ ). Al derivar (M) con respecto al tiempo se obtienen las unidades del primer término de la ecuación, las cuales son ( $s^{-1}$ ). Para sumar dos términos en una ecuación estos deben tener las mismas unidades. Con respecto al segundo término de la ecuación, este contiene al flux con

unidades de  $(kg\ m^{-2}s^{-1})$ . Al derivar el flux con respecto a la posición se obtienen unidades de  $(kg\ m^{-3}s^{-1})$ , las cuales no son aditivas con el primer término. Para que las unidades del primer y segundo término de la ecuación ( 4.6 ) sean dimensionalmente homogéneas, el segundo debe ser multiplicado por el inverso de la densidad del sólido. Al multiplicar el segundo término por el inverso de la densidad del sólido, involucra que la concentración de los fluxes líquido y vapor deba tener unidades de densidad. La operación anterior da como resultado obtener homogeneidad dimensional y la concentración en términos de contenido de humedad.

#### 4.2. Ecuación de conservación de energía

Debido a que se asumen condiciones de equilibrio térmico, se resuelve solo un balance de energía para la mezcla. La conservación de energía incluye convección debido al movimiento de las fases, conducción de calor y enfriamiento evaporativo causado por el cambio de fases.

$$\rho_{eff} C_{p_{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + [(J_l C_{p_l} + J_{v-a} C_{p_v} + J_a C_{p_a})] \nabla T + (h_v \dot{m}) - \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) = 0 \quad (4.8)$$

Donde  $\rho_{eff} C_{p_{eff}}$  está representado por la ecuación 3-20

$$\rho_{eff} C_{p_{eff}} = \rho_l C_{p_l} + \rho_v C_{p_v} + \rho_a C_{p_a} + \rho_s C_{p_s} \quad (4.9)$$

La conductividad térmica de la papa  $\lambda$  se obtiene por medio de la siguiente ecuación, la cual fue utilizada por (Wang and Brennan, 1995)

$$\lambda = 0.276 + 0.293 \log (M) \quad (4.10)$$

### 4.3. Ecuaciones de Flux

La descripción interna de transferencia de masas se relaciona con la descripción de la estructura del producto. Un factor importante es la presencia de poros, su tamaño, así como el nivel de interacción entre el agua y la materia seca. Los cuatro mecanismos de transporte fundamentales que intervienen en el movimiento de la humedad en el interior un material poroso son: Difusión de vapor, convección del líquido o gas por gradientes de presión (ley de Darcy), difusión capilar y evaporación-condensación (Ratti, 2008b). Algunos mecanismos de transporte aparecen en la Figura 4.2.

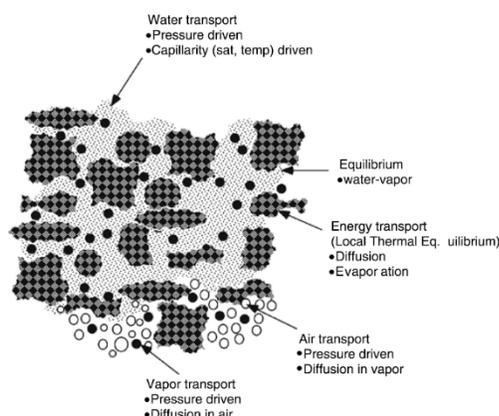


Figura 4.2 Fases de un medio poroso y mecanismos de transporte (Datta, 2007a)

#### 4.3.1 Flux líquido

La fuerza impulsora en el transporte de agua libre de un medio poroso es la presión, la cual es descrita por la ley de Darcy (Datta, 2007a). Sin embargo, el secado de alimentos es un proceso complejo y las investigaciones que analizan la presión capilar durante el secado de papa es limitada. Los métodos usuales para medir la presión capilar no pueden ser aplicados a tejidos blandos como la papa, y requieren de algunas modificaciones importantes debido a que son materiales no homogéneos y se deforman a las altas presiones (Halder *et al.*, 2011). Datta (2007a) utiliza el término de difusividad capilar, el cual es usado en la ecuación de flux de agua libre, es importante notar que a pesar que el término difusividad es utilizado para describir el movimiento del líquido a través de un sólido, el mecanismo de transporte principal es la capilaridad no la difusión molecular (Datta, 2007a). La difusividad capilar es deducida a

partir de convección del líquido (la ley de Darcy) (ver sección 2.6 del capítulo dos). La ecuación que la describe es la siguiente:

$$J_l = -D_{w,cap} \nabla C_w \quad (4.11)$$

Donde el coeficiente de difusividad capilar es calculado por la ecuación (4.12). La cual, fue desarrollada por Ni (1993), suponiendo que la difusividad efectiva se relaciona con el contenido de humedad total y por lo tanto con el flujo capilar del líquido y el flujo difusivo del vapor juntos. Por lo cual, la difusividad efectiva es parecida a la difusividad capilar, cuando el material aún es muy húmedo y la difusión de vapor es insignificante. La ecuación (4.12) es utilizada en los trabajos de Gulati and Datta (2015); Datta (2007b); Datta (2007a) para determinar el coeficiente de difusión capilar.

$$D_{l,cap} = 10^{-8} \exp(-2.8 + 2M) \quad (4.12)$$

Resumiendo la ecuación de flux líquido que se utiliza en este trabajo es la siguiente:

$$J_l = -D_l \nabla c_l \quad (4.13)$$

Para expresar la ecuación anterior en términos del dominio a modelar o sólido poroso, es necesario expresarla en términos de saturación y porosidad. Para lo cual, es necesario expresar la concentración de la forma siguiente:

$$\rho_l(\text{Sat}_l, \varepsilon) = \rho_l S^l \varepsilon = c_l \quad (4.14)$$

A continuación se explicaran cada uno de los parámetros involucrados en el cálculo del flux de vapor.

La ecuación de saturación relativa al líquido que se implementará en el modelo es la utilizada por Warning *et al.* (2012), mientras el valor de porosidad ( $\varepsilon$ ) en papa se encuentra reportado por (Gulati and Datta, 2015) con un valor de 0.88.

$$Sat_l = \frac{M(1 - \varepsilon)\rho_s}{\varepsilon\rho_w} \quad (4.15)$$

### 4.3.2 Flux de vapor

El flux de vapor de agua incrementa debido al flujo global de los gradientes de presión del gas y difusión binaria con el aire (Gulati and Datta, 2015).

$$J_v = -\rho_v \frac{k_g}{\mu_g} \nabla P - \left(\frac{C_g^2}{\rho_g}\right) M_v M_a D_{bin} \nabla x_v \quad (4.16)$$

Donde  $C_g$  es la concentración molar en  $\frac{mol}{m^3}$ , calculada a partir de la ecuación (3.11);  $\rho_g$  es la densidad del gas en  $\frac{kg}{m^3}$ , obtenida por la ley de los gases ideales ecuación (3.14);  $M_v$  es el peso molecular del vapor y  $M_a$  el del aire.  $D_{bin}$ , el coeficiente de difusión binario y  $x_v$  es la fracción mol.

### 4.3.3 Flux de aire

La ecuación de flux para el aire se describe por la ecuación 3-39

$$J_a = -\rho_a \vec{V}_a \quad (4.17)$$

El vector velocidad en el flux de aire en un medio poroso se describe por medio de la ley de Darcy. La cual, establece que la velocidad del gas es directamente proporcional al gradiente de presión de la fase gaseosa,  $\nabla P_g$  y a la permeabilidad. La ley de Darcy se representa matemáticamente en la siguiente ecuación.

$$\vec{V} = \frac{k_{papa}}{\mu_a} \nabla P_g \quad (4.18)$$

Por lo cual, el flux se calcula por medio de la siguiente ecuación

$$J_a = -\rho_a \frac{k_a}{\mu_a} \nabla P_g \quad (4.19)$$

Considerando el aporte difusivo tenemos:

$$J_a = -\rho_a \frac{k_a}{\mu_a} \nabla P_g - \left(\frac{C_g^2}{\rho_g}\right) M_v M_a D_{eff} \nabla x_a \quad (4.20)$$

A continuación se explicaran cada uno de los parámetros involucrados en el cálculo del flux de vapor.

La densidad del aire es la variable primaria o variable a resolver en la ecuación de balance de aire. Por lo cual, esta se calculara a partir de la ecuación de continuidad para aire. Mientras la permeabilidad es una propiedad del material (alimento), necesaria para una descripción mecanística del flujo conducido por la presión. La permeabilidad de papa se encuentra en un rango de valores de  $10^{-17} - 10^{-18} \text{ m}^2$  (Datta, 2006). La viscosidad del aire es  $1.9 \times 10^{-5} \text{ (Pa s)}$ .

Para el cálculo de la presión del gas se utilizan la ley de Raoult y la de Dalton. La primera expresa que la presión de un gas es igual a su fracción molar por la presión de saturación del componente puro.

$$\hat{P}_a = x_a P_a^{sat} \quad (4.21)$$

$$\hat{P}_v = x_v P_v^{sat} \quad (4.22)$$

Donde  $P_a$  y  $P_v$  son las presiones parciales de los componentes vapor y aire de la disolución;  $P_a^{sat}$  y  $P_v^{sat}$ , son las presiones de vapor de las sustancias puras y  $x_a$  y  $x_v$  son sus respectivas fracciones molares. Por otro lado, considerando la Ley de Dalton de las presiones parciales o aditivas, la presión del gas se obtiene mediante la suma de las presiones parciales del aire y del vapor.

$$P_g = \hat{P}_a + \hat{P}_v \quad (4.23)$$

$$P_g = x_a \hat{P}_a + x_v \hat{P}_v \quad (4.24)$$

Donde, la fracción molar del vapor puede despejarse de la presión parcial del vapor, obteniendo

$$x_v = \frac{\hat{P}_v}{P_g} \quad (4.25)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, la fracción molar de vapor es igual a la actividad de agua, por lo cual su valor puede obtenerse a partir de las curvas de desorción en papa.

Por otro lado, la suma de las fracciones molares de una mezcla es uno. Al conocer la fracción molar de vapor, es posible calcular la fracción molar de aire.

$$x_a = 1 - x_v \quad (4.26)$$

La presión del aire se calcula a partir de la ley de los gases ideales por medio de la siguiente ecuación.

$$\hat{P}_a = \frac{\rho_a R T}{P M_a} \quad (4.27)$$

Mientras la presión de vapor, se calcula por medio de la ecuación de Antoine.

$$\hat{P}_v = A_w P_{v,sat} = A_w 10^{A - \frac{B}{C+T}} \quad (4.28)$$

#### 4.4. Condición límite

De acuerdo a lo discutido en capítulo anterior, la evaporación en la superficie está relacionada con los parámetros, presión de vapor, presión de saturación, presión total, calor latente, temperatura y transferencia de masa.

En el contexto del primer panorama, se tiene una temperatura específica en el fondo del dominio y pérdida de calor en la superficie vía evaporación. La condición frontera en contacto con el medio, involucra el calor transferido a través de la matriz porosa con la evaporación en la superficie. El flux másico de evaporación es  $\dot{m}$  en  $(kg\ m^{-2}\ s^{-1})$ , y cada kilogramo de fluido evaporado consume  $h_v$  Joule de calor.

La velocidad del flux másico de evaporación se puede expresar como el producto de un coeficiente de transporte en la interfase y algún tipo de fuerza motora. La transferencia de calor está controlada por la cantidad de evaporación en la superficie. La fuerza motora para transferencia de masa es el gradiente de presión.

$$\dot{m} = \rho_l \frac{d\vec{V}}{dx} \quad (4.29)$$

$$\vec{V} = K_c \left( \frac{P_{sat} - \widehat{P}_v}{P_{total}} \right) \quad (4.30)$$

$$\dot{m} = \frac{\rho_l K_c}{P_{total}} (P_{sat} - \widehat{P}_v) \quad (4.31)$$

La condiciones límite de transferencia de masa son

$$\frac{1}{\rho_s} (J_{liquido} + J_{vapor}) \Big|_{x=L} = \frac{\dot{m}}{\rho_s} \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{\rho_s} (J_{\text{liquido}} + J_{\text{vapor}}) \Big|_{x=0} = \frac{m_{\text{placa}}}{\rho_s} \quad (4.33)$$

Para transferencia de calor tenemos que la tasa de calor eliminada por evaporación depende de la temperatura de la superficie y de la tasa de transferencia de masa. Como se puede observar, la velocidad de transferencia de masa y la temperatura de la superficie se encuentran acopladas.

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -(\dot{m})(h_v) \quad (4.34)$$

$$T|_{x=0} = T_{\text{placa}} \quad (4.35)$$

Como se expresó en las ecuaciones utilizadas para describir la superficie de un proceso de secado al vacío. La velocidad de flujo en la frontera es un proceso evaporativo, se genera un flux másico debido al cambio de fase.

Mientras, las condiciones fronteras para el balance de aire son

$$\rho_a|_{x=L} = \frac{P_{\text{cámara}} P M_a \varepsilon}{R T_{\text{sup}}} \quad (4.36)$$

$$J_a|_{x=0} = 0 \quad (4.37)$$

Las condiciones fronteras en la superficie descritas anteriormente, para transporte de humedad, aire y temperatura involucran la presión de la cámara de vacío. La cual, representa el vínculo entre la escala del material y la escala del secador.

Para determinar la presión de gas en la cámara ( $P_g^{\text{cámara}}$ ) es necesario conocer la densidad del vapor y del aire en la cámara. Con este fin se proponen dos ecuaciones diferenciales ordinarias, que se muestran a continuación.

Balance de masa en el secador (aire):

$$\frac{d\rho_a^{cámara}}{dt} = -\rho_a^{cámara} \frac{q_{bomba}}{V_{cámara}} + \rho_a^{atm} \frac{q_{fugas}}{V_{cámara}} \quad (4.38)$$

Balance de masa en el secador (vapor-agua)

$$\frac{d\rho_v^{cámara}}{dt} = -\rho_v^{cámara} \frac{q_{bomba} + q_{cond}}{V_{cámara}} + \rho_v^{atm} \frac{q_{fugas}}{V_{cámara}} + F_m \frac{A}{V_{cámara}} \quad (4.39)$$

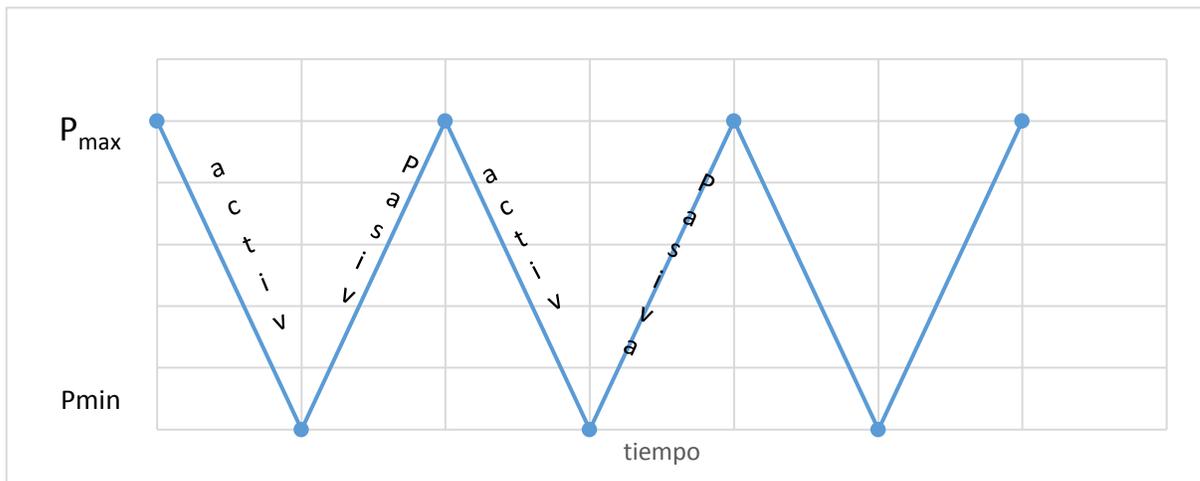
En estas ecuaciones la variable a resolver son la densidad del aire en la cámara y la densidad del vapor en la cámara respectivamente. Conociendo las densidades, es posible calcular sus presiones parciales con la ley de los gases ideales.

$$\hat{p}_a^{cámara} = \frac{\rho_a^{cámara} R T}{PM_a} \quad (4.40)$$

$$\hat{p}_v^{cámara} = \frac{\rho_v^{cámara} R T}{PM_a} \quad (4.41)$$

$$p_g^{cámara} = \hat{p}_a^{cámara} + \hat{p}_v^{cámara} \quad (4.42)$$

En donde se utilizara la siguiente restricción en COMSOL Multiphysics para apreciar la fase activa y pasiva causada por la activación y desactivación de la bomba.



#### 4.5. Condición inicial

La condición inicial establece el estado inicial del material, es decir nos indica a que temperatura o concentración se encuentra el material a  $t=0$ . Se establece una condición inicial para cada ecuación de balance a resolver. En este trabajo se resuelven balances de contenido de humedad, densidad de aire y temperatura.

Para el balance de energía, la condición inicial de temperatura es:

$$T_i = 25 \text{ °C} \tag{4.43}$$

La condición inicial para el balance de contenido de humedad es,

$$M = 4.5 \frac{\text{kg}_{\text{agua}}}{\text{kg}_{\text{s,s}}} \tag{4.44}$$

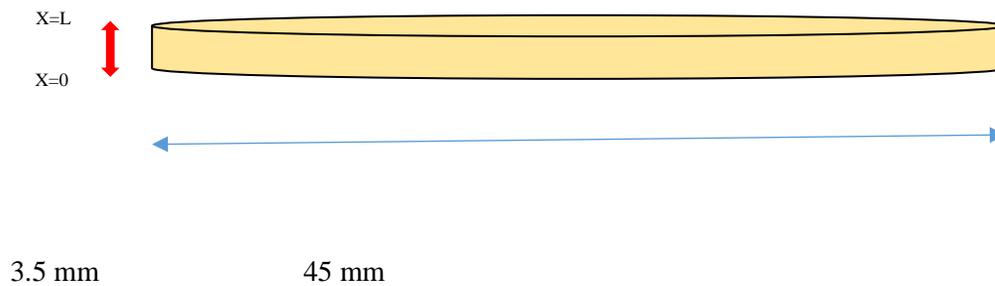
Mientras que la condición inicial para transporte de aire seco, es está representada por:

$$\rho_{a,\text{inicial}} = \frac{P_{a,\text{inicial}} \text{ PM}}{RT_{\text{inicial}}} \tag{4.45}$$

Donde la presión de aire inicial ( $P_{a_{inicial}}$ ) es la diferencia entre la presión de la cámara inicial y la presión de vapor inicial.

#### 4.6. Geometría

Las geometrías utilizadas fueron rodajas de papa de 35 mm de espesor por 45 mm de diámetro. Esta geometría es la misma que la utilizada por Fahloul *et al.* (2009), con el cual se compararan los datos simulados.



La cual pueden ser representadas unidimensionalmente por una línea recta.



#### 4.7. Resumen del modelo matemático

Suposiciones:

1. La papa es un medio poroso isotrópico que puede ser representado como un medio continuo.
2. La humedad al inicio del proceso está distribuida de manera uniforme en toda la muestra.
3. La una rodaja de papa de 3.5 mm de espesor por 45 mm de diámetro puede ser representada unidimensionalmente.
4. La mezcla de gas (vapor-aire) sigue un comportamiento ideal.
5. La gravedad es despreciable para la fase gas y líquida.

Tabla 4.1 Modelo matemático para contenido de humedad

$\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} c_l D_{l,cap} \right) + \left( \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial}{\partial x} P_g \rho_v + M_v M_a D_{eff} \frac{\partial}{\partial x} x_v \frac{C_g^2}{\rho_g} \right) \right] = 0$		
Condición inicial	Condición frontera en x=0	Condición frontera en x=L
$M_i = 5.3$	$\frac{1}{\rho_s} (J_l + J_v) \Big _{x=0} = \frac{m_{placa}}{\rho_s}$	$-K \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=L} = -(\dot{m}) (h_v)$

Tabla 4.2 Modelo matemático para densidad de aire

$\frac{\partial \rho_{aire}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \rho_a \frac{k_a}{\mu_a} \frac{\partial}{\partial x} P_g \right) + \left( M_v M_a D_{eff} \frac{\partial}{\partial x} x_a \frac{C_g^2}{\rho_g} \right) \right] = 0$		
Condición inicial	Condición frontera en x=0	Condición frontera en x=L
$\rho_{a, inicial} = \frac{P_{a, inicial} PM}{RT_{inicial}} =$	$J_a \Big _{x=0} = 0$	$\rho_a \Big _{x=L} = \frac{P_{cámara} PM_a \varepsilon}{R T_{sup}}$

Tabla 4.3 Modelo matemático de energía

$\rho_{eff} C_{p_{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} - \left\{ \left( C_{p_l} \frac{\partial}{\partial x} c_l D_{l,cap} \right) + \left( C_{p_v} \rho_v \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial}{\partial x} P + C_{p_v} M_v M_a D_{eff} \frac{\partial}{\partial x} x_v \frac{C_g^2}{\rho_g} \right) + \left( C_{p_a} \rho_a \frac{k_a}{\mu_a} \nabla P_g + C_{p_a} M_v M_a D_{eff} \nabla x_a \frac{C_g^2}{\rho_g} \right) \right\} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$		
Condición inicial	Condición frontera en x=0	Condición frontera en x=L
$T_{inicial} = 25^\circ C$	$T \Big _{x=0} = T_{placa}$	$-K \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=L} = -(\dot{m}) (h_v)$

## CAPÍTULO 5

### 5. Simulación numérica

Después de desarrollar el modelo matemático en el capítulo III, éste se simuló en el software COMSOL Multiphysics en su versión 4.3b. Las ecuaciones principales se muestran en la siguiente figura.

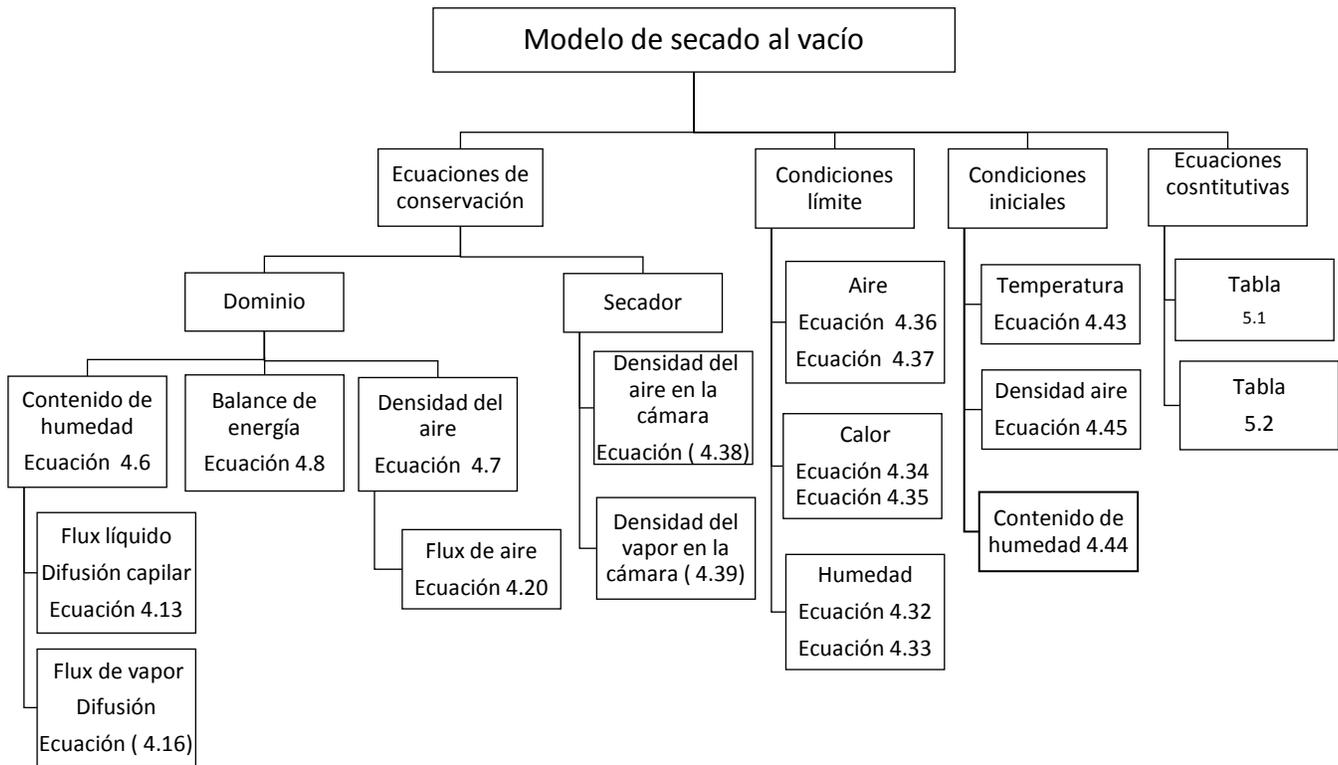


Figura 5.1 Mapa conceptual del modelo de secado al vacío por contacto de tubérculos

Las ecuaciones utilizadas en el diagrama se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 5.1 Ecuaciones principales del modelo de secado al vacío por contacto.

Balance de contenido de humedad	$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{1}{\rho_s} (J_l + J_v) = 0$	Ecuación ( 4.6)
Balance de aire	$\frac{\partial \rho_{aire}}{\partial t} + \nabla (J_a) = 0$	Ecuación ( 4.7 )
Balance de energía	$\rho_{eff} C_{p_{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + [(J_l C_{p_l} + J_{v-a} C_{p_v} + J_a C_{p_a})] \nabla T + (h_v m_{sup}) + (h_v m_{placa}) - \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) = 0$	Ecuación ( 4.8)
Flux líquido	$J_l = -D_{l,cap} \nabla c_l$	Ecuación ( 4.13)
Flux de vapor	$J_v = -\rho_v \frac{k_g}{\mu_g} \nabla P - \left(\frac{C_g^2}{\rho_g}\right) M_v M_a D_{eff} \nabla x_v$	Ecuación ( 4.16)
Flux de aire	$J_a = -\rho_a \frac{k_a}{\mu_a} \nabla P_g - \left(\frac{C_g^2}{\rho_g}\right) M_v M_a D_{eff} \nabla x_a$	Ecuación ( 4.20)
Condición limite en la superficie (balance de aire)	$\rho_a _{x=L} = \frac{P_{cámara} P M_a \varepsilon}{R T_{sup}}$	Ecuación ( 4.36)
Condición limite en la placa (balance de aire)	$J_a _{x=0} = 0$	Ecuación ( 4.37)
Condición limite en la superficie (balance de energía)	$-K \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=L} = -(\dot{m}) (h_v)$	Ecuación ( 4.34)
Condición limite en la placa (balance de energía)	$T _{x=0} = T_{placa}$	Ecuación ( 4.35)
Condición limite en la superficie (balance humedad)	$\frac{1}{\rho_s} (J_l + J_v) \Big _{x=L} = \frac{\dot{m}_{sup}}{\rho_s}$	Ecuación ( 4.32)
Condición limite en la placa (balance humedad)	$\frac{1}{\rho_s} (J_l + J_v) \Big _{x=0} = \frac{\dot{m}_{placa}}{\rho_s}$	Ecuación ( 4.33)
Temperatura inicial	$T_{inicial} = 25^{\circ}C$	( 4.43)
Contenido de humedad inicial	$M = 5.3 \frac{kg_{agua}}{kg_{s,s}}$	Ecuación ( 4.44)

Densidad del aire inicial	$\rho_{a, inicial} = \frac{P_{a, inicial} PM}{RT_{inicial}}$	Ecuación ( 4.45)
Densidad del aire en la cámara	$\frac{d\rho_a^{cámara}}{dt} = -\rho_a^{cámara} \frac{Q_{bomba}}{V_{cámara}} + \rho_a^{atm} \frac{Q_{fugas}}{V_{cámara}}$	Ecuación ( 4.38)
Densidad del vapor en la cámara	$\frac{d\rho_v^{cámara}}{dt} = -\rho_v^{cámara} \frac{Q_{bomba} + Q_{cond}}{V_{cámara}} + \rho_v^{atm} \frac{Q_{fugas}}{V_{cámara}} + F_m \frac{A}{V_{cámara}}$	Ecuación ( 4.39)

Tabla 5.2 Parámetros variables que alimentan al sistema.

Coefficiente de difusión capilar	$D_{l, cap} = 10^{-8} \exp(-2.8 + 2M)$	Ecuación ( 4.12)
Densidad en términos de concentración y saturación	$c_l = \rho_l Sat_l \varepsilon$	Ecuación ( 4.14)
Saturación líquida	$Sat_l = \frac{M (1 - \varepsilon) \rho_s}{\varepsilon \rho_w}$	Ecuación ( 3.7)
Saturación del gas	$Sat_g = 1 - Sat_l$	
La concentración molar del gas en el dominio	$C_g = \frac{P_g \varepsilon Sat}{RT}$	Ecuación ( 3.11)
Presión del gas en el dominio	$P_g = P_v + P_a$	Ecuación ( 3-16)
Presión parcial del aire en el dominio	$P_a = \frac{\rho_a R T}{PM_a}$	Ecuación ( 3-17)
Presión Parcial del vapor en el dominio	$P_v = A_w P_{sat}$	Ecuación ( 3.19)
Densidad del gas en el dominio	$\rho_g = \frac{P_g PM \varepsilon S^g}{RT}$	Ecuación ( 3.14)
Coefficiente de difusión binaria	$D_{bin} = \frac{0.001 T^{1.75} \left( \frac{1}{PM_a} + \frac{1}{PM_v} \right)^{0.5}}{P [(\sum V_a)^{\frac{1}{3}} + (\sum V_v)^{\frac{1}{3}}]^2}$	Ecuación ( 3.29)
Coefficiente de difusión efectivo	$D_{eff} = \frac{D_{bin} \varepsilon Sat}{T}$	Ecuación ( 3.30)

Fracción molar del vapor en el dominio.	$x_v = \frac{P_v}{P_g}$	Ecuación ( 4.25)
Densidad del vapor	$\rho_v = \frac{P_v PM_v \varepsilon Sat_g}{RT}$	Ecuación
Flux másico de evaporación	$\dot{m} = \frac{\rho_l \varepsilon K_c}{P_g^{ch}} (P_{sat} - \hat{P}_v)$	Ecuación ( 4.31)
Presión de saturación (ecuación de Antoine)	$P_{sat} = 10^{A - \frac{B}{C+T}}$	Ecuación ( 3.18)
La conductividad térmica de la papa	$\lambda = 0.276 + 0.293 \log (M)$	Ecuación <b>( 4.10)</b>
Presión del aire en la cámara	$\hat{P}_a^{cámara} = \frac{\rho_a^{cámara} R T}{PM_a}$	Ecuación ( 4.40)
Presión del vapor en la cámara	$\hat{P}_v^{cámara} = \frac{\rho_v^{cámara} R T}{PM_v}$	Ecuación ( 4.41)
Saturación del gas	$1 - Sat_l$	
$\overline{\rho C_p}$	$\rho_a C p_a + \rho_v C p_v + \rho_l C p_l + \rho_{ss} C p_{ss}$	Ecuación ( 4.9)
Presión del gas en la cámara	$p_g^{cámara} = \hat{P}_a^{cámara} + \hat{P}_v^{cámara}$	( 4.42)

Tabla 5.3 Parámetros constantes que alimenta al modelo

$\rho_{ss}$	1528	kg/m <sup>3</sup>
$PM_l$	18[g/mol]	Kg/mol
$M_c$	0.55	Adimensional
$K_c$	0.002	m/s
$A$	8.07131 (Constante de Ec. Antoine)	Adimensional
$B$	1730.63 (Constante de Ec. Antoine)	Adimensional
$C$	233.426 (Constante de Ec. Antoine)	Adimensional
$T_\infty$	298.15	K
$T_i$	298.15	K
$T_{placa}$	318.15	K
$C p_a$	1006	J/kg K
$C p_v$	2062	J/kg K
$C p_l$	4200	J/kg K
$C p_{ss}$	1650	J/kg K
$h_v$	2600000	J/kg
$\lambda_{ss}$	0.516	W/m K
$PM_a$	29[g/mol]	kg/mol

$\rho_l$	998	$kg/m^3$
$\varepsilon$	0.88	Adimensional
$\rho_a$	1.24	$kg/m^3$
$P_{sat}^{Tsup}$	3157.9	$Pa$
$k_{ss}$	1E-18	$m^2$
$\mu_a$	1.8E-5	$Pa s$
$q_{fugas}$	1.78E-06	$m^3/h$
$V_{ch}$	0.0504	$m^3$
$A_{sup}$	1.5E-4	$m^2$
$q_{cond}$	0	$m^3/h$
$P_{atm}$	101325	$Pa$
$\hat{p}_{v, inicial}^{cámara}$	0.00687	$Pa$
$HR_{ch}$	0.3	Adimensional
Viscosidad del vapor	1.8E-5	$[Pa*s]$
Saturación del gas inicial	1-Saturacion_liq_ini	S/D
$P_{max}$	32	$kPa$
$P_{min}$	30	$kPa$

Todas las ecuaciones contenidas en este capítulo, se simularon en COMSOL Multiphysics 3.4b. Se utilizó el módulo general de ecuaciones diferenciales parciales para resolver cada uno de los balances en la muestra (densidad del aire, contenido de humedad y energía). Mientras para el secador se utilizó el módulo de ecuaciones diferenciales ordinarias para la solución de los balances de densidad de aire y vapor en la cámara. El enmallado utilizado fue controlado por la física de tamaño fino (máximo 0.186 y mínimo 0.00105) mientras que el tamaño de paso fue de 60 segundos.

A partir de las simulaciones generadas se obtuvieron distintos perfiles de temperatura, contenido de humedad base seca, presión y densidad del aire, de vapor, entre otros, que se compararán con datos experimentales de Fahloul *et al.* (2009) en el siguiente capítulo.

## CAPÍTULO 6

**6. Análisis y discusión de resultados**

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos del modelo matemático de secado al vacío por contacto de papa, cuyo desarrollo y simulación pueden consultarse en los capítulos tres y cuatro. El modelo es capaz de simular perfiles para el dominio (papa) de: temperatura, contenido de humedad, densidad del aire, densidad del vapor, presión de aire, presión de vapor y flux evaporativo. Mientras para la cámara es posible conocer los perfiles de: densidad del aire, densidad del vapor; presión de aire, presión de vapor.

Para validar el modelo se utilizaran los datos obtenidos por (Fahloul *et al.*, 2009) de secado al vacío de papa, donde se utilizaron 3 geometrías un prisma rectangular de 1x1x3 cm y cubos de 1 cm y rodajas de 3.5 mm por 45 mm. Este trabajo tomara los datos las rodajas.

**6.1. Efecto de la temperatura durante el secado al vacío**

En esta sección se compararan tres temperaturas de secado (55,65 y 75 °C) a una presión de 26664.4 Pa (0.26 atm). Las cinéticas experimentales se tomaron de (Fahloul *et al.*, 2009) y las simulaciones son desarrolladas en COMSOL Multiphysics 3.4b. El coeficiente de transferencia de masa utilizado en las siguientes simulaciones fue de 0.002 m/s. De igual forma se presentan los perfiles de temperatura simulados.

En la Figura 6.2 se muestra la evolución del contenido de humedad simulado a 26664.4 Pa (0.26 atm) y distintas temperaturas, se observa que los tiempos de secado disminuyen con el incremento de la temperatura desde 200, 150 y 120 minutos a 55,65 y 75 °C respectivamente. La Figura 6.4 y Figura 6.6 corresponde a las cinética de 53328.8 Pa (0.53 atm) y 79993.2 Pa (0.79 atm) en las cuales se mantiene el mismo comportamiento. Para 79993.2 Pa los tiempos de secado van de 250,200 y 150 min a 55, 65 y 75 °C. El tiempo de secado menor (120 min) se obtuvo a 26664.4 Pa y 75 °C, mientras el mayor (250 min) a 79993.2 Pa y 55°C, cual indica que a presiones menores y temperaturas altas el tiempo de secado es menor. Esto puede ser comparado con las cinéticas experimentales Figura 6.3, Figura 6.1 y Figura 6.5 donde se observan las mismas tendencias que en las simulaciones.

Para condiciones de secado a 26664.4 Pa y 55,65 y 75 °C se obtuvieron los siguientes errores cuadráticos medio estándar (RMSE) 0.04, 0.56, 0.63, respectivamente. Se observa que el modelo matemático representa mejor a los datos experimentales del secado a 55 °C, donde se obtuvo un menor RMSE. Así mismo, al comparar presiones de 53328.8 Pa (0.53 atm) y 79993.2 Pa (0.79 atm) a 55 °C los RMSE fueron de 0.23 y 0.11 los cuales son menores que los obtenidos en temperaturas superiores como se detalla en la Tabla 6.1

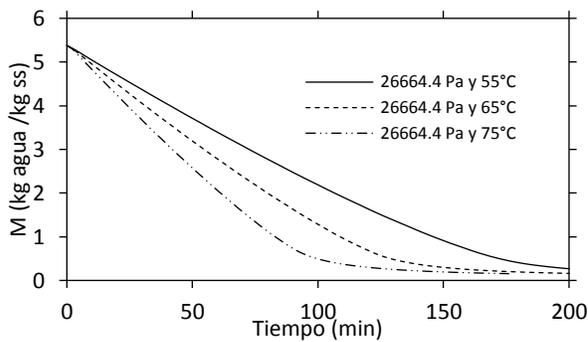


Figura 6.2 Perfiles de contenido de humedad simulados a 26664.4 Pa (0.26 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al, 2009)

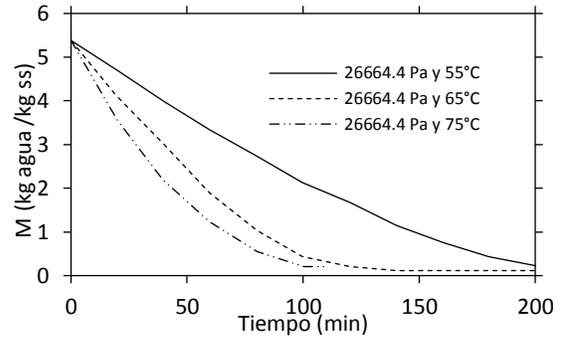


Figura 6.3 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 26664.4 Pa (0.26 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al, 2009)

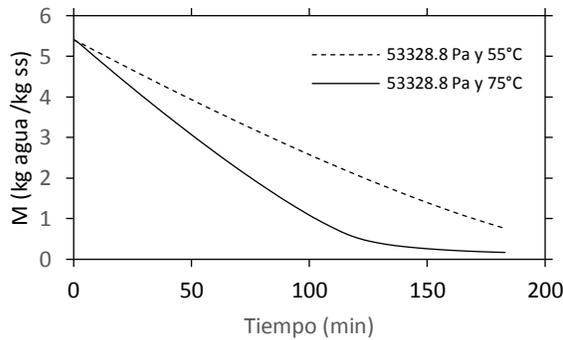


Figura 6.4 Perfiles de contenido de humedad simulados a 53328.8 Pa (0.53 atm) y distintas temperaturas

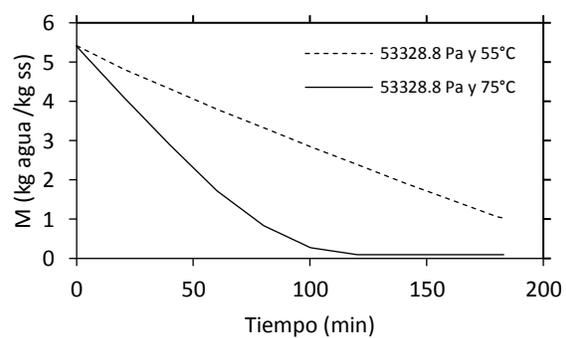


Figura 6.1 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 53328.8 Pa (0.53 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al, 2009)

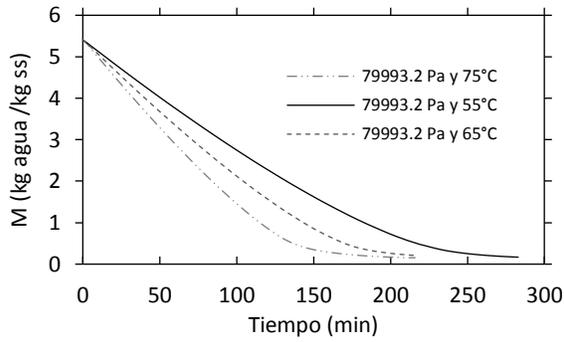


Figura 6.6 Perfiles de contenido de humedad simulados a 79993.2 Pa (0.79 atm) y distintas temperaturas

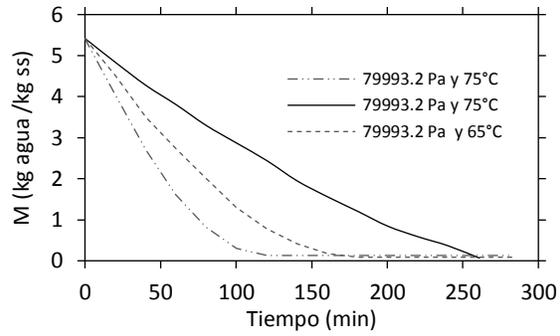


Figura 6.5 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 79993.2 Pa (0.79 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009)

Figura 6.7 y Figura 6.8 muestran la evolución de la rapidez de secado respecto al contenido de humedad en el interior de una rebanada de papa (*Solanum tuberosum v. spunta*). En un mismo nivel de vacío se observa que la rapidez de secado incrementa con la temperatura a causa del gradiente de temperatura entre la cámara y la muestra de papa, este mismo comportamiento se obtiene en los perfiles experimentales y simulados. Se observa, que el periodo de rapidez decreciente corresponde la mayor parte del secado. Por otra parte se obtiene la mayor rapidez de secado a presiones bajas (26664.4 Pa) y altas temperaturas (75°C), comparada con presiones altas y temperaturas altas (75 °C). Lo cual indica que la variable principal que interviene en el incremento de la rapidez de secado a presiones de vacío es la presión (disminución) y no la temperatura.

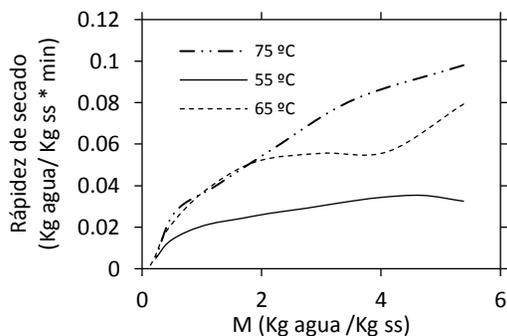


Figura 6.8 Rapidez de secado experimental a 26664.4 Pa (0.26 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009)

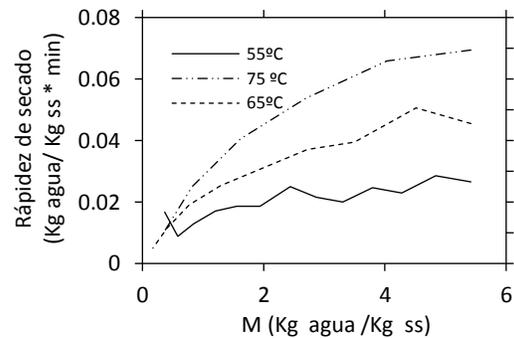


Figura 6.7 Rapidez de secado experimental a 79993.2 Pa (0.79 atm) y distintas temperaturas (Fahloul et al., 2009)

El control de la presión en una cámara de secado es importante debido a que el modelo a escala del proceso requiere la integración de los fenómenos físicos a escala del secador. Durante el secado a vacío la presión es regulada entre dos valores denominados presión máxima y mínima, esto genera la existencia de dos fases durante el secado. Una fase activa cuando la bomba se encuentra en funcionamiento y otra fase pasiva cuando no lo está. Esto es reflejado en la densidad del aire y vapor presentes en la cámara de secado y su sistema de control puede ser manipulado para probar distintas presiones de vacío como se muestra en la Figura 6.9 y Figura 6.10. La presión del gas en la cámara de secado es una variable involucrada en la condición frontera y como se mencionó anteriormente la presión es la variable principal que afecta la rapidez de secado.

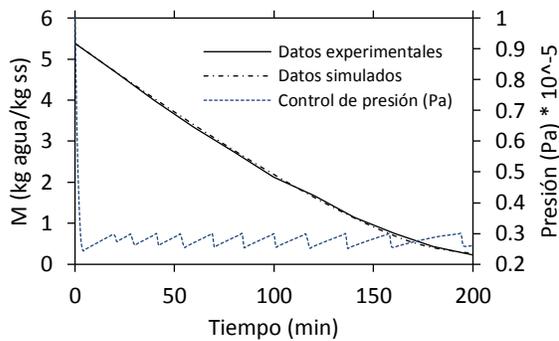


Figura 6.10 Evolución de contenido de humedad a 26664.4 Pa (0.26 atm) y 55°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados

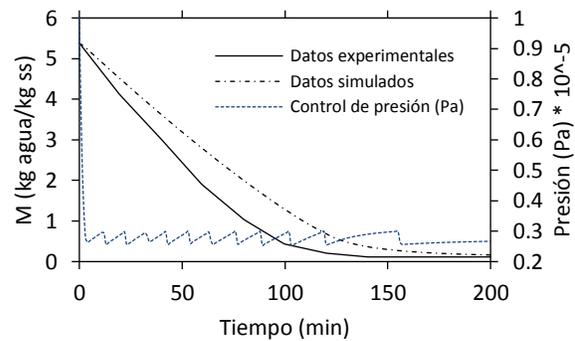


Figura 6.9 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 26664.4 Pa (0.26 atm) y 65°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados

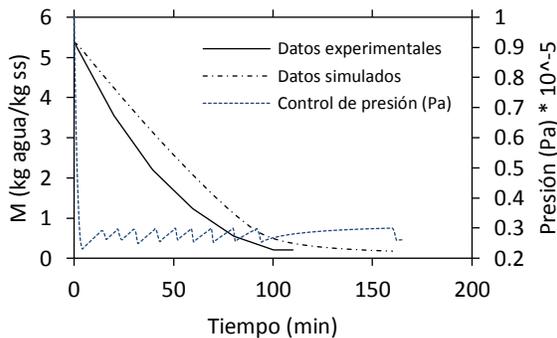


Figura 6.12 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 26664.4 Pa (0.26 atm) y 75°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados

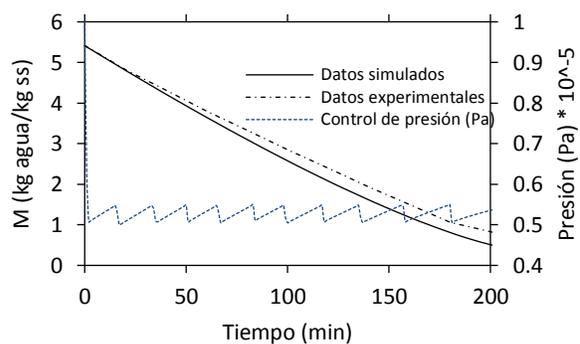
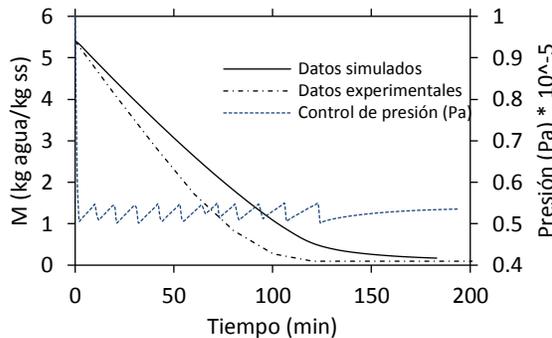
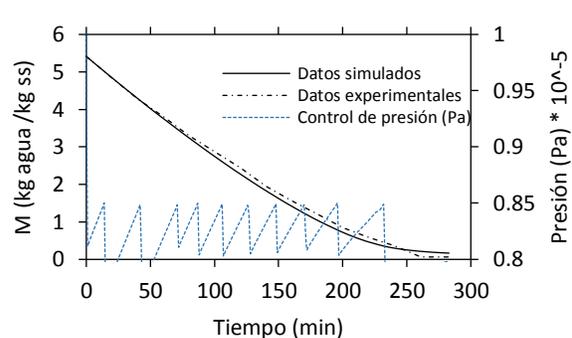


Figura 6.11 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 53328.8 Pa (0.53 atm) y 55°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados

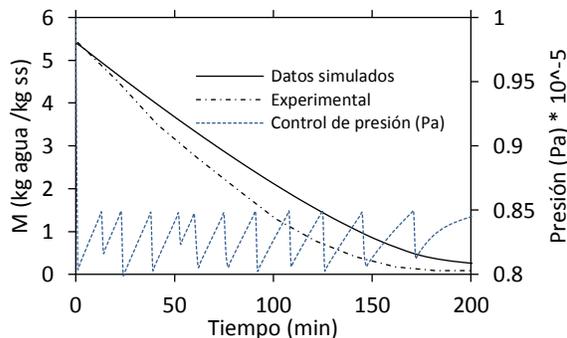
En las gráficas anteriores y las siguientes podemos observar el efecto que tiene el cambio de la zona capilar a la higroscópica en el comportamiento de la presión, por ejemplo en Figura 6.15 se puede observar que las fases activa y pasiva tiene un comportamiento constante hasta el minuto 100 aproximadamente y después de este las fases mantienen intervalos de tiempo superiores para cambiar de una fase a otra. Lo cual es coherente, pues cuando la muestra alcanza la zona higroscópica el flux evaporativo disminuye y es necesario una mayor cantidad de energía para separar las moléculas de agua y esto involucra un lapso superior de tiempo para alcanzar la presión máxima establecida por el control.



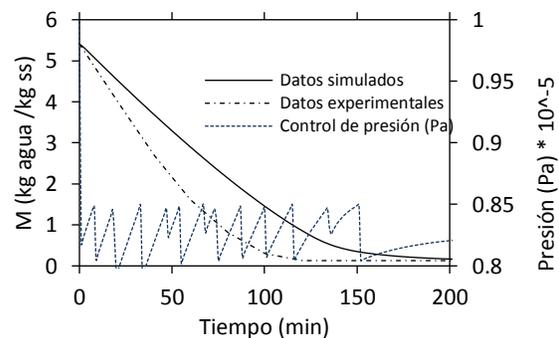
*Figura 6.15 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 53328.8 Pa (0.53 atm) y 75°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados*



*Figura 6.16 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 79993.2 Pa (0.79 atm) y 55°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados*



*Figura 6.13 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 79993.2 Pa (0.79 atm) y 65°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados*



*Figura 6.14 Evolución de contenido de humedad en función de tiempo a 79993.2 Pa (0.79 atm) y 75°C (Fahloul et al., 2009) contra datos simulados*

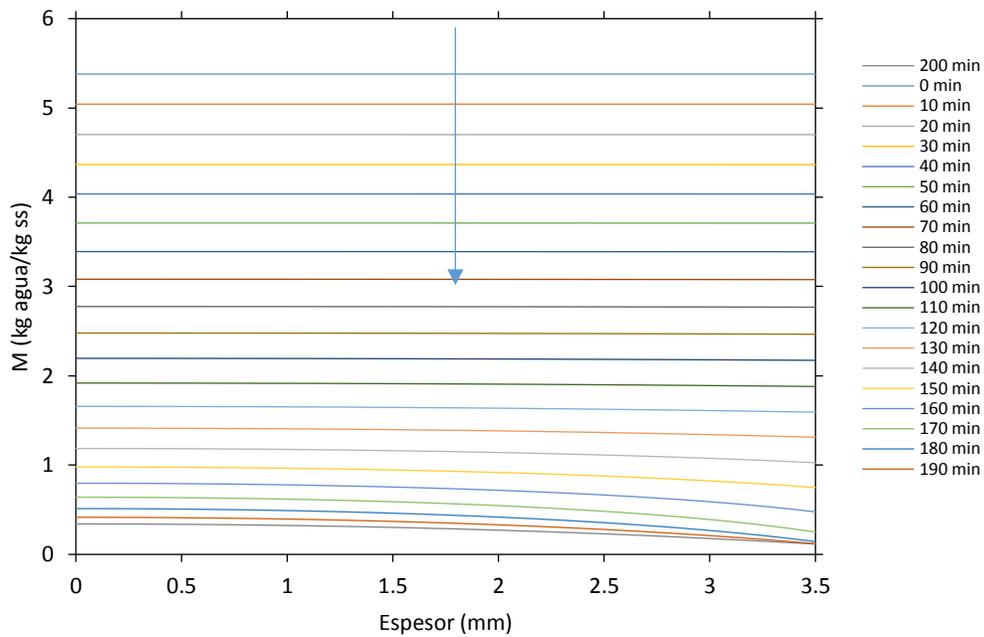
Para identificar la magnitud del error en (Kg de gua / Kg de materia seca) se calculó el error cuadrático medio estándar, RMSE, mediante la siguiente ecuación.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{ij}^n \left(\frac{x_i - x_j}{n}\right)^2}$$

*Tabla 6.1 Error cuadrático medio en distintas condiciones de secado*

Condición de secado	RMSE
26664.4 Pa (0.26 atm) y 55 °C	0.04
26664.4 Pa (0.26 atm) y 65 °C	0.56
26664.4 Pa (0.26 atm) y 75 °C	0.63
53328.8 Pa (0.53 atm) y 55 °C	0.23
53328.8 Pa (0.53 atm) y 75 °C	0.47
79993.2 Pa (0.79 atm) y 55 °C	0.11
79993.2 Pa (0.79 atm) y 65 °C	0.47
79993.2 Pa (0.79 atm) y 75 °C	0.67

En Figura 6.17 se muestra la evolución del contenido de humedad respecto al espesor y tiempo, se observa que los perfiles de contenidos de humedad mayores de 1 (kg agua/kg ss) tienen una distribución de humedad homogénea y constituyen el 75 por ciento del tiempo requerido para el secado.



*Figura 6.17 Evolución del contenido de humedad a 55 °C y 26664.4 Pa respecto al espesor en la muestra cada 10 minutos*

Por otro lado, la Figura 6.18, muestra el perfil global de temperatura, en el inicio del secado se observa que la temperatura incrementa rápidamente a causa de efecto de la placa de calentamiento en contacto con la rodaja de papa de 3.5 mm de espesor, posteriormente se observa un periodo de temperatura casi constante, con pequeñas perturbaciones causadas por el efecto del control de presión impuesto al proceso. Durante la etapa final del secado se presenta un incremento en la temperatura, sin embargo no alcanza a la temperatura impuesta a la placa de calentamiento, esto puede ser atribuido a la succión periódica en el proceso y al enfriamiento evaporativo en la superficie de la muestra.

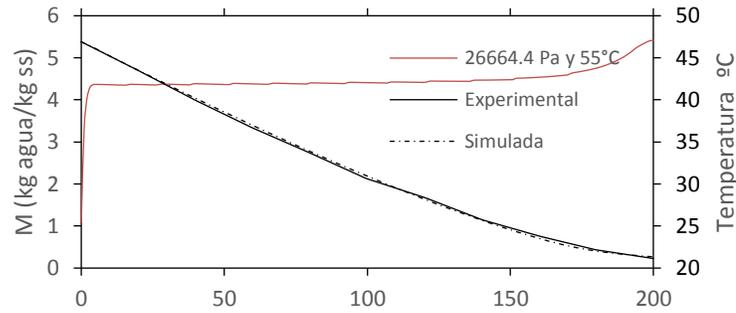


Figura 6.18 Evolución de la temperatura y contenido de humedad a 55 °C y 26664.4 Pa

### 6.2. Efecto de la presión durante secado al vacío por contacto

En esta sección se comparará el comportamiento experimental y simulado de distintas presiones (20, 40 y 60 cm Hg) en dos temperaturas de la placa de calentamiento, 55 y 75 °C respectivamente, como puede observarse en las figuras siguientes. El coeficiente de transferencia de masa utilizado en las siguientes simulaciones fue de 0.002 m/s.

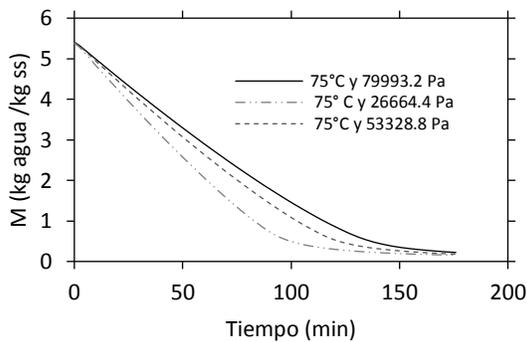


Figura 6.20 Perfiles de contenido de humedad simulados a 55 °C y distintas presiones

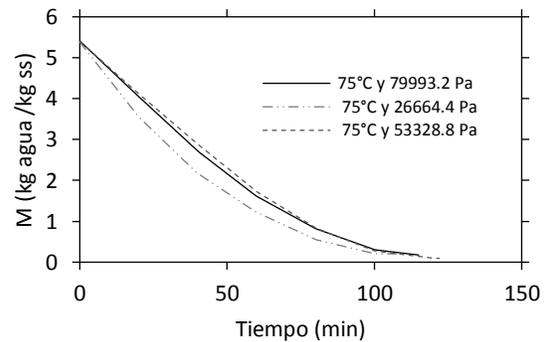


Figura 6.19 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 55 °C y distintas presiones (Fahloul et al., 2009)

En los perfiles experimentales mostrados en las figuras anteriores se observa que la rapidez de secado a una temperatura constante, incrementa con la disminución de la presión, este mismo comportamiento se obtiene en los perfiles simulados a partir del modelo matemático de secado al vacío. Lo cual indica que el nivel de vacío en la cámara de secado afecta la evolución del contenido de humedad. Por lo cual, es correcto involucrar la presión del equipo de secado al vacío en la frontera.

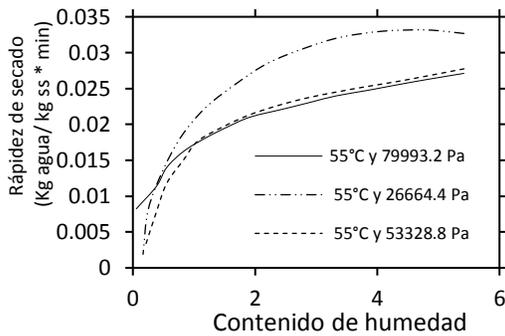


Figura 6.21 Perfiles de contenido de humedad simulados a 55 °C y distintas presiones

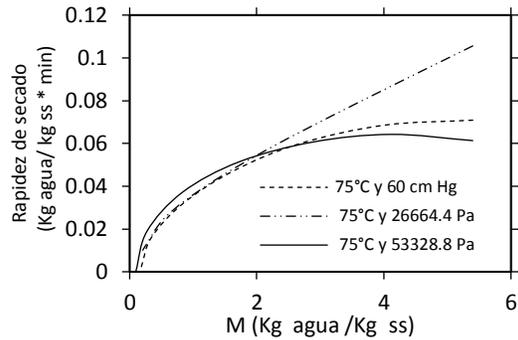


Figura 6.22 Perfiles de contenido de humedad experimentales a 75 °C y distintas presiones (Fahloul et al., 2009)

### 6.3. Efecto del coeficiente de transferencia de masa en la condición frontera

Uno de los propósitos de este modelo es calcular los perfiles de humedad y temperatura para analizar el efecto del coeficiente de transferencia de masa en la frontera.

El transporte de masa durante el secado al vacío depende del orden de magnitud del coeficiente de transferencia de masa en vacío y del gradiente de presión existente entre la cámara de secado y el material a deshidratar. En esta sección se abordará el efecto del coeficiente de vacío de transferencia de masa durante el proceso, el cual se encuentra involucrado en el cálculo del flux evaporativo en la superficie.

Para obtener el valor experimental del coeficiente de transferencia de masa se utilizaron las cinéticas de contenido de humedad obtenidas por (Fahloul et al., 2009). A partir de las cinéticas se calculó el flux evaporativo experimental, y por medio de la ecuación (4.31) se despejó el valor del coeficiente.

El coeficiente de transferencia de masa depende del flux evaporativo experimental, de la presión de gas en la cámara, de la presión de vapor en la muestra y de la presión de saturación a la temperatura de la

cámara. La temperatura de la cámara se supone igual a la temperatura de la muestra. Como se observa en Figura 6.18, la temperatura tiene un incremento inicial instantáneo, después del cual la temperatura se mantiene casi constante durante todo el proceso, observándose un nuevo incremento temperatura al final del secado. Por lo cual, se consideró el valor de la temperatura en su periodo constante para el cálculo de la presión de saturación.

Después del procedimiento descrito anteriormente se calcularon los coeficientes a distintas condiciones de operación, en la Figura 6.23 y Figura 6.24 se muestran tres simulaciones del proceso, con diferentes valores del coeficiente de transferencia de masa en vacío. Se observa que el coeficiente de transferencia de masa es un número muy pequeño pero con gran significado para describir el proceso. La variación en el orden del coeficiente de transferencia de masa incrementa la desviación de los datos experimentales. También se observa, que al disminuir el orden del coeficiente se obtiene una sobre predicción en los perfiles de humedad, mientras un coeficiente de orden inferior genera una sub predicción de las cinéticas de secado.

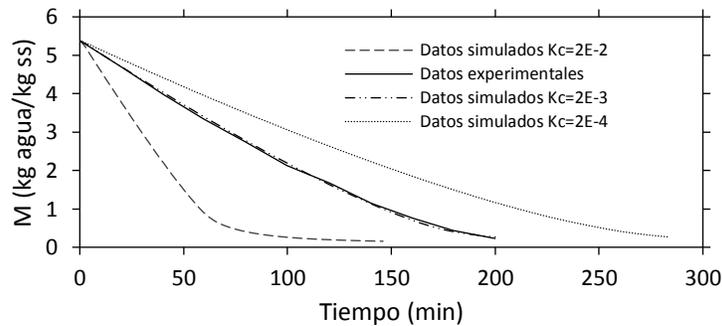


Figura 6.23 Evolución del contenido de humedad a 55 °C y 26664.4 Pa con variaciones en el coeficiente de transferencia de masa

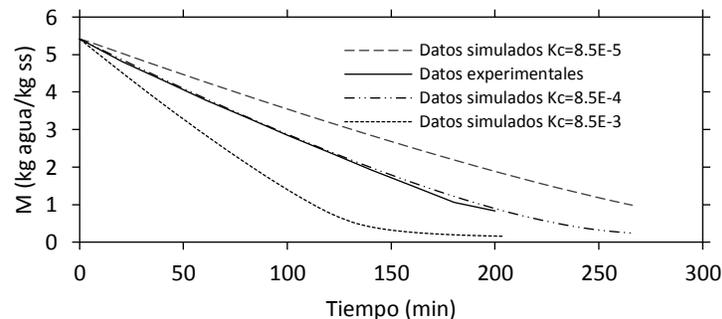


Figura 6.24 Evolución del contenido de humedad a 55 °C y 53328.8 Pa con variaciones en el coeficiente de transferencia de masa

#### 6.4. Comparación del secado convectivo y secado al vacío

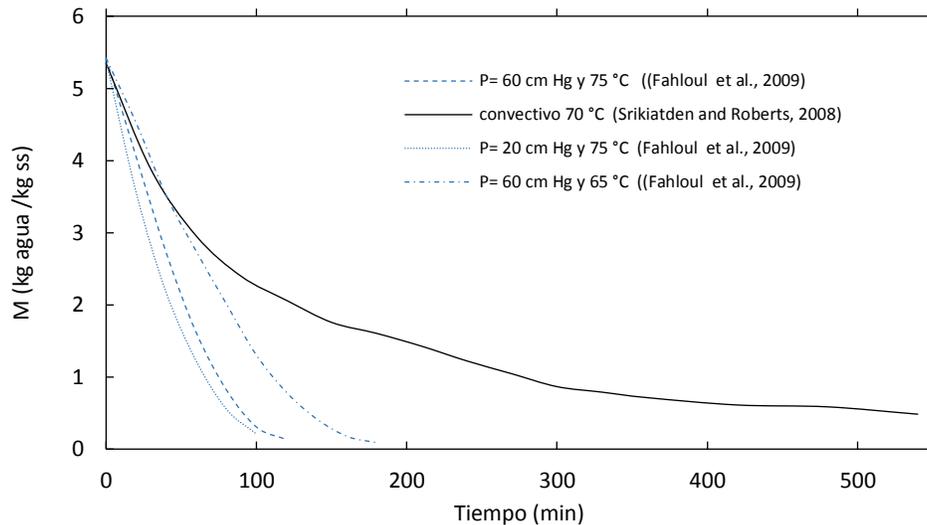


Figura 6.25 Perfiles de contenido de humedad en secado convectivo y en vacío

Para comparar las cinéticas de secado a vacío contra algún proceso clásico, por ejemplo, convectivo, es interesante observar los tiempos de secado. En el trabajo de (Srikiatden and Roberts, 2008), se publican curvas de secado con un fuljo de aire de 1.5 m/s para y temperatura de 70 °C, el cual se comparara con las cinéticas realizadas a condiciones de vacío por (Fahloul *et al.*, 2009)

En la Figura 6.25 se observa que el vacío disminuye los tiempos de secado en comparación con el secado a presión atmosférica. Es importante destacar que el diámetro de la muestra utilizado por Srikiatden and Roberts (2008) es de 2.8 cm, mientras el utilizado por Fahloul *et al.* (2009) es de 4.5 cm de diámetro. Como se puede observar el diámetro de la muestra sometida al vacío es la mayor (4.5 cm), sin embargo a pesar de ser una muestra de tamaño superior sus tiempos de secado son cortos comparado con el convectivo.

Trabajos como los de (Gulati and Datta, 2015, Aprajeeta *et al.*, 2015) mencionan que temperaturas altas y tiempos prolongados de secado como en el caso del secado convectivo causan daño en la estructura del producto. Mientras, que Fahloul *et al.* (2009) menciona que las condiciones de secado óptimas para conservar las características organolépticas en papa (aspecto, textura, color y sabor) son 65 °C y 26664.4 Pa (0.26 atm). Es importante destacar que dichas condiciones pueden ser exploradas por el modelo desarrollado en el presente trabajo.

## Conclusiones

La presente tesis tuvo como objetivo principal desarrollar un modelo matemático del secado a vacío por contacto para papa considerando la dinámica del secador en sus fases pasiva y activa, así como la simulación de la operación. Para cumplir con dicho objetivo, se presenta el desarrollo de un modelo multi-escala de medios porosos que describe el transporte de calor y masa en papa (*Solanum tuberosum* v. *spunta*) a bajas presiones. Las conclusiones a las que se llegó con la presente investigación se enlistan en seguida.

1. Se encontró que la rapidez de sacado es modificada por la presión del gas en la cámara. Por lo cual, la presión de vacío es una variable que debe ser considerada en la frontera.
2. El gradiente existente entre la presión del gas en la cámara y la presión de vapor en la muestra son la fuerza impulsora de transporte de masa en la frontera en contacto con un medio en condiciones de vacío.
3. Una mejor aproximación de las simulaciones depende del uso del flux evaporativo en las fronteras. El cual, se calcula por medio de un coeficiente de transferencia de masa y una fuerza impulsora de presión.
4. El coeficiente de transferencia de masa es un número muy pequeño pero con gran significado para describir el proceso y considerar el incremento inicial de temperatura en el cálculo del coeficiente de transferencia de masa mejora las simulaciones obteniendo RMSD de 0.04 y 0.07
5. La fluctuación de la presión en el secador causado por la evaporación del agua contenida en la muestra y la succión de la bomba, tienen un efecto importante durante el proceso y tomarla en consideración mejora las simulaciones.
6. Las etapas activas y pasivas obtenidas por medio del control automático de la bomba muestran un comportamiento distinto para la zona capilar y la zona higroscópica. Lo cual es coherente con las leyes de secado. Por lo tanto, incluir el control de presión de la cámara optimiza el modelo de secado.
7. El modelo acoplado a dos escalas describe correctamente de manera global la cinética de secado.

Se recomienda incluir en futuras investigaciones, una ecuación diferencial ordinaria para el cálculo de la temperatura en la cámara de vacío, pues se encontró que el incremento de la temperatura al inicio del proceso es una variable que influye en el cálculo del coeficiente de vacío y conocer su valor mejoraría la predicción del proceso.

## Bibliografía

Aprajeeta, J., Gopirajah, R. and Anandharamakrishnan, C. 2015. Shrinkage and Porosity Effects on Heat and Mass Transfer During Potato Drying. *Journal of Food Engineering*, 144, 119-128.

Atkins, P. a. D. P., Julio. 2007. *Química - Física*, Médica Panamericana.

Baixeras, O. 1995. *Modélisation et mise en oeuvre expérimentale du séchage sous-vide discontinu du chêne*.

Barbosa-Canovas, G. V., Fontana, A. J., Schmidt, S. J. and Labuza, T. P. 2008. *Water Activity in Foods: Fundamentals and Applications*, Wiley.

Bear, J. and Cheng, A. H. D. 2010. *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*, Springer.

Bejan, A., Dincer, I., Lorente, S., Miguel, A. and Reis, H. 2013. *Porous and Complex Flow Structures in Modern Technologies*, Springer New York.

Bennamoun, L., Afzal, M. and Léonard, A. 2013. Baker's Yeast Behavior during Vacuum Agitated Contact Drying. *Chemical Engineering & Technology*, 36, 1795-1800.

Bondaruk, J., Markowski, M. and Błaszczak, W. 2007. Effect of drying conditions on the quality of vacuum-microwave dried potato cubes. *Journal of Food Engineering*, 81, 306-312.

Çengel, Y. A., Cimbala, J. M. and Olguín, V. C. 2006. *Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones*, McGraw-Hill.

Çengel, Y. A. and Ghajar, A. J. 2011. *Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications*, McGraw-Hill.

Crane 1987. *Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías*, McGraw-Hill.

Chakir, A. 1993. *Etude des transferts couplés de chaleur et de masse dans des planches de chêne, lors du séchage convectif et sous vide*.

Chambers, A. 2004a. *Modern Vacuum Physics*, CRC Press.

Chambers, A. 2004b. *Modern Vacuum Physics*, United States of America CRC Press.

Chen, X. D. and Mujumdar, A. S. 2009. *Drying Technologies in Food Processing*, Wiley.

Datta, A. K. 2006. Hydraulic Permeability of Food Tissues. *International Journal of Food Properties*, 9, 767-780.

- Datta, A. K. 2007a. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes. I: Problem formulations. *Journal of Food Engineering*, 80, 80-95.
- Datta, A. K. 2007b. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes. II: Property data and representative results. *Journal of Food Engineering*, 80, 96-110.
- Dhall, A. and Datta, A. K. 2011. Transport in deformable food materials: A poromechanics approach. *Chemical Engineering Science*, 66, 6482-6497.
- Erriguible, A., Bernada, P., Couture, F. and Roques, M. A. 2005. Modeling of Heat and Mass Transfer at the Boundary Between A Porous Medium and Its Surroundings. *Drying Technology*, 23, 455-472.
- Erriguible, A., Bernada, P., Couture, F. and Roques, M. A. 2007. Simulation of Vacuum Drying by Coupling Models. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 46, 1274-1285.
- Fahloul, D., Benmadi, F. and Boudraa, S. 2009. Estimation de la diffusivité massique et cinétique de séchage sous vide de la pomme de terre (variété Spunta). *Revue des Energies Renouvelables* 12.
- Gulati, T. and Datta, A. K. 2015. Mechanistic understanding of case-hardening and texture development during drying of food materials. *Journal of Food Engineering*, 166, 119-138.
- Halder, A., Datta, A. K. and Spanswick, R. M. 2011. Water transport in cellular tissues during thermal processing. *AIChE Journal*, 57, 2574-2588.
- Hernandez, J.-M. 1991. *Séchage du chêne. Caractérisation, procédés convectifs et sous vide*.
- Holman, J. P., de Assas Martínez de Morentín, P., de J. Leo Mena, T. and de Marañón, P. P. N. M. 1998. *Transferencia de calor*, McGraw-Hill.
- Jangam, S. V. and Mujumdar, A. 2010. Basic concepts and definitions. *Drying of Foods, Vegetables and Fruits*. Ed. Jangam, SV, Law, CL and Mujumdar, AS ISBN-978-981-08-6759-1. Singapore, 1, 1-30.
- Jousse, F. 2008. Modeling to Improve the Efficiency of Product and Process Development. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*, 7, 175-181.
- Krokida, M. K., Maroulis, Z. B. and Saravacos, G. D. 2001. The effect of the method of drying on the colour of dehydrated products. *International Journal of Food Science & Technology*, 36, 53-59.
- Liu, Y., Zhu, W., Luo, L., Li, X. and Yu, H. 2013. A Mathematical Model for Vacuum Far-Infrared Drying of Potato Slices. *Drying Technology*, 32, 180-189.
- Markowski, M., Bondaruk, J. and Błaszczak, W. 2009. Rehydration Behavior of Vacuum-Microwave-Dried Potato Cubes. *Drying Technology*, 27, 296-305.
- McCabe, W. L., Smith, J. C. and Harriott, P. 2007. *Operaciones unitarias en la ingeniería química*, McGraw-Hill.

- Ni, H. 1993. *Multiphase moisture transport in porous media under intensive microwave heating*. Doctor in philosophy, Cornell University.
- Ogata, K. 2003. *Ingeniería de control moderna*, Pearson Educación.
- Pinder, G. F. and Gray, W. G. 2008. *Essentials of Multiphase Flow in Porous Media*, Wiley.
- Plawsky, J. L. 2014. *Transport Phenomena Fundamentals, Third Edition*, Taylor & Francis.
- Rasmuson, A., Andersson, B., Olsson, L. and Andersson, R. 2014. *Mathematical Modeling in Chemical Engineering*, Cambridge University Press.
- Ratti, C. 2008a. *Advances in Food Dehydration*, CRC Press.
- Ratti, C. 2008b. *Advances in Food Dehydration*, CRC Press.
- Ratti, C. 2009. 7 Freeze and vacuum drying of foods. *Drying technologies in food processing*, 225.
- Sandoval, T. S., Jomaa, W., Puiggali, J.-R. and Avramidis, S. 2011. Multiphysics modeling of vacuum drying of wood. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 5006-5016.
- Sebastian, P. and Turner, I. 1994. An investigation of the boundary conditions for a vacuum drying problem-introducing the transition layer concept. *Drying Technology*, 12, 717-760.
- Singh, J. and Kaur, L. 2009. *Advances in Potato Chemistry and Technology*, Elsevier Science.
- Song, X.-j., Zhang, M., Mujumdar, A. S. and Fan, L. 2009. Drying Characteristics and Kinetics of Vacuum Microwave-Dried Potato Slices. *Drying Technology*, 27, 969-974.
- Sosa, J. G., Burgos, A. M. and Triay, E. E. 2004. *Mecánica de Fluidos: Antecedentes Y Actualidad*, UADY.
- Srikiatden, J. and Roberts, J. S. 2008. Predicting moisture profiles in potato and carrot during convective hot air drying using isothermally measured effective diffusivity. *Journal of Food Engineering*, 84, 516-525.
- Temmar, A. 1994. *Contribution à l'étude des phénomènes de transfert lors du séchage sous vide par contact du bois massif*.
- Van't Land, C. M. 2011. *Drying in the Process Industry*, Hoboken, New Jersey, Wiley.
- Velten, K. 2009. *Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers*, Wiley.
- Waananen, K. M., Litchfield, J. B. and Okos, M. R. 1993. Classification of drying models for porous solids. *Drying Technology*, 11, 1-40.

Wang, N. and Brennan, J. G. 1995. A mathematical model of simultaneous heat and moisture transfer during drying of potato. *Journal of Food Engineering*, 24, 47-60.

Warning, A., Dhall, A., Mitrea, D. and Datta, A. K. 2012. Porous media based model for deep-fat vacuum frying potato chips. *Journal of Food Engineering*, 110, 428-440.

Whitaker, S. 1977. Simultaneous Heat, Mass, and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying. In: James, P. H. and Thomas, F. I. (eds.) *Advances in Heat Transfer*. Elsevier.